Une première approche du logarithme complexe

Julien Baglio

26 février 2005

Le logarithme est une fonction définie à priori sur $\mathbb{R}$, et l'on aimerait savoir si l'on peut l'étendre aux complexes. Le but de ce petit article est de proposer une première approche de ce problème ; il n'est pas de mon fait, mais une retranscription d'un article paru dans la RMS de mars 1995, mis à part quelques petits ajustements à certains endroits (souvent des démonstrations un peu plus étoffées). On rappelle, pour la suite, que $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, ainsi que $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in]-1;1[$.

1 Première version de l'article (24 février 2005) avec les résultats principaux

On va écrire ln sous forme de série : on sait que $\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$ pour $|t| < 1$; on écrit donc $\ln(\frac{1+t}{1-t}) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$. On pose alors $x = \frac{t+1}{1-t}$ et l'on a

Proposition 1 *Pour $x > 0$ on a :*

$$\ln x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$$

Démonstration :

en posant $X = \frac{x-1}{x+1}$ on voit tout de suite que si $x > 0$ alors $X \in]-1;1[$. Donc $f(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}$ est bien définie, et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en vertu des théorèmes relatifs aux séries entières. Si l'on dérive, on a donc $f'(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(x+1)^2} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n}$ donc

$f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} \dfrac{1}{1 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} = \dfrac{1}{x}.$

Donc ayant $f(1) = 0 = \ln 1$, on a bien $f(x) = \ln x$.

On va donc pouvoir étendre le logarithme ; de manière naturelle, l'on a la proposition suivante :

Proposition 2 *On a pour tout* $z \in \mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}/\Re(z) > 0\}$ $\log_1 z = 2 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2n+1}$ *défini et dérivable et pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *on a* $\log_1 x = \ln x$.

Démonstration :

La deuxième partie de la proposition est claire. Montrons la première partie ; elle s'appuie sur un résultat de convergence normale sur tout compact de $\mathbb{C}_+$. Soit K un tel compact. On a convergence normale dès que $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq r < 1$ (on s'appuie sur les résultats du logarithme dans $\mathbb{R}$, cf proposition 1). Or en posant $z = x + \boldsymbol{i}y$ on a

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}} = \sqrt{1 - \frac{(x+1)^2 + y^2 - y^2 - (x-1)^2)}{(x+1)^2 + y^2}}$$

Donc $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = \sqrt{1 - \dfrac{4x}{(x+1)^2 + y^2}}$; or il est aisé de se rendre compte de la continuité de

$$\psi : z \in K \longmapsto \frac{4x}{(x+1)^2 + y^2}$$

Grâce à la continuité des applications de projections (linéaires en dimension finie) et par composition d'applications continues. Ainsi, K étant compact, cette fonction atteint ses bornes et comme $\psi(z) > 0$, il existe $m > 0$ tel que $\psi(z) \geq m$ pour tout $z \in K$; donc $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| \leq \sqrt{1-m} < 1$, d'où le résultat souhaité.

Nous avons alors la proposition fondamentale suivante :

Théorème 1 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}_+$ $\exp(\log_1 z) = z$

Démonstration :

Tout d'abord, on démontre un lemme important : *Pour tout couple de fonctions à variables réelles dérivables* (f, g) *on a :*

$$\frac{g'}{g} = \frac{f'}{f} \Rightarrow \exists\ C \in \mathbb{C}/f = Cg$$

Cela vient de la formule de la dérivée d'une fraction $\frac{f}{g}$ en appliquant l'hypothèse.

