

# Nature topologique de la somme de deux sous-ensembles

## Un petit résultat dans les espaces vectoriels topologiques

Julien Baglio

28 juillet 2006

### Résumé

Ce court article a pour but de présenter un petit résultat simple sur la nature topologique de la somme de certains sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique. Nous allons donc voir une condition suffisante sur  $A$  et  $B$  sous-ensemble d'un même espace vectoriel topologique pour que  $A + B$  soit un fermé.

**Proposition 1** *Soit  $E$  un espace vectoriel topologique quelconque. Soit  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $E$ .*

*Si  $A$  est compact et si  $B$  est fermé, alors  $A + B$  est un sous-ensemble fermé de  $E$ .*

### Démonstration

Soit  $u \in \overline{A + B}$ . Pour tout voisinage  $V$  de  $u$ , on note  $S(V) = \{a \in A / \exists b \in B, a + b \in V\}$ .

On a  $S(V) \neq \emptyset$  puisque  $V \cap (A + B) \neq \emptyset$ . De plus, on vérifie sans peine que pour tout voisinage  $V$ ,  $W$  on a  $S(V \cap W) \subset \overline{S(V) \cap S(W)}$ . On peut ainsi construire une suite décroissante de fermés non vide en prenant l'adhérence  $\overline{S(V)}$  dans  $A$ .

Par compacité de  $A$ , on a alors une intersection non vide de ces fermés. Soit  $a$  un élément de cette intersection.

Il s'agit maintenant de montrer que  $u - a \in B$ , or ayant  $B$  fermé cela revient à montrer que  $u - a \in \overline{B}$ . Pour cela, on introduit  $V$  voisinage de  $u - a$ , et pour pouvoir manipuler sans problèmes des sommes d'ouverts on introduit un voisinage symétrique de 0 noté  $W$ , de telle sorte que  $u - a + W + W \subset V$ ; cela est tout à fait possible du fait de la nature vectorielle de notre espace topologique.

Par définition,  $u + W$  est un ouvert contenant  $u$  donc c'est un voisinage de  $u$ ; alors l'on a, d'après la définition de  $a$ ,  $a \in \overline{S(u + W)}$  ce qui signifie qu'il existe  $v \in S(u + W)$  tel que  $v \in a + W$  voisinage de  $a$ . Ayant  $W$  symétrique, on peut réécrire cela comme étant  $v \in S(u + W)$  et  $a - v \in W$ . On exploite la définition de  $S(u + W)$  : il existe  $b \in B$  tel que  $v + b \in u + W$ . On a donc  $u - a - b = u - (v + b) - (a - v) \in W + W$  d'après la phrase précédente. On en déduit que  $b \in u - a + W + W \subset V$  en utilisant de nouveau le caractère symétrique de  $W$ , donc  $B \cap V \neq \emptyset$ , ce que l'on souhaitait démontrer.

On a donc achevé la démonstration, puisque l'on vient de montrer que  $\overline{A + B} \subset A + B$ .