# La fonction $\zeta$ de Riemann

Julien Baglio

7 mai 2005

Le but de cet article est de présenter les polynômes de Bernoulli, dont l'une des nombreuses applications est le calcul de $\zeta(n)$ pour $n$ entier naturel pair.

## 1 Les polynômes de Bernoulli

**Définition 1** *On appelle suite de polynôme de Bernoulli toute suite de* $\mathbb{R}[X]$ *vérifiant* $B_0 = 1$*,* $B'_{n+1} = B_n$ *et pour* $n \geq 2$ $B_n(1) = B_n(0)$*.*

On va en fait montrer que cette définition est univoque : il n'existe qu'une seule suite de polynômes vérifiant ces hypothèses, et on l'appelle la suite de polynômes de Bernoulli.

**Théorème 1** *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$*, il existe un unique polynôme de* $\mathbb{R}[X]$ *tel que* $Q' = P$ *et* $\displaystyle\int_0^1 Q(t)dt = 0$*.*

**Démonstration**

On procède par analyse-synthèse : si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ alors on a nécessairement $Q = \lambda + \alpha_1 X + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1} X^{k+1}$ avec $\lambda$ à déterminer. La seconde hypothèse détermine de manière unique $\lambda$, donc $Q$ est univoquement déterminé, et l'on vérifie qu'il convient bien.

On peut donc considérer l'application suivante : Ł : $P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto Q \in \mathbb{R}[X]$.

**Théorème 2** *Une suite de polynôme* $(B_n)$ *est de Bernoulli si et seulement si* $B_0 = 1$ *et* $B_{n+1} = L(B_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Ainsi, une suite de polynômes de Bernoulli est unique.*

**Démonstration**
La condition suffisante est évidente. Montrons la condition nécessaire :
on a bien $B_0 = 1$ ; pour $n \geq 2$, en posant $Q = L(B_n)$ on a $Q' = B_n = B'_{n+1}$ par hypothèse. De plus, on a $\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = \int_0^1 B'_{n+2}(t)dt = B_{n+2}(1) - B_{n+2}(0) = 0$ par hypothèse.

Donc par unicité, d'après le théorème 1, $B_{n+1} = L(B_n)$, d'où la condition nécessaire.

On peut donc montrer, grâce à l'unicité de cette suite, que pour tout entier naturel $n$ on a $B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$ ; ainsi, on a $B_n(0) = (-1)^n B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$ car $B_n(1) = B_n(0)$. Donc si $n$ est impair, $B_n(0) = 0$.

**Définition 2** *On appelle nombre de Bernoulli le rationnel* $b_n = B_n(0)$ *; on a* $b_n = 0$ *pour* $n$ *impair.*

On peut montrer, par récurrence, que

$$b_0 = 1 \text{ et } b_{2(p+1)} = \frac{(-1)^p}{(2p)!(2p+2)} \sum_{k=0}^{p} C_{2p+2}^{k} b_{2k}$$

## 2 Un calcul de $\zeta(2k)$

On rappelle que la fonction $\zeta$ de Riemann est définie sur $]1; +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

On définit une application $g_k$ sur $\mathbb{R}$ par $g_k(x) = B_{2k}(\frac{x}{2\pi})$ pour $x \in [0; 2\pi[$ et $2\pi$-périodique. On constate que cette fonction est continue et $C^1$ par morceaux : elle est $C^1$ sur chaque intervalle $[2k\pi; 2(k+1)\pi[$ et de plus $\lim_{x \to 2m\pi^+} g_k(x) = B_{2k}(0) = B_{2k}(1)$ car ce sont des polynômes de Bernoulli, de même $\lim_{x \to 2m\pi^-} g_k(x) = B_{2k}(1) = B_{2k}(0)$ donc il y a bien continuité de $g_k$ sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier associée à $g_k$

converge donc vers $g_k$.

Si on écrit $g_k(x) = \alpha_0(k) + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(k)\cos(nx) + \beta_n(k)\sin(nx)$, on constate aisément que $g_k$ est paire, donc les coefficients $\beta_n(k)$ sont tous nuls.

De plus, on a par définition $\alpha_n(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_k(x)cos(nx)dx$. Avec le changement de variables $t = \frac{x}{2\pi}$ on a aussi :

$$\alpha_n(k) = 2\int_0^1 B_{2k}(t)cos(2\pi nt)dt$$

En exploitant le fait que $B_{2k} = B'_{2k+1}$ on a $\alpha_0(k) = 1$.

Calculons les coefficients $\alpha_k$ : on constate après une double intégration par parties, et en exploitant la propriété $B'_n = B_{n-1}$ que l'on a la relation de récurrence suivante :

$$\alpha_n(k) = \frac{-1}{(2\pi n)^2}\alpha_n(k-1)\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geq 2$$

Il nous reste à calculer $\alpha_n(1) = \int_0^1 B_2(t)cos(2\pi nt)dt$ ; si l'on explicite $B_2$ on peut effectuer le calcul, qui amène à $\alpha_n(1) = \frac{2}{(2\pi n)^2}$.

On a donc $\alpha_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}(\pi n)^{2k}}$, valable pour $k \geq 1$

Il ne nous reste plus qu' à rassembler les calculs, ce qui nous amène au théorème suivant :

**Théorème 3** *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2}b_{2k}$ où $b_{2k}$ désigne les nombres de Bernoulli.*

**Démonstration**

Il suffit de dire que l'on a $g_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}(\pi n)^{2k}}cos(nx)$ et de l'appliquer en 0 :

$g_k(0) = b_{2k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}(\pi n)^{2k}}$, CQFD.