

Concours Centrale Supélec 2004

Oral du concours

4 juillet 2004

1 Mathématiques I

Exercice 1

Résoudre le système matriciel suivant :

$$\begin{cases} {}^tXYX = I_n \\ {}^tYXY = I_n \end{cases}$$

1. dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2

Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

2 Mathématiques II

Exercice

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt} dt$$

1. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} , C^1 et exprimer f' à l'aide d'une intégrale.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

3. Calculer f .

Questions supplémentaires

Soit l'équation différentielle (E) trouvée au 2; existe-t'il des solutions développables en série entière ?

Quel en est le rayon de convergence ? Conditions sur les coefficients pour que la solution en série entière soit égale à f ?

Quelle est la limite de f en ∞ ?

3 Physique I

Exercice 1

Soit un moteur thermique réversible fonctionnant entre deux sources de capacité thermique $C = 4.10^6 \text{ J.K}^{-1}$ de températures initiales $\theta_{c0} = 373 \text{ K}$ et $\theta_{f0} = 283 \text{ K}$; les températures ne sont pas constantes, et on note T_c la température de la source chaude, T_f la température de la source froide.

1. Faire un schéma de principe du moteur en orientant soigneusement les échanges d'énergie.
2. Quelle est la température T_{final} des deux sources quand le moteur s'arrête ? *Application numérique.*
3. Calculer le travail effectué par le moteur jusqu'à son arrêt. *Application numérique.*
4. Quel est le rendement du moteur ? Comparer au rendement maximal théorique η' obtenu avec les sources à température constante. *Application numérique.*

Exercice 2

Soit un atome radioactif se désintégrant, en émettant α électrons par unité de temps, de manière isotrope, à vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_r$ avec v_0 constant.

Calculer (\vec{E}, \vec{B}) en tout point.

4 Physique II

Exercice, Cellule de filtre

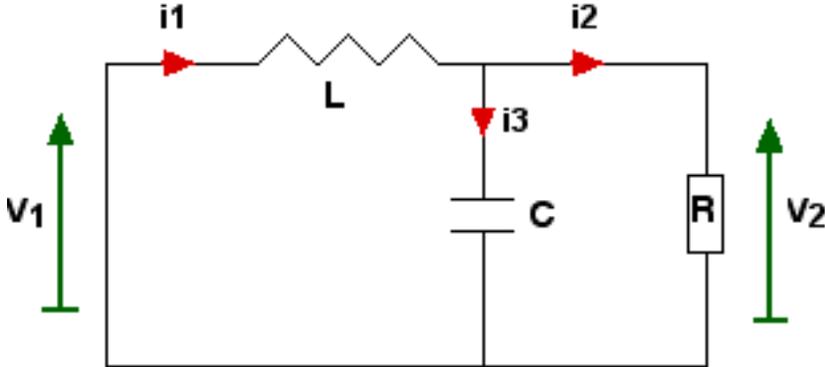


FIG. 1 – Circuit d'étude

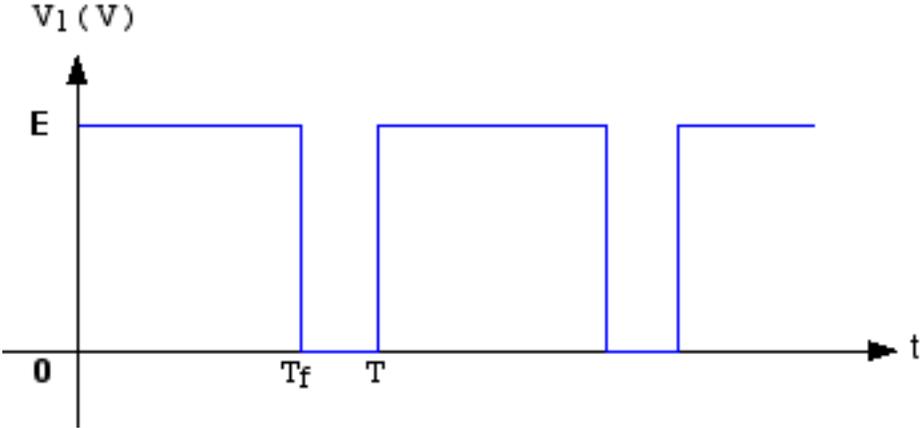


FIG. 2 – Variations de la tension V_1

On note $\alpha = \frac{T_f}{T}$.

1. On suppose dans un premier temps le filtre suffisamment efficace pour que la sortie V_2 soit à tension constante : $\forall t, V_2(t) = V_{20}$
 - Calculer $\langle V_L \rangle$ et $\langle i_3 \rangle$ (valeurs moyennes) ; trouver une relation entre E , α et V_{20} puis calculer $\langle i_1 \rangle$ en fonction de α , E , R et T .
 - Calculer $i_1(t)$ pour $0 \leq t < \alpha T$ en sachant que $i_1(0) = I_m$.

Calculer $i_1(t)$ pour $\alpha T \leq t < T$ en sachant que $i_1(\alpha T) = I_M$.

En déduire $\Delta I_1 = I_M - I_m$ (que l'on nomme modulation d'amplitude) en fonction de α , E , R et T .

2. En fait, l'allure du courant dans le condensateur indique que V_2 n'est pas constante ; on suppose donc que $V_2 = V_{20} + V_{alt}$ avec V_{alt} alternatif.

Expliquer sans calculs l'allure de V_{alt} ; calculer $\Delta V = V_{2max} - V_{2min}$ en fonction de α , E , R , C et T .