On fixe maintenant $x > 0$ et on pose $h(y) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x+\boldsymbol{i}y-1}{x+\boldsymbol{i}y+1}\right)^{2n+1}$

Alors la série dérivée par rapport à y converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ (pas de souci, avec $z = x + \boldsymbol{i}y$ on est de retour à la proposition précedante sachant qu'un produit de compact est compact) donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(y) = \dfrac{\boldsymbol{i}}{x+\boldsymbol{i}y}$. La fonction $g = \exp oh$ est donc dérivable, et on a $\dfrac{g'(y)}{g(y)} = \dfrac{\boldsymbol{i}}{x+\boldsymbol{i}y}$; donc en considérant $y \mapsto x + \boldsymbol{i}y$ cette fonction et g ont même dérivée logarithmique (ie elles vérifient les conditions du lemme) : il existe donc $C \in \mathbb{C}$ tel que $g(y) = C(x + \boldsymbol{i}y)$. Or d'après la proposition 1 on a $h(0) = \ln x$ donc $C = 1$ puisque sur $\mathbb{R}_+^*$ on a bien $\exp(\ln x) = x$.

D'où le théorème ainsi démontré.

On va maintenant essayer d'aller plus loin, grâce à

Proposition 3 *Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ il existe un unique $a \in \mathbb{C}_+$ tel que $a^2 = z$; on note $a = \sqrt{z}$ et si $z = x + \boldsymbol{i}y$ on a*

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} + \boldsymbol{i}\frac{y}{\sqrt{2(x+\sqrt{x^2+y^2})}}$$

Il suffit de vérifier en calculant $\sqrt{z}^2$ et l'unicité provient du fait que $a^2 = b^2$ implique $a = b$ ou $a = -b$ or on impose $\Re(a) > 0$ donc seul $a = b$ est conservé.

On peut donc poser $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ $\ln z = 2\log_1(\sqrt{z})$. La proposition suivante étend les propriétés déjà vues pour ln :

Proposition 4
- $\forall\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-,\ \exp(\ln z) = z$
- $\forall\ z \in \mathbb{C}_+, \ln z = \log_1 z$
- $\forall\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-,\ \ln z = 2\ln(\sqrt{z})$

Démonstration :

- On a $\ln z = 2\log_1(\sqrt{z})$. Or $\sqrt{z} = \exp(\log_1(\sqrt{z}))$ d'après le théorème 1, donc $\exp(\ln z) = \exp(2\log_1(\sqrt{z}))$, et donc $\exp(\ln z) = (\exp(\log_1(\sqrt{z})))^2 = (\sqrt{z})^2 = z$.

- Laissée au soin du lecteur (pour l'instant), se démontre à l'aide de la même méthode que celle du théorème 1.

- Evident avec la proposition ci-dessus.

On peut maintenant faire le point, et constater que notre prolongement du logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ en fait toujours une application continue (grâce à la convergence normale de la proposition 2, et ensuite on utilise la proposition 3). Si on étudie les limites aux bornes, on peut se rendre compte avec un petit calcul que pour tout $\alpha < 0$ dans $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{z\to\alpha,\ \Im(z)>0} - \lim\limits_{z\to\alpha,\ \Im(z)<0} \neq 0$, ce qui rend impossible un prolongement par continuité : notre prolongement de la fonction logarithme sur $\mathbb{C}$ est ici maximal. On termine cette section avec deux autres petites propositions qui permettent d' éclaircir la fonction logarithme :

Proposition 5 $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall\ z \in \mathbb{C}_+$ *on a* $\ln(az) = \ln a + \ln z$

Démonstration :

On pose encore $z = x + \boldsymbol{i}y$, a fixé. On se souvient que dans le théorème 1, on avait $\dfrac{\partial}{\partial y}(\ln a + \ln z) = \dfrac{\boldsymbol{i}}{x+\boldsymbol{i}y} = \dfrac{a\boldsymbol{i}}{ax+\boldsymbol{i}ay} = \dfrac{\partial}{\partial y}(\ln(az))$.

Ayant les deux fonctions qui prennent la même valeur en 0 (on se ramène à ln (ax) et on se sert du cas réel) nous avons bien le résultat annoncé.

Pour finir, voici le dernier théorème de cette première section :

Théorème 2 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ *on a :*

$$\ln z = \ln(x+\boldsymbol{i}y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + 2\boldsymbol{i}\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

Démonstration :

Le mieux à faire (je le ferais dans une prochaine version de cet article) est de dériver partiellement par rapport à x des deux côtés de l'égalité, en utilisant la formule de la proposition 1 pour le membre de gauche.

