# UN THÉORÈME A DE QUILLEN POUR LES $\infty$-CATÉGORIES STRICTES I : LA PREUVE SIMPLICIALE

*par*

Dimitri Ara & Georges Maltsiniotis

***Résumé.*** — Le but de cet article est de démontrer une généralisation pour les $\infty$-catégories strictes du célèbre théorème A de Quillen. Ce résultat est central à la théorie de l'homotopie des $\infty$-catégories strictes développée par les auteurs. La preuve exposée dans ce texte est de nature simpliciale et s'appuie sur la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner. Dans un deuxième article, on démontrera ce même résultat par des méthodes purement $\infty$-catégoriques.

***Abstract* (A Quillen's Theorem A for strict $\infty$-categories I).** — The aim of this paper is to prove a generalization of the famous Theorem A of Quillen for strict $\infty$-categories. This result is central to the homotopy theory of strict $\infty$-categories developed by the authors. The proof presented here is of a simplicial nature and uses Steiner's theory of augmented directed complexes. In a subsequent paper, we will prove the same result by purely $\infty$-categorical methods.

## Table des matières



***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 18D05, 18G30, 18G35, 18G55, 55P15, 55U10, 55U15, 55U35.
***Mots clefs.*** — $\infty$-catégories strictes, complexes dirigés augmentés, ensembles simpliciaux, joint, nerf de Street, orientaux, produit tensoriel de Gray, théorème A, tranches, transformations oplax.
***Key words and phrases.*** — strict $\infty$-categories, augmented directed complexes, simplicial sets, join, Street's nerve, orientals, Gray tensor product, Theorem A, slices, oplax transformations.

## Introduction

### Catégories supérieures

Depuis quelques années, les catégories supérieures et, plus particulièrement, les $(\infty, 1)$-catégories faibles (aujourd'hui improprement appelées $\infty$-catégories) et les $(\infty, \infty)$-catégories strictes, plus connues sous le nom de $\omega$-catégories ou de $\infty$-catégories strictes, sont activement étudiées. Rappelons brièvement ce que sont ces objets.

Une *$\infty$-catégorie stricte* $C$ est la donnée d'un *$\infty$-graphe*

$$C_0 \underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}} C_1 \underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}} \quad \cdots \quad \underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}} C_{i-1} \underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}} C_i \underset{t}{\overset{s}{\leftleftarrows}} \quad \cdots \ , \qquad ss = st \ , \quad ts = tt \ ,$$

où pour $i \geqslant 0$, $C_i$ désigne l'ensemble des *$i$-cellules* de $C$, et $s$ et $t$ les applications *source* et *but*, muni d'applications *unité*

$$C_i \to C_{i+1} \ , \quad x \mapsto 1_x \ , \quad i \geqslant 0 \ , \quad x \in C_i \ ,$$

et de *compositions*

$$C_i \times_{C_j} C_i \to C_i \ , \quad (x, y) \mapsto x *_j y \ , \quad 0 \leqslant j < i \ , \quad x, y \in C_i \ ,$$

associant à un couple $(x, y)$ de $i$-cellules *$j$-composables* (c'est-à-dire telles que la $j$-cellule but itéré de $y$ soit égale à la $j$-cellule source itérée de $x$) une $i$-cellule $x *_j y$. On demande que ces applications soient compatibles aux opérations source et but en un sens adéquat et qu'elles vérifient des axiomes de nature équationnelle : *associativité*, *unité*, *loi d'échange* et *fonctorialité des unités*. Par exemple, l'associativité impose que, pour $0 \leqslant j < i$ et $x, y, z$ trois $i$-cellules $j$-composables, on ait

$$(x *_j y) *_j z = x *_j (y *_j z) \ .$$

Pour $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \infty$, une *$(n, m)$-catégorie stricte* est une $\infty$-catégorie stricte dont les $i$-cellules sont *triviales* (c'est-à-dire sont des unités) pour $i > n$ et *strictement inversibles* pour $i > m$ pour les compositions $*_j$, $m \leqslant j < i$. Pour $n \geqslant 0$, une *$n$-catégorie stricte* est une $(n, n)$-catégorie stricte. Par exemple, une 0-catégorie stricte est un ensemble, une 1-catégorie stricte une catégorie, une $(1, 0)$-catégorie stricte un groupoïde, une $(2, 1)$-catégorie stricte une 2-catégorie stricte dont les 2-cellules sont inversibles pour la composition *verticale* $*_1$, une $(\infty, 0)$-catégorie stricte un $\infty$-groupoïde strict, une $(\infty, \infty)$-catégorie stricte une $\infty$-catégorie stricte, etc.

