

Le théorème de représentation de Riesz

Adjoint d'un endomorphisme en dimension infinie

Julien Baglio

Algèbre linéaire

Le but de cet article est de démontrer le théorème fondamental dit "de représentation de Riesz", qui permet de montrer l'existence d'adjoint en dimension infinie, pour des endomorphismes continues sur un espace hilbertien. Avant d'énoncer et de démontrer le théorème proprement dit, nous faisons un rappel de définition, ainsi qu'une première partie sur la projection d'un vecteur sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert.

Définition 1 *Un espace hilbertien (ou de Hilbert) est un espace vectoriel normé complet dont la norme dérive d'un produit scalaire (généralement, le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

Dans toute la suite de l'article, H sera un espace hilbertien de dimension infinie, et $(x, y) \in H^2 \mapsto \langle x, y \rangle$ un produit scalaire sur H .

1 Projection sur un convexe fermé

1.1 Le théorème de projection

Théorème 1 *Soit $C \subset H$ une partie convexe fermée non vide. Pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $d(x, C) = \|x - y\|$. $y = x_C$ est appelé projeté orthogonal de x sur C .*

Démonstration

Pour tout $z \in C$ on a $\|x - z\| \geq d(x, C)$ (qui existe, puisque c'est l'inf d'une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0). Par définition, il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$d(x, C) \leq \|x - x_n\| \leq d(x, C) + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrons que (x_n) est de Cauchy ; ainsi, H étant hilbertien c'est un espace complet, donc on pourra conclure quant à la convergence de la suite (x_n) :

Soit $p, q \in \mathbb{N}$, et notons $\delta = d(x, C)$.

H étant un espace de Hilbert, l'identité du parallélogramme est vérifiée, donc

$$2(\|x - x_p\|^2 + \|x - x_q\|^2) = \|(x - x_p) - (x - x_q)\|^2 + \|(x - x_p) + (x - x_q)\|^2$$

Donc on a $2(\|x - x_p\|^2 + \|x - x_q\|^2) = \|x_p - x_q\|^2 + 4\|x - \frac{x_p + x_q}{2}\|^2$.

Or C est convexe, donc $\frac{x_p + x_q}{2} \in C$, donc $\|x - \frac{x_p + x_q}{2}\|^2 \geq \delta^2$.

En réorganisant, on a donc $\|x_p - x_q\|^2 \leq 2(\|x - x_p\|^2 - \delta^2 + \|x - x_q\|^2 - \delta^2)$. Or il apparaît par comparaison que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x - x_p\| = \delta$, donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x - x_p\|^2 = \delta^2$. D'où pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq n_0$ $|\|x - x_p\|^2 - \delta^2| \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$.

D'où pour $p, q \geq n_0$ on a $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$, donc (x_n) est bien une suite de Cauchy, donc elle converge vers $y \in \overline{C}$ car H est complet. Mais C est fermé, donc $C = \overline{C}$ et $y \in C$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - x_n\| = \|x - y\|$ par continuité de l'application norme, donc par unicité de la limite, $\|x - y\| = \delta = d(x, C)$.

Enfin, si on prend $y, z \in C$ vérifiant $\|x - y\| = \|x - z\| = d(x, C)$: on construit une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $c_n = y$ si n est pair, $c_n = z$ si n est impair. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|x - c_n\| = \delta$ donc avec le même raisonnement que ci-dessus, cela implique la convergence de la suite (c_n) , et donc $y = z$. Il y a donc unicité du projeté orthogonal, ce que l'on souhaitait démontrer.