2 Seconde version (25 février 2005) où l'on étudie la formule $\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\pi} = -1$

Pour débuter cette seconde section, nous allons d'abord revenir sur deux démonstrations qui ont été laissées de côté au-dessus.

La première consistait à démontrer que la fonction ln définie sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ étendait bien la fonction $\log_1$: $\ln z = \log_1 z$ pour $z \in \mathbb{C}_+$. En effet, si $z \in]0;+\infty[$ on a déjà $\ln z = 2\log_1(\sqrt{z}) = \ln z$ où la dernière égalité est à prendre dans le sens "logarithme réel" ; elle découle directement de la proposition 2.

Ensuite, comme il a été dit, on reprend la méthode du théorème 1 : on pose $G(y) = \ln(x+\boldsymbol{i}y) = 2\log_1(\sqrt{x+\boldsymbol{i}y})$. La proposition 3 nous donne la dérivabilité de $y \mapsto \sqrt{x+\boldsymbol{i}y}$ et la relation $(\sqrt{x+\boldsymbol{i}y})^2 = x+\boldsymbol{i}y$ une fois dérivée nous fournit $2\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x+\boldsymbol{i}y})(\sqrt{x+\boldsymbol{i}y}) = \boldsymbol{i}$ donc $\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x+\boldsymbol{i}y}) = \frac{\boldsymbol{i}}{2\sqrt{x+\boldsymbol{i}y}}$. G est donc dérivable en tant que composée de fonctions dérivables, et le calcul montre que $G'(y) = \frac{i}{x+\boldsymbol{i}y} = h'(y)$ où h est la fonction introduite dans la démonstration du théorème 1 :

$$h(y) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x+\boldsymbol{i}y-1}{x+\boldsymbol{i}y+1}\right)^{2n+1}$$

Ayant $G(0) = \log_1(x) = \ln x$ d'après ce qui a été dit juste au-dessus dans le cas $z \in]0; +\infty[$, et de plus $h(0) = \ln x$ on a bien $G(y) = h(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ ce qui achève notre démonstration car $h(y) = \log_1(x+\boldsymbol{i}y)$.

La seconde démonstration établissait l'écriture explicite du logarithme. Pour cela, on regarde d'abord le cas $z \in \mathbb{C}_+$, et on utilise la proposition 2, en faisant des manipulations sur les séries infinies. Le cas général se traite grâce à la proposition 4 et à l'égalité des dérivées partielles par rapport à x.

Maintenant, on va s'interesser à la périodicité de l'exponentielle. On a

Proposition 6

$$\ln \boldsymbol{i} - \ln(-\boldsymbol{i}) = 8(\sqrt{2}-1)\boldsymbol{i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\sqrt{2}-3)^n}{2n+1}$$

Un calcul approché donnant $\ln \boldsymbol{i} - \ln(-\boldsymbol{i}) = 3,141592654\boldsymbol{i}$ *on pose alors la définition suivante :*

$$\pi = 8(\sqrt{2}-1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2\sqrt{2}-3)^n}{2n+1}$$

Démonstration :

On a $\ln \boldsymbol{i} = 2\log_1 \sqrt{\boldsymbol{i}} = 2\log_1(\frac{1+\boldsymbol{i}}{\sqrt{2}})$. Un calcul suffit pour conclure.

Nous avons donc finalement :

Proposition 7 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\pi} = -1$ *et donc* $\mathrm{e}^{2\boldsymbol{i}\pi} = 1$.

Démonstration :

On a la propriété fondamentale de l'exponentielle $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\,\mathrm{e}^{z_2}$ donc ici $\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\pi} = \mathrm{e}^{\ln \boldsymbol{i} - \ln(-\boldsymbol{i})}$ d'après ci-dessus, donc $\mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\pi} = e^{\ln \boldsymbol{i}}\,\mathrm{e}^{-\ln(-\boldsymbol{i})} = \boldsymbol{i}^2 = -1$ grâce au théorème 1. On en déduit tout de suite que $\mathrm{e}^{2\boldsymbol{i}\pi} = 1$.

