Une introduction à l'étude des quaternions

Julien Baglio

dans le cadre des T.I.P.E. 2002-2003

Les quaternions naquirent au XIXe siècle sous la plume de Sir William Rowan Hamilton, en octobre 1843 plus exactement. Il décrivit cette découverte dans ses mémoires ainsi :

> *"Je me promenais avec Lady Hamilton sur le pont Brougham [Dublin] et cette dernière me parlait de pensées personelles d'une très profonde signification [...]. Quand soudainement le circuit galvanic de la pensée se ferma et les équations principales des quaternions se présentèrent à moi exactement comme je les utilise encore maintenant..."*

Hamilton, irlandais, était astronome, titulaire à 22 ans de la chaire d'astronomie à l'Académie Royale de Dublin. Très tôt il se rendit connu pour ses travaux en optique géométrique et en mécanique analytique (ou mécanique hamiltonienne) qui est une autre manière d'aborder la mécanique classique, et qui a permis par la suite le développement du formalisme canonique en mécanique quantique.

Cette découverte des quaternions fut le fruit d'études sur l'extension du corps $\mathbb{C}$ des complexes. Ces derniers, grâce à un isomorphisme déterminé, permettent de représenter analytiquement les applications géométriques dans $\mathbb{R}^2$, comme les homothéties, les rotations, ou bien les translations. Hamilton souhaitait étendre ces notions à l'espace $\mathbb{R}^3$. Après des tentatives infructueuses sur d'éventuels "ternions", c'est-à-dire des triplets (a, b, c) (en considérant les complexes comme des couples (a, b) pour représenter $a + \boldsymbol{i}b$), Hamilton adapta ses "ternions" aux contraintes opératoires et inventa des quadruplets (a, b, c, d) qu'il nomma "quaternions".

L'étude des quaternions a donc pour vocation essentielle la représentation analytique des actions géométriques sur l'espace à 3 dimensions. Mais l'application des quaternions est beaucoup plus vaste, et sert notamment en physique pour exprimer les lois de la mécanique ou celle de l'électromagnétisme de façon globale, ainsi qu'en mécanique quantique, pour décrire le spin de l'électron par exemple ; les quaternions sont aussi utilisés en informatique, pour la création des algorithmes 3D dans les jeux vidéos, ou en mécanique spatiale pour le mouvement des satellites.

Le travail sera découpé en deux parties principales. L'objet de la première partie sera la construction proprement dite des quaternions, ainsi que l'étude de leurs propriétés essentielles, notamment l'anticommutativité. Le second chapitre traitera l'aspect géométrique des quaternions et leur structure algébrique permettant d'aboutir à une description plus simple des rotations à l'aide de produits de quaternions.

Chapitre 1

Le corps des quaternions $\mathbb{H}$

1.1 <u>Construction de $\mathbb{H}$</u> :

Pour construire les quaternions, nous allons adopter le point de vue matriciel, et étendre la méthode déjà employée pour construire $\mathbb{C}$. Rappelons que les complexes sont représentés par des matrices de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Pour construire $\mathbb{H}$, on va alors s'interesser à l'ensemble des matrices A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

où cette fois-ci, $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

On définit l'ensemble $\mathbb{H} = \left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ / \ (a, b) \in \mathbb{C}^2\right\}$ avec A comme défini ci-dessus. Il est alors aisé de vérifier que $\mathbb{H}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pour l'addition et la multiplication matricielles.

Lemme 1 $\mathbb{H}$ *est un corps non commutatif.*

En effet :

1. $\mathbb{H}$ est déjà un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc un anneau pour les restrictions des lois de compositions.

2. soit $A \in \mathbb{H}$. Il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

On a $\det A = a\bar{a} + b\bar{b} = |a|^2 + |b|^2$, donc si $A \neq 0$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ et $\det A \neq 0$ donc $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. On a donc $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \bar{a} & b \\ -\bar{b} & a \end{pmatrix}$. En posant $a' = \frac{\bar{a}}{\det A}$ et $b' = \frac{-b}{\det A}$ on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ \bar{b'} & \bar{a'} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$.

3. $\mathbb{H}$ n'est pas commutatif :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix} \text{ mais } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Lemme 2 *soit la fonction suivante :*

$$\psi : z \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

ψ est un morphisme de corps, et $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$

Tout d'abord, ψ est bien définie.

- Pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$ on a :
  1. $\psi(z+z') = \begin{pmatrix} z+z' & 0 \\ 0 & \overline{z+z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z' & 0 \\ 0 & \bar{z'} \end{pmatrix} = \psi(z) + \psi(z')$
  2. $\psi(z).\psi(z') = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z' & 0 \\ 0 & \bar{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} zz' & 0 \\ 0 & \overline{zz'} \end{pmatrix} = \psi(zz')$
- $\psi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_2 \in \mathbb{H}$
- Vérifions l'injectivité de ψ :

$$\psi(z) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} = 0 \text{ et } z = 0$$

On en conclut que ψ est bien un morphisme de corps.

Définition 1 $\mathbb{H}$ *est un sur-corps de $\mathbb{C}$ non commutatif, appelé corps des quaternions.*

Théorème 1 *Tout élement A de $\mathbb{H}$ s'écrit de manière unique $A = a.1 + bI + cJ + dK$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et les matrices $1, I, J, K$ définies ainsi :*

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{i} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix}$$

- *Existence :* on a $A = \begin{pmatrix} a + \boldsymbol{i}b & -(c + \boldsymbol{i}d) \\ \overline{c + \boldsymbol{i}d} & \overline{a + \boldsymbol{i}b} \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Donc en décomposant :

  $$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}b & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{i}b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{i}d \\ -\boldsymbol{i}d & 0 \end{pmatrix} = a.1 + bI + cJ + dK$$

- *Unicité :* si $A = a'.1 + b'I + c'J + d'K$ alors :

  $$A = \begin{pmatrix} a' + \boldsymbol{i}b' & -c' - \boldsymbol{i}d' \\ c' - \boldsymbol{i}d' & a' - \boldsymbol{i}b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \boldsymbol{i}b & -c - \boldsymbol{i}d \\ c - \boldsymbol{i}d & a - \boldsymbol{i}b \end{pmatrix}$$

  donc on a : $a = a', b = b', c = c'$ et $d = d'$.

On en arrive alors au théorème suivant, qui compile tous les résultats précédents :

Théorème 2 *$\mathbb{H}$ est un sur-corps non-commutatif de $\mathbb{C}$, dont les éléments sont de la forme $q = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et les nombres $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ vérifiant :*

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k} \text{ et } \boldsymbol{ji} = -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i} \text{ et } \boldsymbol{kj} = -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j} \text{ et } \boldsymbol{ik} = -\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$$

Il suffit juste d'identifier I_2 à 1, I à $\boldsymbol{i}$, J à $\boldsymbol{j}$ et K à $\boldsymbol{k}$.

On remarque que $q = (a + \boldsymbol{i}b) + (\boldsymbol{j}c + \boldsymbol{k}d) = A + B\boldsymbol{j}$ avec $A = a + \boldsymbol{i}b \in \mathbb{C}$ et $B = c + \boldsymbol{i}d \in \mathbb{C}$. Cela justifie le nom d'hypercomplexe parfois attribué aux quaternions. On remarquera aussi qu'il est impossible d'ordonner $\mathbb{H}$ pour que cet ensemble soit un corps ordonné, ce qui est somme toute assez logique, $\mathbb{C}$ ne l'étant déjà pas.

1.2 Opérations et conjugaison :

1.2.1 Addition et multiplication par un réel

Les opérations d'addition et de multiplication par un scalaire réel se font termes à termes : par exemple $(5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) + (\pi - \boldsymbol{j}\sqrt{2}) = \pi + 5\boldsymbol{i} + (3 - \sqrt{2})\boldsymbol{j}$, $3(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k}) = 3\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{k}$.