Proposition 1 *Soit C un convexe fermé non vide de H , $x \in H$ quelconque. Alors il existe une unique $y \in C$ vérifiant $\forall c \in C, \langle c - y, x - y \rangle \leq 0$, et $y = x_C$ projection orthogonale de x sur C (c'est une caractérisation de x_C)*

Démonstration

- Si il existe $y \in C$ vérifiant l'hypothèse de la proposition, pour $z \in C$ on a :
 $\|z - x\|^2 = \|z - y + y - x\|^2 = \|z - y\|^2 + \|y - x\|^2 - 2\langle z - y, y - x \rangle$. Donc l'hypothèse assure que $\|z - x\|^2 \geq \|y - x\|^2$ donc cela étant vrai pour tout $z \in C$, $\|y - x\| \leq d(x, C)$; mais $y \in C$ donc $\|y - x\| \geq d(x, C)$ donc finalement $\|x - y\| = d(x, C)$. Ayant unicité du projeté orthogonal d'après le théorème 1, on a bien $y = x_C$.
- Vérifions maintenant que x_C vérifie bien l'hypothèse de l'énoncé.
On a pour tout $z \in C$ $\|x - z\| \geq \|x - x_C\|$ et

$$\|x - z\|^2 = \|x - x_C + x_C - z\|^2 = \|x - x_C\|^2 - 2\langle x - x_C, x_C - z \rangle + \|x_C - z\|^2$$

Donc $2\langle z - x_C, x - x_C \rangle \leq \|z - x_C\|^2$. Nous avons presque le résultat attendu, mais il nous faut se débarrasser du membre de droite. Pour cela, on paramètre le problème : fixons $z_0 \in C$, ayant C convexe on a pour tout $\lambda \in [0, 1]$ $z = \lambda z_0 + (1 - \lambda)x_C \in C$.

D'où en appliquant le petit calcul ci-dessus, ayant $z - x_C = \lambda(z_0 - x_C)$, nous avons $2\lambda\langle z_0 - x_C, x - x_C \rangle \leq \lambda^2\|z_0 - x_C\|^2$. Pour $\lambda \in]0, 1]$ cela donne $2\langle z_0 - x_C, x - x_C \rangle \leq \lambda\|z_0 - x_C\|^2$. Avec $\lambda \rightarrow 0^+$ on a bien le résultat attendu.

1.2 Applications importantes du théorème de projection

Lemme 1 *Pour toute partie A de H , $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H .*

Démonstration

Le fait que $A^\perp$ soit un sous-espace est évident. Montrons qu'il est fermé :

Si on prend $y \in \overline{A^\perp}$ il existe une suite (y_n) d'éléments de $A^\perp$ qui converge vers y . La fonction $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; or $\forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}$ on a $\langle x, y_n \rangle = 0$ donc avec $n \rightarrow +\infty$ on a $\langle x, y \rangle = 0$ par continuité, donc $y \in A^\perp$: $A^\perp$ est bien un fermé.

Nous avons maintenant deux petites propositions très importantes pour la deuxième section de cet article, et qui généralisent des résultats déjà vus en dimension finie.

Proposition 2 *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H . On a*

1. $F \oplus F^\perp = H$
2. *Pour tout $x \in H$, on a $x_F = p_F(x)$ projection orthogonale sur F ; ainsi $x - x_F \in F^\perp$*
3. $F^{\perp\perp} = F$

Démonstration

1+2 : le fait que F et $F^\perp$ sont en somme directe ne pose aucun problème. Montrons que pour $x \in H$ il existe $(y, z) \in F \times F^\perp$ tel que $x = y + z$.

F est un sous-espace vectoriel, c'est donc en particulier un convexe ; étant de plus fermé, d'après le théorème 1, il existe un unique $x_F \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - x_F\|$. Notons $y = x - x_F$; d'après la proposition 1, on a pour tout $f \in F$ $\langle f - x_F, y \rangle \leq 0$. Soit $y_0 \in F$ fixé. Comme F est un espace vectoriel, $y_0 + x_F \in F$ et $-y_0 \in F$: cela implique $\langle y_0, y \rangle \leq 0$ et $\langle -y_0, y \rangle \leq 0$ donc $\langle y_0, y \rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y_0 \in F$, on a bien $y = x - x_F \in F^\perp$ donc les affirmations 1 et 2 sont démontrées.

3 : On a toujours $F \subset F^{\perp\perp}$. Montrons l'inclusion inverse.