Nous allons maintenant démontrer que 2π est la plus petite période de $x \mapsto e^{\boldsymbol{i}x}$. On pose d'abord $\arg z = 2\arctan \dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ pour $z = x + \boldsymbol{i}y \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. On a donc pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ $\ln z = \ln|z| + \boldsymbol{i}\arg z$.

Pour $z \in \mathbb{C}_+$ on a $\sqrt{z^2} = z$ et les propositions précédentes permettent d'écrire $\ln z^2 = 2\ln(\sqrt{z^2}) = 2\ln z$ donc on a $\arg z^2 = 2\arg z$ (on applique aussi les résultats connus sur le logarithme d'un nombre réel). Cela nous amène à

Proposition 8 *$\forall\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ on a $-\pi < \arg z < \pi$ et donc naturellement $\ln(\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-) \subset \mathbb{D}$ avec $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}/-\pi < \Im(z) < \pi\}$.*

Démonstration :

En effet, la dernière remarque nous indique que pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, ayant $\sqrt{z} \in \mathbb{C}_+$ on a $\arg z = \arg((\sqrt{z})^2) = 2\arg(\sqrt{z})$; il nous suffit donc de montrer que pour $z \in \mathbb{C}_+$ on a $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$. On pose $z = x + \boldsymbol{i}y$ et $t = \dfrac{y}{x}$ (on a bien $x > 0$, c'est donc défini). Alors $\arg z = k(t) = 2\arctan\dfrac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}$, c'est une fonction continue en t et strictement croissante. La proposition 6 nous indique que $\ln \boldsymbol{i} - \ln(-\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}\pi$; or le théorème 2 nous donne $\ln\boldsymbol{i} = \ln 1 + \boldsymbol{i}\arg\boldsymbol{i} = \arg\boldsymbol{i}$ et $\arg\boldsymbol{i} = -\arg(-\boldsymbol{i})$ donc finalement $\arg\boldsymbol{i} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc $\lim\limits_{z\to\boldsymbol{i}}\arg z = \dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{t\to+\infty} k(t)$. De même, $\lim\limits_{z\to-\boldsymbol{i}}\arg z = \dfrac{-\pi}{2} = \lim\limits_{t\to-\infty} k(t)$ et l'on a bien l'encadrement souhaité.

Ainsi, on a maintenant le dernier théorème de l'article :

Théorème 3 *La fonction $\ln$ est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{D}$ et donc pour $z \in \mathbb{D}$ on a $\ln e^z = z$.*

Démonstration :

La proposition 4 nous donne immédiatemment l'injectivité : si $\ln z = \ln z'$ alors $\exp(\ln z) = \exp(\ln z')$ et la proposition 4 nous amène à $z = z'$.

La proposition 8 nous permet d'affirmer que la surjectivité sur $\mathbb{D}$ résultera de la surjectivité sur $\{z \in \mathbb{D}/-\dfrac{\pi}{2} < \Im(z) < \dfrac{\pi}{2}\}$. Or cela provient de la démonstration de cette proposition 8 où la fonction k était nettement surjective.

On a donc :

Proposition 9 *2π est la plus petite période de $x \mapsto e^{ix}$*

Démonstration :

Soit T la plus petite période de $x \mapsto e^{ix}$. Alors on a $(e^{i\frac{T}{2}})^2 = e^{iT} = e^0 = 1$ donc $e^{i\frac{T}{2}} = 1$ ou $e^{i\frac{T}{2}} = -1$; comme T est la plus petite période de cette fonction, $e^{i\frac{T}{2}} = -1$. Si $T < 2\pi$, alors $\boldsymbol{i}\frac{T}{2} \in \mathbb{D}$ et donc d'après le théorème 3 on a $\boldsymbol{i}\frac{T}{2} = \ln(\exp(\boldsymbol{i}\frac{T}{2})) = \ln(-1)$ qui n'existe pas dans notre construction : nécessairement $T \geq 2\pi$.

Références

[1] D. Duverney. *Logarithme d'un nombre complexe et périodicité de la fonction exponentielle complexe.* RMS 7, 1995.