

Éléments de connexité

Julien Baglio

11 avril 2004

Ce petit article vise à démontrer un théorème fondamental en connexité.

Théorème 1 *Soit $f : X \longrightarrow Y$ continue avec X et Y deux espaces topologiques. Si X est connexe alors $f(X)$ l'est aussi.*

Démonstration :

Soit $O \subset f(X)$ ouvert et fermé pour la topologie trace sur $f(X)$ avec O non vide. Il existe donc O_1 ouvert de Y tel que $O = f(X) \cap O_1$ et il existe F_1 fermé de Y tel que $O = f(X) \cap F_1$.

On a par construction $f^{<-1>}(O) = f^{<-1>}(O_1)$ et $f^{<-1>}(O) = f^{<-1>}(F_1)$. Par continuité de f , on a alors $f^{<-1>}(O)$ ouvert et fermé de X car O_1 et F_1 le sont.

Ayant X connexe, on a donc $f^{<-1>}(O) = \emptyset$ ou $f^{<-1>}(O) = X$. Mais comme O non vide on a alors $f^{<-1>}(O) = X$: en effet, $\exists y \in O \subset f(X)$ donc $\exists x \in X / y = f(x)$ et donc $f^{<-1>}(X) \neq \emptyset$.

D'où on ne peut avoir que $O = f(X)$ et c'est ce que l'on souhaitait démontrer.

Définition 1 *Soit X un sous-ensemble quelconque de Y espace topologique.*

Soit $a \in X$, on a les définitions suivantes :

- 1. a est un point isolé de X si et seulement si $\exists V \in \mathcal{V}_a$ tel que l'on ait $V \cap X = \{a\}$.*
- 2. si $a \in \bar{X}$, a est point d'accumulation de X si et seulement si $x \in \bar{X} - \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des points isolés de X .*