On a d'après l'affirmation 1 de cette proposition que $H = F \oplus F^\perp$. Donc pour $x \in F^{\perp\perp}$ il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_F + x_{F^\perp}$. Or l'on a $\|x_{F^\perp}\|^2 = \|x - x_F\|^2$ donc $\|x_{F^\perp}\|^2 = \langle x - x_F, x - x_F \rangle = \langle x, x - x_F \rangle - \langle x_F, x - x_F \rangle$.

Ayant $x \in F^{\perp\perp}, x - x_F \in F^\perp$ on a $\langle x, x - x_F \rangle = 0$; de même, comme $x_F \in F$ et $x - x_F \in F^\perp$, $\langle x_F, x - x_F \rangle = 0$. Donc $\|x_{F^\perp}\| = 0$ donc $x_{F^\perp} = 0$: $x \in F$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 3 *Soit F un sous-espace quelconque de H . Alors on a :*

1. $\overline{F} = F^{\perp\perp}$
2. F dense dans $H \iff F^\perp = \{0\}$

Démonstration

1. On a toujours $F \subset F^{\perp\perp}$; donc $\overline{F} \subset \overline{F^{\perp\perp}}$. Ainsi, le lemme 1 affirmant que $F^{\perp\perp}$ est un fermé, on a $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$.

On a toujours $F \subset \overline{F}$; par orthogonalité, on a donc $\overline{F}^{\perp} \subset F^{\perp}$ donc en recomposant, $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp}$. Or $\overline{F}$ est un fermé, donc l'affirmation 3 de la proposition 2 nous donne $\overline{F} = \overline{F}^{\perp\perp}$. Ainsi, $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}$. On a donc bien par double inclusion $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.

2. On a F dense $\iff \overline{F} = H \iff F^{\perp\perp} = H$ d'après ci-dessus.
Or l'affirmation 1 de la proposition 2 nous donne $H = F^{\perp} \oplus F^{\perp\perp}$ donc F dense $\iff F^{\perp} = \{0\}$.

2 Théorème de représentation, adjoint en dimension finie

Théorème 2 (de représentation de Riesz) Soit H' le dual topologique de H (c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur H).

Soit $a \in H$, on note $\phi_a : x \in H \mapsto \langle a, x \rangle \in \mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors $\phi : a \in H \mapsto \phi_a \in H'$ est bien définie, et c'est un isomorphisme de H sur H' .

Démonstration

Tout d'abord, ϕ est bien définie car l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure la continuité de la fonction ϕ_a ($a \in H$ fixé).

ϕ est bien linéaire (vérification aisée).

ϕ est injective : si $\phi_a = 0$ alors en particulier, $\phi_a(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2 = 0$ donc $a = 0$ et $\ker \phi = \{0\}$.

Montrons que ϕ est surjective. Soit $L \in H'$. Si $L = 0$ $L = \phi(0)$ et c'est bon ; sinon, notons $E = \ker L$, E est un hyperplan de H .

Ayant $E = L^{\perp}(\{0\})$ et L continue, E est un fermé de H . D'après la proposition 2, $E \oplus E^{\perp} = H$. Ayant L différente de l'application nulle, il existe $u \in E^{\perp}$ tel que $L(u) \neq 0$. On a en fait $E = \text{Vect } a$: si on prend $x \in E^{\perp}$ et si on note $w = x - \frac{L(x)}{L(a)}a$ on a $L(w) = L(x) - \frac{L(x)}{L(a)}L(a)$ par linéarité, donc $L(w) = L(x) - L(x) = 0$: $w \in E$. Or $w \in E^{\perp}$ par construction, donc $w \in E \cap E^{\perp} = \{0\}$ d'où $x = \frac{L(x)}{L(a)}a$: $x \in \text{Vect } a$ et par double inclusion (l'autre inclusion étant évidente) on a bien $E^{\perp} = \text{Vect } a$.