1.2.2 Multiplication

La multiplication entre deux quaternions se fait termes à termes en respectant l'anticommutativité et les règles propres à $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$. Ainsi pour $q = a + \boldsymbol{i}b + \boldsymbol{j}c + \boldsymbol{k}d$ et $q' = a' + \boldsymbol{i}b' + \boldsymbol{j}c' + \boldsymbol{k}d'$ on a $qq' = a_0 + \boldsymbol{i}b_0 + \boldsymbol{j}c_0 + \boldsymbol{k}d_0$ avec :

$$a_0 = aa' - (bb' + cc' + dd'), b_0 = ab' + a'b = cd' - c'd$$

$$c_0 = ac' - bd' + ca' + db' \text{ et } d_0 = ad' + bc' - cb' + a'd$$

1.2.3 Conjugaison

Comme sur $\mathbb{C}$ on peut définir la notion de conjugaison, sur chaque terme du quaternion. Ainsi :

Définition 2 *Soit $q = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On définit le conjugué de q, noté $\bar{q}$, ainsi :*

$$\bar{q} = a - b\boldsymbol{i} - c\boldsymbol{j} - d\boldsymbol{k}$$

Définition 3 *On appelle ensemble des quaternions purs l'ensemble $\boldsymbol{i}\mathbb{R} + \boldsymbol{j}\mathbb{R} + \boldsymbol{k}\mathbb{R} = \left\{a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$*

Ces deux définitions nous permettent alors de poser le théorème suivant :

Théorème 3 *soit $q \in \mathbb{H}$. On a :*

1. $\frac{q+\bar{q}}{2} \in \mathbb{R}$ *et* $\frac{q-\bar{q}}{2} \in \boldsymbol{i}\mathbb{R} + \boldsymbol{j}\mathbb{R} + \boldsymbol{k}\mathbb{R}$
2. $q \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow q = \bar{q}$
3. $q \in \boldsymbol{i}\mathbb{R} + \boldsymbol{j}\mathbb{R} + \boldsymbol{k}\mathbb{R} \Longleftrightarrow q = -\bar{q}$
4. $q \in \mathbb{H} \longmapsto \bar{q} \in \mathbb{H}$ *est un isomorphisme involutif*

Les démonstrations sont assez aisées, à calquer sur les résultats déjà vu sur $\mathbb{C}$.

1.3 Forme réduite et module :

1.3.1 Forme réduite

On peut représenter un quaternion d'une manière plus économique, ce qui allège considérablement les calculs et met en valeur des résultats interessants. En effet, il est aisé de voir que $\mathbb{H}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 (car sous-espace de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$) dont $(1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ constitue une base orthonormale directe. On peut donc séparer la composante réelle des composantes pures, et on a pour $q \in \mathbb{H}$, $q = (a, \overrightarrow{u})$ avec $\overrightarrow{u}$ vecteur de $\mathbb{R}^3$.

On a donc alors le théorème suivant :

Théorème 4 *Pour $q = (a, \overrightarrow{u}), q' = (a', \overrightarrow{v}) \in \mathbb{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :*

1. $q + q' = (a + a', \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ *et* $\lambda q = (\lambda a, \lambda \overrightarrow{u})$
2. $qq' = (aa' - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}, a\overrightarrow{v} + a'\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$
3. $\bar{q} = (a, -\overrightarrow{u})$
4. $q^2 = (a^2 - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}, 2a\overrightarrow{u})$

Avec la représentation en forme réduite, les points 1 et 3 sont aisés à vérifier. Montrons le point 2 :

En notant $\overrightarrow{u} = (b, c, d)$ et $\overrightarrow{v} = (b', c', d')$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (bc' - b'c, a'c - ac', ab' - a'b)$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = aa' + bb' + cc'$. En comparant avec la section 1.2.2, on a bien le résultat souhaité.

Grâce à cette représentation, on peut établir des relations ensemblistes interessantes :

Théorème 5

1. $x \in \mathbb{R} \longmapsto (x, 0) \in \mathbb{H}$ *est un morphisme de corps*
2. $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (0, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{H}$ *est un morphisme injectif de $\mathbb{R}$-espace vectoriel*

Pour le point 1, on retrouve un résultat déjà vu à la section 1.1. Quant au point 2, il résulte du théorème 4.

1.3.2 Module

Lemme 3 *Soit $q \in \mathbb{H}$. On a $q\bar{q} \in \mathbb{R}_+$*

En effet, pour $q = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$, on a $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Définition 4 *Soit $q = a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k} \in \mathbb{H}$. On appelle module de q le réel suivant :*

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

On remarque qu'avec la forme réduite $q = (a, \overrightarrow{u})$, la définition s'écrit $|q|^2 = a^2 + \overrightarrow{u}^2$.

