Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Julien Baglio

18 août 2004

Dans l'étude des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, il est bon de savoir le résultat suivant :

Lemme 1 *Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit fermés (et dans ce cas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$), soit denses dans $\mathbb{R}$.*

On rappelle que la distinction se fait sur la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ pour le sous-groupe G.

On peut montrer que $\alpha\mathbb{Z}$ est fermé :

Si $x \in \overline{\mathbb{Z}}$ alors il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{Z}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Donc entre autres, (x_n) est de Cauchy : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n, p \geq n_0$ on ait $|x_p - x_q| < \frac{1}{2}$; or on a $x_n \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N}$ donc nécessairement $\forall\, n \geq n_0\ x_n = x_{n_0}$ et donc $x = x_{n_0} \in \mathbb{Z}$. Donc $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}$ est fermé.

Cela entraîne évidemment que $\alpha\mathbb{Z}$ est fermé, ce que l'on souhaitait pouvoir démontrer.

On a maintenant le théorème suivant sur la somme de deux sous-groupes fermés, qui donne un contre-exemple intéressant au fait que la somme de deux fermés dans un espace vectoriel normé n'est pas nécessairement un fermé.

Théorème 1 *Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on a l'équivalence suivante :*

$$\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z} \textit{ est un fermé} \iff \alpha \in \mathbb{Q}$$

<u>Démonstration :</u>

- Si $\alpha \in \mathbb{Q}$:

  On a alors $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, $q > 1$

  Soit $y \in \overline{\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}}$; alors il existe $(k_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(l_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} k_n + \alpha l_n = y$.
  D'où on a $qk_n + pl_n \longrightarrow qy$ donc comme $\mathbb{Z}$ est fermé (voir lemme) on a $qy \in \mathbb{Z}$.

  Or $p \wedge q = 1$ donc d'après le théorème de Bezout, $\exists\, u\ ,\ v \in \mathbb{Z}\ / pu + qv = 1$; donc avec $qy = k \in \mathbb{Z}$ on a $qy = pku + qkv$ donc $y = kv + \frac{p}{q}k = kv + \alpha k$. D'où $y \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ qui est fermé.

- Si $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est fermé :

  D'après le lemme 1, il est de la forme $\gamma\mathbb{Z}$ car s'il était dense, $\mathbb{R}$ serait dénombrable en tant que somme d'ensembles dénombrables, ce qui est faux.

  On a alors $0 + \alpha \times 1 = \gamma k$ et $1 + \alpha \times 0 = k'$ avec $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$. D'où l'on a $\alpha = \frac{k}{k'} \in \mathbb{Q}$.