

Théorème de Riesz

Topologie des espaces vectoriels normés

MP / L2 MIAS

Théorème 1 Pour $(E, \|\cdot\|)$ espace vectoriel normé, on a :

La boule fermée unité est un compact $\iff (E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie.

Si E est de dimension finie, on a alors $B_f(0_E, 1)$ compact car c'est un fermé borné de E .

Montrons que $B_f(0_E, 1) \Rightarrow E$ de dimension finie.

On raisonne par l'absurde et on suppose E de dimension infinie. On a :

$$B_f(0_E, 1) \subset \bigcup_{x \in B_f(0_E, 1)} B(x, 1).$$

Or $B_f(0_E, 1)$ est un compact donc d'après la propriété de Borel-Lebesgue :

$$\exists (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in B_f(0_E, 1)^n \text{ avec } B_f(0_E, 1) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1).$$

Soit $F = \text{Vect}_{1 \leq i \leq n}(x_i)$. F est sous-espace vectoriel de dimension finie, c'est donc un fermé.

Comme E est de dimension infinie, il existe $x \in E / x \notin F$.

D'où $\exists y \in F / \|x - y\| = d(x, F)$.

On note $x_0 = \frac{x - y}{\|x - y\|}$; $x_0 \in B_f(0_E, 1)$.

Or on a $0_E \in F$, donc on a $d(x_0, F) = \inf_{z \in F} \|x_0 - z\| \leq \|x_0 - 0\| = 1$.

Or, pour $z \in F$ on a :

$$\begin{aligned} \|x_0 - z\| &= \left\| \frac{x - y}{\|x - y\|} - z \right\| \\ &= \frac{1}{\|x - y\|} \cdot \|x - y - \|x - y\| \cdot z\| \\ &= \frac{1}{\|x - y\|} \cdot \|x - (y + z \cdot \|x - y\|)\| \\ &\geq \frac{d(x, F)}{\|x - y\|} = \frac{\|x - y\|}{\|x - y\|} = 1. \end{aligned}$$

Donc on en déduit que $\forall z \in F, \|x_0 - z\| \geq 1$. Or on avait déjà $d(x_0, F) \leq 1$ donc $d(x_0, F) = 1$.

Donc $\forall 1 \leq i \leq n, \|x_0 - x_i\| \geq 1$.

On a alors $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1)$.

Or on a $B_f(0_E, 1) \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1)$

Donc on en déduit que $x_0 \notin B_f(0_E, 1)$ ce qui est une contradiction.

Donc on a $B_f(0_E, 1)$ non compacte.