Théorème 6 $|\ |$ *sur $\mathbb{H}$ est une norme.*

En effet, pour $q = (a, \overrightarrow{u}), q' = (a', \overrightarrow{v})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

- $|q| = 0 \Longleftrightarrow a^2 + \overrightarrow{u}^2 = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{et} \overrightarrow{u} = \vec{0} \Longleftrightarrow q = 0$
- $|\lambda q| = |(\lambda a, \lambda \overrightarrow{u})| = \sqrt{\lambda^2(a^2 + \overrightarrow{u}^2)} = |\lambda||q|$
- $|q + q'| = \sqrt{(a + a')^2 + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2} \leq \sqrt{a^2 + a'^2 + \overrightarrow{u}^2 + \overrightarrow{v}^2}$ donc on a bien l'inégalité de Minkowski $|q + q'| \leq |q| + |q'|$

Enfin, on a alors l'expression de l'inverse du quaternion :

Théorème 7 *Pour* $q \in \mathbb{H}^*$ *on a* $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$

Cela vient du fait que $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$.

Pour finir ce chapitre, nous avons un théorème fort interessant, notamment pour le chapitre 2.

Théorème 8 *Pour* $(q, q') \in \mathbb{H}^2$ *on a* $|qq'| = |q||q'|$

On note $q = (a, \overrightarrow{u}), q' = (a', \overrightarrow{v})$. On a $qq' = (aa' - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}, a\overrightarrow{v} + a'\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$

Alors $|q|^2|q'|^2 = (a^2 + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u})(a'^2 + \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{v}) = (aa')^2 + a^2||\overrightarrow{v}||^2 + a'^2||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2.||\overrightarrow{u}||^2$

Et $|qq'|^2 = (aa')^2 + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 + a^2||\overrightarrow{v}||^2 + a'^2||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2 \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})^2$, c'est-à-dire $|qq'|^2 = (aa')^2 + a^2||\overrightarrow{v}||^2 + a'^2||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{u}||^2||\overrightarrow{v}||^2(\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})^2 + \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})^2) = |q|^2 + |q'|^2$.

Ce dernier théorème a aussi un intérêt arithmétique : il permet de démontrer que *tout entier naturel est la somme de 4 carrés.*

Chapitre 2

L'algèbre $\mathbb{H}$, géométrie

2.1 Structure algébrique :

On sait déjà que $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 4. Mais grâce à la multiplication sur les quaternions, on peut définir une algèbre.

Théorème 9 $(\mathbb{H},+,.)$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre de dimension 4, dont la multiplication interne est bilinéaire mais anti-commutative.* $(1,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ *forme la base canonique de* $\mathbb{H}$*.*

On a déjà vu grâce au chapitre 1 que $\mathbb{H}$ est un anneau (car sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4.

La multiplication est donc bien bilinéaire puisque interne, mais anti-commutative (la forme réduite d'un quaternion met bien cette propriété en évidence). Comme la multiplication par un scalaire s'identifie à la multiplication interne par un quaternion $\lambda + 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$, elle est bien associative sur la multiplication interne.

Enfin, $(1,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ forme bien une base de $\mathbb{H}$ d'après le théorème 1.

Nous sommes en mesure de définir un produit scalaire sur $\mathbb{H}$, afin de le munir d'une structure d'espace euclidien ; cela permettra de faire le lien avec les rotations.

Définition 5 *On définit sur* $\mathbb{H}$ *le produit scalaire suivant :*

$$(q,q') \in \mathbb{H}^2 \longmapsto < q,q' >= aa' + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}$$

pour $q = (a,\overrightarrow{u})$ *et* $q' = (a',\overrightarrow{v})$.

C'est bien un produit scalaire, car on fait le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ sur les composantes vectorielles. On a ainsi :

Théorème 10 $\mathbb{H}$ *est un espace euclidien dont le module est une norme euclidienne, dérivant du produit scalaire décrit ci-dessus. De plus,* $(1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ *est une base othonormale de* $\mathbb{H}$*.*

En effet, $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel de dimension finie, et muni d'un produit scalaire. De plus, si on examine la norme dérivant de ce produit scalaire, on a pour $q \in \mathbb{H}, q = (a, \overrightarrow{u}) : ||q||^2 = a^2 + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = |q|^2$. On a bien le rśultat désiré. Enfin, on a $|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = \sqrt{(-1)^2} = 1$, et $< \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} >=< \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} >=< \boldsymbol{k}, \boldsymbol{j} >= 0$ par identification à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2.2 Les ensembles géométriques de $\mathbb{H}$:

