Deuxième théorème de Dini

Alexandre Maurel [XM96] ; version $\LaTeX$ Julien Baglio[MP04]

30 mars 2004

Ce présent document a pour but de présenter le deuxième théorème de Dini, ainsi qu'une application de ce dernier dans un petit exemple.

1 Le deuxième théorème de Dini

Théorème 1 *Soit une suite d'applications* $(f_n) \in C^0([a;b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ *telle que* (f_n) *converge simplement sur* $[a;b]$ *vers une application* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue.*

Si $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n *est croissante,* (f_n) *converge uniformément sur* $[a;b]$ *vers* f.

Ayant f continue sur un compact, elle y est uniformément continue d'après le théorème de Heine :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta > 0\ /\ \forall\ (x,x') \in [a;b]\ ,\ |x-x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(x')| \leq \varepsilon$$

On introduit alors une subdivision de $[a;b]$ bien adaptée à l'uniforme continuité de f :

$$\sigma = (a_0 = a < a_1 < a_2 < ... < a_n = b) \text{ avec } \forall\ i \in [|0,n-1|]\ |a_i - a_{i-1}| \leq \eta$$

Les (a_i) étant en nombre fini, la convergence uniforme sur $[a;b]$ équivaut à la convergence uniforme sur chacun des $[a_{i-1};a_i]$, $\forall i \in [|0;n-1|]$.

On fait donc l'étude sur $[a_{i-1};a_i]$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [a_{i-1};a_i]$ on écrit :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)|$$

On va majorer chacun des trois termes :

1. Pour le troisième terme, on utilise l'uniforme continuité de f : $|x - a_i| \leq \eta$ car la subdivision est adaptée et donc $|f(a_i) - f(x)| \leq \varepsilon$
2. Pour le second terme, on utilise la convergence simple : ayant fixé a_i on a $\lim_{n\to\infty} f_n(a_i) = f(a_i)$ c'est-à-dire :
$$\exists\ N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N\ ,\ |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$$
3. Pour le premier terme, on va utiliser l'hypothèse de croissance des f_n, hypothèse non encore utilisée : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a_i; a_{i+1}]$ $f_n(a_i) \leq f_n(x) \leq f_n(a_{i+1})$, donc on a $|f_n(x) - f_n(a_i)| \leq |f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i)|$
On utilise ensuite la convergence simple des f_n vers f ainsi que l'uniforme continuité de cette dernière :
$$|f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i)| \leq |f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1})| + |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(a_i) - f_n(a_i)|$$
Le premier et le dernier terme se maîtrisent grâce à la convergence simple : $\exists\ N' \in \mathbb{N}\ /\forall n \geq N'\ |f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1})| + |f(a_i) - f_n(a_i)| \leq \varepsilon$.
Le terme du milieu se maîtrise à l'aide de l'uniforme continuité de f, ayant la subdivision σ adaptée : $|f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq \varepsilon$.
D'où on a : $\exists\ N' \in \mathbb{N}\ /\forall\ n \geq N'\ |f_n(x) - f_n(a_i)| \leq 2\varepsilon$.

On conclut sur $[a_i; a_{i+1}]$: on choisit $N_i^0 = \mathrm{Max}(N, N')$, ainsi on a :
$$\forall\ \varepsilon' > 0, \text{ avec } \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{4}\ \exists N_0 \in \mathbb{N}\ /\forall\ n \geq N_0\ \forall x \in [a_i; a_{i+1}]\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$
D'où la convergence uniforme des (f_n) vers f sur $[a_i; a_{i+1}]$.

<u>Pour conclure sur tout $[a; b]$</u> on prend $N = \mathrm{Max}_{0 \leq i \leq n-1} N_i^0$ et on a :
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\forall\ n \geq \mathbb{N}\ \forall x \in [a; b]\ ,\ \exists\ i_0 \in [|0; n-1|]$$
$$\text{tel que } x \in [a_{i_0}; a_{i_0+1}] \text{ et } n \geq N \geq N_{i_0}^0 \text{ donc } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$
On a donc bien convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $[a; b]$.

2 Un exemple d'application du théorème de Dini

Exemple 1 *Soit une suite d'applications $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^1([0;1], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que (ϕ_n) converge simplement vers ϕ sur $[0;1]$ et on suppose que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, ϕ_n est convexe. Montrer que :*
- *ϕ est convexe*
- *On n'a pas toujours convergence uniforme de la suite (ϕ_n)*
- *$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < b < 1$ on a convergence uniforme de ϕ_n vers ϕ sur $[a; b]$*