# Compacité et Borel-Lebesgue

Topologie dans un espace métrique

Mathématiques Spéciales MP

Ce présent document a pour but de démontrer l'équivalence entre la propriété de Borel-Lebesgue et celle de Bolzano-Weierstrass caractérisant les espaces compacts.

**Définition 1** *Un espace métrique $E$ est compact si et seulement si il vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite de $E$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $E$.*

**Définition 2** *Un espace métrique (E,d) est dit précompact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de E par des boules ouvertes de rayon $\varepsilon$.*

On a déjà un premier lemme :

**Lemme 1** *Un espace métrique (E,d) compact est précompact.*

En effet, raisonnons par l'absurde et supposons ($E$,d) non précompact. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E$ n'est pas recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\varepsilon$.

Soit $x_0 \in E$. On va construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ avec laquelle on aboutira à une contradiction. On pose $x_1 \in E \backslash B(x_0, \varepsilon)$, $x_2 \in E \backslash (B(x_0, \varepsilon) \cup (B(x_1, \varepsilon))$ et par récurrence :

$$x_n \in E \backslash \bigcup_{i=0}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$$

Cela est tout à fait possible par hypothèse, E étant supposé non-précompact.

Comme $E$ est compact, $E$ vérifie Bolzano-Weierstrass :

$$\exists\ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante avec } \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \mu \in E$$

Entre autres, $(x_{\varphi(n)})$ est de Cauchy :

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n, p \geq n_0,\ d(x_{\varphi(n)},\ x_{\varphi(p)}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier, on a $d(x_{\varphi(n)},\ x_{\varphi(n+1)}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Or on a : $x_{\varphi(n+1)} \in E \backslash F$ avec $F = B(x_0, \varepsilon) \cup B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots\ B(x_{\varphi(n+1)-1}, \varepsilon)$, et $x_{\varphi(n)} \in F$ par stricte croissance de $\varphi$.

Donc $d(x_{\varphi(n)},\ x_{\varphi(n+1)}) \geq \varepsilon$ ce qui est une contradiction avec le caractère de Cauchy de $(x_{\varphi(n)})$.

**Lemme 2** *Soit (E,d) un espace métrique compact, et $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E par des ouverts de E. Alors $\exists\ \alpha \geq 0\ /\ \forall x \in E,\ \exists i \in I\ /\ B(x, \alpha) \subset O_i$.*

Pour démontrer ce lemme, on raisonne de nouveau par l'absurde :

$$\forall\ \alpha > 0,\ \exists\ x \in\ E\ /\ \forall\ i \in I,\ B(x, \alpha) \not\subset O_i$$

On prend $\alpha = \dfrac{1}{n}$. On a alors :

$$\forall\ n > 0,\ \exists\ x_n \in\ E\ /\ \forall\ i \in I,\ B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset O_i$$

Or d'après Bolzano-Weierstrass :

$$\exists\ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante avec } \lim_{n \to \infty} x_{\varphi(n)} = \mu \in E$$

Par continuité de l'application distance, on a donc aussi $\forall\ i \in I,\ \forall\ \varepsilon > 0,\ B(\mu, \varepsilon) \not\subset O_i$ Donc on a $\mu \notin \mathring{O}_i = O_i$ car $O_i$ est un ouvert ; donc $\mu \notin E$ ce qui constitue manifestement une contradiction.

On va pouvoir donc maintenant être en mesure de prouver la propriété de Borel-Lebesgue.

**Définition 3** *Un espace métrique $(E, d)$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si et seulement si de tout recouvrement de E, on peut extraire un sous-recouvrement fini : pour $(O_i)_{i \in I}$ famille d'ouverts de $E$ on a*

$$E \subset \bigcup_{i \in I} O_i \Rightarrow \exists\ J \subset I,\ J \textit{ fini, avec } E \subset \bigcup_{i \in J} O_i$$

**Lemme 3** *Si $E$ est un espace vérifiant Borel-Lebesgue, et si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de $E$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

On raisonne par l'absurde, et on suppose $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. On a alors :

$$E\backslash \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E\backslash F_n = E.$$

$E$ est donc recouvert par des ouverts, car les $F_n$ sont des fermés. Or $E$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue, donc il existe $J \subset \mathbb{N}$, $J$ fini tel que :

$$E \subset \bigcup_{j\in J} E\backslash F_j.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_{n+1} \subset F_n$ donc $E\backslash F_n \subset E\backslash F_{n+1}$. $J$ étant fini, il existe $n_0 = \max J$ et $E \subset E\backslash F_{n_0}$, c'est-à-dire $E = E\backslash F_{n_0}$.

Or par hypothèse, $F_{n_0} \neq \emptyset$ c'est-à-dire $E\backslash F_{n_0} \neq E$. Il y a donc contradiction, donc on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$

**Théorème 1** *$E$ est un espace compact (vérifiant Bolzano-Weierstrass) si et seulement si $E$ vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : il y a donc équivalence entre Borel-Lebesgue et Bolzano-Weierstrass.*

1. Borel-Lebesgue $\Rightarrow$ Bolzano-Weierstrass :

   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ ; montrons que $(u_n)$ admet une valeur d'adhérence (on aura donc montré l'existence d'une sous-suite convergente).
   Soit $X_p = \{u_n \in E \ / \ n \geq p\}$. On a $X_{p+1} \subset X_p$ donc $\bar{X}_{p+1} \subset \bar{X}_p$.
   D'où $(\bar{X}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides donc d'après le lemme 3, $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bar{X}_p \neq \emptyset$.
   Soit $x_0 \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bar{X}_p$. Montrons que $\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ N \in \mathbb{N},\ \exists\ n \geq N$ avec $d(x_0, u_n) \leq \varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$ ; $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \bar{X}_p$, d'où $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ V \in \mathcal{V}_{x_0}$, $V \cap X_p \neq \emptyset$.
   En particulier on a $\forall\ p \in N$, $B(x_0, \varepsilon) \cap X_p \neq \emptyset$.
   Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in X_p$ et $u_n \in B(x_0, \varepsilon)$ : on a $\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ p \in \mathbb{N},\ \exists\ n \geq p \ / \ d(x_0, u_n) \leq \varepsilon$
   Donc $x_0$ est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $E$ vérifie Bolzano-Weierstrass.

2. Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow$ Borel-Lebesgue :

   Soit $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $E$ par des ouverts de $E$.
   Alors $\exists\ \alpha > 0\ /\forall\ x \in E,\ \exists\ i_0 \in I$ avec $B(x,\alpha) \subset O_{i_0}$ (lemme 2).
   $E$ vérifiant Bolzano-Weierstrass, $E$ est un espace précompact d'après le lemme 1, donc il existe un recouvrement fini de $E$ par des boules ouvertes de rayon $\alpha$ :

   $$\exists\ (x_i)_{1\leq i\leq n}\ /E \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\alpha).$$

   Donc il existe $j_{x_i} \in I$ tel que $B(x_i,\alpha) \subset O_{j_{x_i}}$ pour tout $i \in [|1\ ,\ n|]$ ; d'où :

   $$\bigcup_{i=1}^{n} B(x_{i,\alpha}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{j_{x_i}}.$$

   Donc on a bien l'existence de $J \subset I$, avec $J$ fini ($J = \{j_{x_i}\}_{1\leq i\leq n}$ ) tel que :

   $$E \subset \bigcup_{j\in J} O_j.$$

   On a donc $E$ qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.