2.2.1 Le sous-espace $\mathcal{P}$ des quaternions purs

On a déjà rencontré cet ensemble dans le chapitre 1. On peut le munir d'une structure d'espace vectoriel, grâce au théorème 5 : $\mathcal{P}$ est l'image réciproque de $\mathbb{R}^3$ par un isomorphisme déterminé. Ainsi, on peut identifier chaque vecteur de $\mathbb{R}^3$ à un élément de $\mathcal{P}$, ce qui va nous permettre d'effectuer des opérations sur des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ par le biais de la structure de corps de $\mathbb{H}$.

2.2.2 Le groupe des quaternions unités

Définition 6 *On appelle quaternion unité un quaternion de norme 1 (ie son module vaut 1).*

On considère alors l'ensemble des quaternions de norme 1. On le note $\mathcal{G}$.
$\mathcal{G} = \{q \in \mathbb{H} \ , \ |q| = 1\}$.

Théorème 11 $\mathcal{G}$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{H}^\times, .)$.

En effet, on a :
- $1 \in \mathcal{G}$
- pour $(q, q') \in \mathcal{G}$ on a $|qq'| = |q||q'|$ d'après le théorème 8. Donc $|qq'| = 1$ et $qq' \in \mathcal{G}$.
- si on a $q \in \mathcal{G}$ alors $q^{-1} = \bar{q}$ et $|\bar{q}| = |q| = 1$ donc $q^{-1} \in \mathcal{G}$

Ces quaternions sont ceux qui vont nous interesser le plus, car ils vont nous permettre de représenter les rotations de $\mathbb{R}^3$. Mais pour cela, il convient de décrire plus explicitement $\mathcal{G}$, c'est-à-dire de décrire la forme de ses éléments.

Théorème 12 *Soit $q \in \mathcal{G}$. Alors il existe un réel θ (unique à 2π près) et un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ tels que :*

$$q = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u})$$

En effet, en notant $q = (a, \overrightarrow{v})$: on pose $b = ||\overrightarrow{v}||$ et $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{b}$, on a alors $q = (a, b\overrightarrow{u})$ avec $a^2+b^2 = 1$ car q est unitaire. On peut alors poser $a = \cos\frac{\theta}{2}$ et $b = \sin\frac{\theta}{2}$ et on a le résultat attendu.

2.3 Automorphismes de $\mathcal{P}$:

2.3.1 Description

On va s'interesser maintenant à la description des rotations en dimension 3 par les quaternions.

Théorème 13 *Soit $q \in \mathcal{G}$, c'est-à-dire un quaternion de norme 1.*

L'application $\phi : x \in \mathbb{H} \longmapsto qx\bar{q} \in \mathbb{H}$ est un isomorphisme orthogonal de $\mathbb{H}$

Tout d'abord, ϕ est bien une application linéaire : pour $x, x' \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\phi(x+x') = q(x+x')\bar{q} = (qx+qx')\bar{q} = qx\bar{q} + qx'\bar{q} = \phi(x) + \phi(x')$$

$$\phi(\lambda x) = \lambda qx\bar{q} = \lambda\phi(x)$$

Ensuite, on a bien $\phi \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$: on a $|\phi(x)| = |qx\bar{q}| = |q||x||\bar{q}| = |x|$ car q est unitaire.

En appliquant ϕ sur $\mathcal{P}$ on obtient alors un automorphisme orthogonal qui laisse cet ensemble invariant (les calculs le montrent). Cette application va alors être la représentation d'une certaine rotation dans $\mathbb{R}^3$.

Théorème 14 *Soit $q = (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\overrightarrow{u}) \in \mathcal{G}$. On identifie $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{P}$. Alors l'application*

$$\phi : \overrightarrow{v} \in \mathcal{P} \longmapsto q\overrightarrow{v}\bar{q} \in \mathcal{P}$$

est la rotation d'axe dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et d'angle θ.

