Le théorème de relèvement

Julien Baglio

23 mars 2004

1 Le lemme du relèvement pour une fonction C^1

Lemme 1 *On note* $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$ *la sphère unité de* $\mathbb{C}$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$, $a < b$ *et* $f : [a; b] \longrightarrow \mathrm{U}$ *de classe* C^1. *Alors il existe une fonction* $\theta : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *tel que :*

$$\forall \ t \in [a; b], \ f(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{i}.\theta(t)}$$

Démonstration :

Ayant $\forall \ t \in [a; b] \ |f(t)| = 1$ on a $2 < f(t), f'(t) >= 0$ (ayant muni $\mathbb{C}$ du produit scalaire canonique en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Alors $f(t)$ et $f'(t)$ sont deux vecteurs orthogonaux, donc l'un est image de l'autre par une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$; d'où on a $\frac{f'(t)}{\boldsymbol{i}f(t)} \in \mathbb{R}$ (on rappelle que $\forall \ t \in [a; b], \ f(t) \neq 0$ car $0 \notin \mathrm{U}$).

$$\text{Si on note } f(a) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{i}\phi_0} \text{ on pose } \theta(t) = \phi_0 + \int_a^t \frac{f'(u)}{\boldsymbol{i}f(u)} du$$

On a bien $\theta \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car $\frac{f'(u)}{\boldsymbol{i}f(u)} \in \mathbb{R} \ \forall u \in [a; b]$ et f et f' sont continues.

Si on pose $g(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{-\boldsymbol{i}.\theta(t)}$ pour $t \in [a; b]$ on a :

$g(a) = 1$ et $g'(t) = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{i}.\theta(t)}(f'(t) - \boldsymbol{i}\theta'(t)f(t)) = 0$ par définition de θ

Alors on a g constante égale à 1 d'où $f(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{i}.\theta(t)} \ \forall t \in [a; b]$

2 Le théorème de relèvement

2.1 Notion de revêtement

Définition 1 *soit X et Y deux espaces topologiques, et $p: X \longrightarrow Y$ application continue.*

p est un revêtement si et seulement si $\forall\ y \in Y$ il existe V voisinage (ouvert) de y et $(O_i)_{i\in I}$ famille d'ouverts disjoints de X tel que :

1. $p^{<-1>}(V) = \bigcup_{i\in I} O_i$
2. *$\forall\ i \in I$, p est un homéomorphisme de O_i dans V*

2.2 Le théorème

Théorème 1 *Soit X et Y deux espaces topologiques et $p: X \longrightarrow Y$ un revêtement.*

Soit $f: Z \longrightarrow Y$ une application continue, où Z est un segment de $\mathbb{R}$ ou un pavé de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x,z) \in X \times Z$ tel que $p(x) = f(z)$. Alors il existe une unique application $g \in C^0(Z,X)$ telle que :

1. $f(z) = p[g(z)]$
2. $g(z) = x$