Polynôme caractéristique d'une matrice

Algèbre linéaire MP/MP*

Lycée Henri IV

On se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on note $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Alors on a $\chi_A(X) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (a_{\sigma(i),i} - X\delta_{\sigma(i),i})$.

Les termes de degré k sont obtenus avec les permutations σ telles que $|\{i/\sigma(i) = i\}| \geq k$. Procédons par étapes :

- Si $k = n$ seule l'identité convient, et le coefficient en X^n est alors nécessairement $(-1)^n$.
- Si $k = n-1$ alors seule l'identité convient aussi, car lorsque l'on conserve $n-1$ termes sur $[|1;n|]$ et comme σ est une permutation, l'image réciproque du terme non atteint est nécessairement lui-même.
  On doit donc choisir dans $(a_{1,1} - X)(a_{22} - X)...(a_{nn} - X)$ et on a $(-1)^{n+1} \operatorname{Tr} A$ comme coefficient en X^{n-1}.

Pour les autres termes, on peut faire ainsi :

on note Γ_j le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $A = [C_1, C_2, ..., C_n]$ en colonne. On a donc :

$$A - XI_n = [C_1 - X\Gamma_1, C_2 - X\Gamma_2, ..., C_n - X\Gamma_n]$$

D'où on a la formule suivante :

$$\chi_A(X) = \det A - X \sum_{i=1}^{n} \det(C_1, ..., C_{i-1}, \Gamma_i, C_{i+1}, ..., C_n) +$$

$$\sum_{k=2}^{n-2} (-X)^k \alpha_k + (-X)^{n-1} \operatorname{Tr} A + (-X)^n$$

Les deux derniers termes sont obtenus en sachant que $\det(\Gamma_1, ..., \Gamma_n) = 1$ et que de plus l'on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \det(\Gamma_1, ..., \Gamma_{i-1}, C_i, \Gamma_{i+1}, ..., \Gamma_n) = \operatorname{Tr} A$.

Les coefficients α_k sont obtenus comme somme de termes obtenus en choisissant k fois X dans le développement du déterminant ; il y a C_n^k choix possibles et pour chacun d'eux on choisit k colonnes, soit :

$$1 \leq \phi(1) < \phi(2) < ... < \phi(k) \leq n$$

Pour l'un d'entre eux noté $M_{k,\phi}$. Alors $M_{k,\phi}$ est le déterminant obtenu en rayant dans A les colonnes d'indices $\phi(i)$ ainsi que les lignes d'indices $\phi(i)$ pour $1 \leq i \leq k$; on appelle cela un mineur principal d'ordre k, ou encore de taille $n-k$.

Le coefficient α_k est alors obtenu comme somme des mineurs principaux d'ordre k. Cela reste valable pour $k=0$ (on retrouve $\det A$) et pour $k=n-1$ (on retrouve $\operatorname{Tr} A$).

<u>Cas où $n=3$:</u>

$$\begin{vmatrix} a-X & b & c \\ d & e-X & f \\ g & h & i-X \end{vmatrix} = (a-X)(e-X)(i-X)+bfg+cdh-(e-X)gc-(i-X)db-(a-X)fh$$

D'après la règle de Sarrus. Après développement, on a donc :

$$\chi_A(X) = -X^3+X^2(a+e+i)-X[(ae-db)+(ei-fh)+(ai-ge)]+(aei-gec+bfg-hfa+cdh-idb)$$

On reconnaît bien $\det A$ comme terme constant, $\operatorname{Tr} A$ en X^2 et **le terme en facteur avec $-X$ est la trace de la comatrice de A**.

Remarque : les coefficients α_k ne dépendent que de l'endomorphisme associé à la matrice A : 2 matrices semblables ont même coefficients α_k.