On reprend les notations de l'énoncé du théorème et on pose $a = \cos\frac{\theta}{2}, b = \sin\frac{\theta}{2}$. Alors on a pour $\overrightarrow{v} \in \mathcal{G}$:
$\phi(\overrightarrow{v}) = q\overrightarrow{v}\bar{q} = (a, b\overrightarrow{u})\overrightarrow{v}(a, -b\overrightarrow{u}) = (-b < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >, a\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})(a, -b\overrightarrow{u})$

Donc $\phi(\overrightarrow{v}) = (0, b^2 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > \overrightarrow{u}+a^2\overrightarrow{v}+ab\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}-b(a\overrightarrow{v}+b\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{u}$.

D'où $\phi(\overrightarrow{v}) = b^2 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > \overrightarrow{u} + a^2\overrightarrow{v} + 2ab\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} - b^2(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{u}$ et $\phi(\overrightarrow{v}) = 2b^2 < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > \overrightarrow{u} + (a^2 - b^2)\overrightarrow{v} + 2cs\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ par la formule du double produit vectoriel.

En remplaçant a et b par leurs valeurs respectives on a :

$$\phi(\overrightarrow{v}) = \cos\theta\overrightarrow{v} + \sin\theta\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}+ < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > (1 - \cos\theta)\overrightarrow{u}$$

On a bien la rotation attendue.

On constate alors que toute appplication de $SO_3(R)$ peut être identifiée à un quaternion de norme 1.

En fait, on a un isomorphisme d'algèbre : $\mathcal{G} \cong \; SO_3(\mathbb{R})$ et donc la composée de deux rotations s'exprime par le produit de deux quaternions unitaires.

2.3.2 Deux figures

Dans la figure suivante, le point V représente un quaternion pur, dont le module est tracé en rouge.

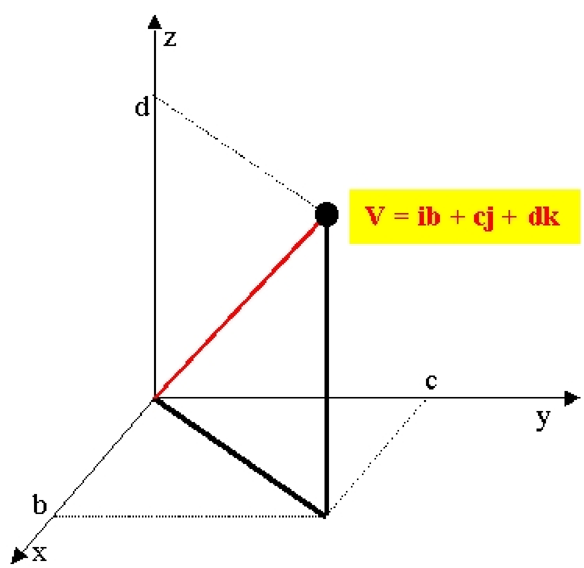

Fig. 2.1: Reprsentation des quaternions purs dans $\mathbb{R}^3$

Sous l'action de la rotation d'angle θ et de vecteur directeur $\overrightarrow{k}$, V se transforme en V' ce qui est modélisé par l'action du quaternion Q sur le

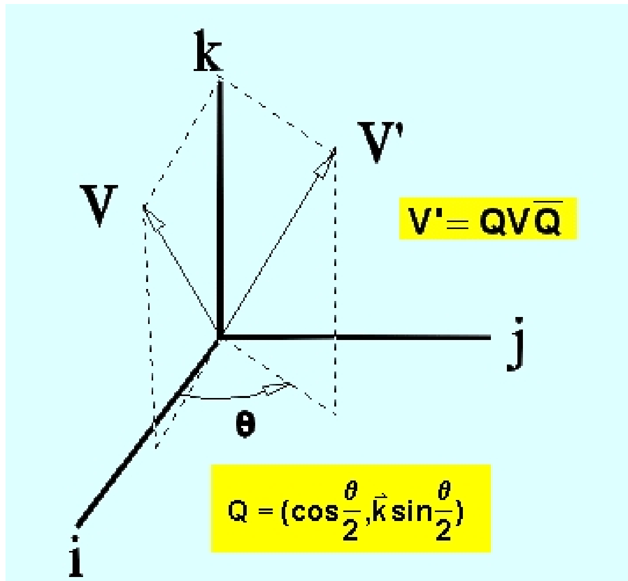

Fig. 2.2: Action d'un quaternion pur sur un vecteur de $\mathbb{R}^3$

quaternion V représentant le point V.

Table des matières