Théorème de Cantor-Bernstein

Julien Baglio

8 novembre 2004

Ce document a pour but de démontrer le théorème de Cantor-Berstein.

Lemme 1 *Soit X un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille non vide de parties de X, ainsi que $\varphi : X \longrightarrow Y$. On a :*

1.
$$\varphi(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \varphi(A_i)$$

2.
$$\varphi(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} \varphi(A_i)$$

Il y a égalité si φ est une injection.

Évident à démontrer.

Théorème 1 (de Cantor-Bernstein) *Soit E et F deux ensembles tels qu'il existe $f : E \longrightarrow F$ injective et $g : F \longrightarrow E$ injective. Alors E et F sont équipotents.*

Démonstration

On considère $\mathcal{F} = \{C \in \mathcal{P}(E) \ / \ g(F\backslash f(C)) \subset E\backslash C\}$. C'est un ensemble non vide ($\emptyset$ y est par exemple). On note $K = \bigcup_{C\in\mathcal{F}} C$. Alors $K \in \mathcal{F}$: on a $f(K) = \bigcup_{C\in\mathcal{F}} f(C)$ et donc $F\backslash f(K) = \bigcap_{C\in\mathcal{F}} F\backslash f(C)$, d'où $g(F\backslash f(K)) \subset \bigcup_{C\in\mathcal{F}} g(F\backslash f(C))$. Mais $C \in \mathcal{F}$ donc $g(F\backslash f(C)) \subset E\backslash C$ d'où le résultat annoncé.

On pose maintenant $H = E\backslash g(F\backslash f(K))$.

Pour $C \in \mathcal{F}$, on a $g(F\backslash f(C)) \subset E\backslash C$ donc par passage au complémentaire, on a $E\backslash(E\backslash C) = C \subset E\backslash g(F\backslash f(C))$. Or d'après les définitions, on a $F\backslash f(K) = \bigcap_{C\in\mathcal{F}} F\backslash f(C)$ donc comme g est injective, on a d'après le lemme $g(F\backslash f(K)) = \bigcap_{C\in\mathcal{F}} g(F\backslash f(C))$ et donc on a $H = \bigcup_{C\in\mathcal{F}} E\backslash g(F\backslash f(C))$ ce qui nous permet d'affirmer que l'on a $K \subset H$.

Montrons maintenant que $H \in \mathcal{F}$; par définition de K, cela entraînera $H \subset K$ et donc $H = K$. Soit y tel que $g(y) \in H$. Alors par définition, $g(y) \notin g(F \backslash f(K))$ et donc $y \notin F \backslash f(K)$. Or on a vu que $K \subset H$ donc $f(K) \subset f(H)$ et par passage au complémentaire, on a $F \backslash f(H) \subset F \backslash f(K)$. D'où $y \notin F \backslash f(H)$; en prenant la contraposée de l'implication que l'on vient de montrer, on prouve alors que $H \in \mathcal{F}$.

Nous pouvons maintenant introduire la fonction $h : E \longrightarrow F$ suivante :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in K \\ g^{-1}(x) \text{ si } x \in E \backslash K \end{cases}$$

Où $g^{-1}(x)$ désigne abusivement l'unique antécédant de x par g (il y a bien unicité par injectivité de g). Cette fonction est bien définie : si $x \in K$ il n'y a pas de souci, et si $x \in E \backslash K$, comme $K = H$ on a $x \in E \backslash H$ donc $x \in g(F \backslash f(K))$ donc h(x) a bien un sens.

h est une surjection ; pour $y \in F$ deux cas se présentent :

- $y \in f(E)$ et c'est bon, car $y = f(x) = h(x)$ pour un certain $x \in E$
- $y \in F \backslash f(E)$; alors $g(y) \in g(f \backslash E)$ et comme $K \subset E$ on a $F \backslash E \subset F \backslash K$. On utilise le fait que $K \in \mathcal{F}$ ce qui donne $g(y) \in E \backslash K$. On pose $x = g(y)$ et on a bien $y = h(x)$

h est une injection : pour $(x, x') \in E^2$ trois cas se présentent (les rôles joués par x et x' sont symétriques) : $x, x' \in K$, $x, x' \in E \backslash K$ et $x \in K$, $x' \in E \backslash K$. Dans les deux premiers cas, si $x \neq x'$ alors $h(x) \neq h(x')$ grâce à l'injectivité de f et de g. Étudions le dernier cas :

$x \neq x'$ et si on supposait que $h(x) = h(x')$ on aurait $f(x) = g^{-1}(x')$, donc $x' = g(f(x))$. Or $x' \in g(F \backslash f(K))$ car $H = K$ donc il existe $x'' \in F \backslash f(K)$ avec $x' = g(x'') = g(f(x))$. Comme g est injective, cela entraînerait $x'' = f(x)$ et donc nécessairement $x \notin K$ ce qui contredit notre hypothèse de départ. Donc $h(x) \neq h(x')$ et donc h est bien une injection.

h est donc à la fois injective et surjective, elle est donc bijective, ce qui achève la démonstration.
$\triangleleft$