On a donc pour tout $x \in H$ $x = \frac{L(x)}{L(a)}a + x_E$, $x_E \in E$. Notons maintenant $b = \frac{L(a)}{\|a\|^2}a$. On a

pour tout $x \in H$

$$\langle x, b \rangle = \langle \frac{L(x)}{L(a)}a + x_E, \frac{L(a)}{\|a\|^2} \rangle = \frac{L(x)}{L(a)} \frac{L(a)}{\|a\|^2} \langle a, a \rangle = L(x)$$

car $x_E \in E$ et $a \in E^\perp$. D'où l'on a $L = \phi_b$ et ϕ est bien surjective.

En conclusion, ϕ est bien un isomorphisme, il y a donc isomorphisme entre H et son dual topologique.

Ce théorème, puissant, nous permet donc de pouvoir définir un adjoint dans un espace de Hilbert pour les endomorphismes continus, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 4 Soit $u \in \mathcal{L}_c(H)$ endomorphisme continu de H .

Il existe un unique $v \in \mathcal{L}_c(H)$ tel que pour tout $(x, y) \in H^2$ on ait

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

v est l'adjoint de u , noté u^* , et de plus on a $\|u\| = \|u^*\|$.

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{L}_c(H)$. Fixons $y \in H$, et notons $\psi_y : x \in H \mapsto \langle u(x), y \rangle$. C'est une forme linéaire (aisé à démontrer) et continue en tant que composée de fonctions continues (le produit scalaire est bien continu, u est continu par hypothèse). Donc $\psi_y \in H'$ le dual topologique de H : le théorème de représentation de Riesz permet d'affirmer l'existence d'un unique $v(y) \in H$ tel que $\langle u(x), y \rangle = \psi_y(x) = \langle v(y), x \rangle$.

v est bien une application linéaire : si on prend $y, z \in H$, on a $\psi_{y+z}(x) = \langle u(x), y+z \rangle = \langle u(x), y \rangle + \langle u(x), z \rangle$ donc $\psi_{y+z}(x) = \langle x, v(y) \rangle + \langle x, v(z) \rangle = \langle x, v(y) + v(z) \rangle$. Par unicité dans le théorème 2, on a bien $v(y+z) = v(y) + v(z)$. De même, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on a aussi $v(\lambda y) = \lambda v(y)$ et on a bien $v(0) = 0$.

Si on notait v' une application de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant les hypothèses de la proposition 4, à y fixé on aurait $\psi_y(x) = \langle x, v'(y) \rangle$ donc l'unicité imposée par le théorème de Riesz nous donne $v'(y) = v(y)$, donc v est unique.

Enfin, v est bien continue : on a $\langle v(y), v(y) \rangle = \langle y, u(v(y)) \rangle$, donc $\|v(y)\|^2 \leq \|u(v(y))\| \cdot \|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et la continuité de u nous donne

$$\|v(y)\|^2 \leq \|u\| \cdot \|v(y)\| \cdot \|y\|$$

D'où pour $y \notin \ker v$ on peut diviser par $\|v(y)\|$ et l'on a $\|v(y)\| \leq \|u\| \cdot \|y\|$, inégalité encore valable pour $v(y) = 0$. On a donc en particulier pour $\|y\| \leq 1$ $\|v(y)\| \leq \|u\|$ donc v est bornée sur la boule fermée unité : ayant v linéaire, on a donc v continue, et $\|v\| \leq \|u\|$.

On note maintenant $v = u^*$. On remarque que l'unicité imposée par la proposition 4 (unicité qui a été démontrée) impose $(u^*)^* = u$; ainsi, le raisonnement effectué ici avec u se refait avec u^* qui est bien élément de $\mathcal{L}_c(H)$, et l'on a $|||u^*||| \leq |||(u^*)^*|||$ c'est-à-dire $|||u^*||| \leq |||u|||$. On a donc bien par double inégalité $|||u||| = |||u^*|||$.

Ainsi s'achève cet article.

Références

- [1] X. GOURDON. *Les maths en tête - Analyse*. Éditions Ellipses, 1994, ISBN 2-7298-4449-X, ch. Annexe B, pp. 401–402.