Théorème de Riesz

Topologie des espaces vectoriels normés

MP / L2 MIAS

Théorème 1 *Pour $(E, || \, ||)$ espace vectoriel normé, on a :*

La boule fermée unité est un compact $\iff (E, || \, ||)$ est de dimension finie.

Si E est de dimension finie, on a alors $B_f(0_E, 1)$ compact car c'est un fermé borné de E.

Montrons que $B_f(0_E, 1) \Rightarrow E$ de dimension finie.

On raisonne par l'absurde et on suppose E de dimension infinie. On a :

$$B_f(0_E, 1) \subset \bigcup_{x \in B_f(0_E,1)} B(x, 1).$$

Or $B_f(0_E, 1)$ est un compact donc d'après la propriété de Borel-Lebesgue :

$$\exists \; (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in B_f(0_E, 1)^n \text{ avec } B_f(0_E, 1) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1)).$$

Soit $F = \mathrm{Vect}_{1 \leq i \leq n}(x_i)$. F est sous-espace vectoriel de dimension finie, c'est donc un fermé.

Comme E est de dimension infinie, il existe $x \in E \; / \; x \notin F$.

D'où $\exists \; y \in F \; / \; ||x - y|| = \mathrm{d}(x, F)$.

On note $x_0 = \dfrac{x - y}{||x - y||}$; $x_0 \in B_f(0_E, 1)$. Pour tout $z \in F$ on a :

$$\begin{aligned}
||x_0 - z|| &= ||\frac{x - y}{||x - y||} - z|| \\
&= \frac{1}{||x - y||}.||x - y - ||x - y||.z|| \\
&= \frac{1}{||x - y||}.||x - (y + z.||x - y||)|| \\
&\geq \frac{\mathrm{d}(x, F)}{||x - y||} = \frac{||x - y||}{||x - y||} = 1.
\end{aligned}$$

Donc on en déduit que $\forall z \in F$, $||x_0 - z|| \geq 1$.
Donc en particulier $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $||x_0 - x_i|| \geq 1$.

On a alors $x_0 \notin \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1)$.

Or on a $B_f(0_E, 1) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, 1))$

Donc on en déduit que $x_0 \notin B_f(0_E, 1)$ ce qui est une contradiction. L'hypothèse de départ, à savoir E de dimension finie, est ainsi fausse : l'espace E est donc bien de dimension infinie.

Merci à Régan Bussy-Socrate pour sa relecture attentive de la première version de la preuve qui contenait un passage inutile.