Moralement, une *$\infty$-catégorie faible* consiste en un $\infty$-graphe, des applications unité et des compositions qui vérifient les mêmes compatibilités aux opérations source et but que dans le cas strict mais qui, par contre, ne vérifient pas les axiomes d'associativité, d'unité, d'échange et de fonctorialité des unités à égalité près (*on the nose* dirait-on en anglais), mais seulement à des *cohérences* près. De plus, les relations naturelles que ces cohérences devraient satisfaire ne sont satisfaites qu'à des cohérences supérieures près, et ainsi de suite. On définit les $(n, m)$*-catégories faibles*, $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \infty$, comme dans le cas strict mais en remplaçant les inverses stricts par des *inverses faibles*.

Il est difficile de formaliser cette notion de $\infty$-catégorie faible, et il n'y a pas une manière unique de le faire. Le premier à avoir trouvé un fil d'Ariane pour définir une structure de ce type est Grothendieck. Sa motivation et son inspiration étaient d'origine topologique et homotopique. Conscient que les $\infty$-groupoïdes stricts ne modélisent que des types d'homotopie d'un genre très particulier (notamment, si on se restreint aux $\infty$-groupoïdes simplement connexes, on n'obtient que des produits d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane, voir par exemple [**4**]), il cherchait à dégager une notion de $\infty$-groupoïde faible modélisant tous les types d'homotopie. Dans [**35**], il a défini une telle notion en termes d'esquisses projectives, il a associé à tout espace topologique un $\infty$-groupoïde faible fondamental, et il a conjecturé que cela induisait une équivalence entre la catégorie homotopique des espaces et la catégorie homotopique des $\infty$-groupoïdes faibles. Cette conjecture, connue aujourd'hui sous le nom d'*hypothèse d'homotopie*, n'est toujours pas démontrée. Quelques progrès ont été réalisés récemment, notamment dans [**38**] où cette conjecture a été ramenée à une conjecture technique plausible.

Une quinzaine d'années après la définition de Grothendieck, Batanin a dégagé un concept de $\infty$-catégorie faible en utilisant sa théorie des opérades globulaires [**14**]. Plus tard, le second des auteurs a réalisé qu'une légère variante de la définition de Grothendieck permettait d'obtenir une définition de $\infty$-catégorie faible [**54**], définition que le premier des auteurs a prouvé être essentiellement équivalente à celle de Batanin [**2**]. Un des avantages de cette définition « à la Grothendieck » est qu'elle peut être implémentée pratiquement telle quelle en théorie de types [**31**].

Malheureusement, les structures ainsi définies sont malaisées à étudier, très peu de résultats sont connus, et on ne dispose de pratiquement aucun exemple autre que le $\infty$-groupoïde fondamental d'un espace, ou plus généralement, d'un objet d'une catégorie de modèles dont tous les objets sont fibrants [**35, 3**], ainsi que bien sûr les $\infty$-catégories strictes. L'étude des $\infty$-catégories strictes, plus simple, constitue ainsi une source précieuse d'inspiration pour les $\infty$-catégories faibles.

L'approche la plus courante pour contourner la difficulté de l'étude des modèles *algébriques et globulaires* des $\infty$-catégories faibles est de prendre l'hypothèse d'homotopie comme *définition* des $\infty$-groupoïdes faibles, autrement dit, de décréter que les $\infty$-groupoïdes faibles *sont* les espaces et souvent, plus précisément, les complexes de Kan. Cette approche a conduit à définir de nombreux modèles *homotopiques* pour les $(\infty, 1)$-catégories faibles, comme les quasi-catégories [**45, 46, 47, 51, 25**], les catégories simpliciales [**17**], les catégories de Segal [**64**], les espaces de Segal complets [**60**], et plus tard pour les $(\infty, m)$-catégories faibles, $m$ arbitraire mais *fini*, comme les $m$-catégories de Segal [**64**], les $\Theta_m$-espaces [**61, 62**] et les $m$-quasi-catégories [**5**]. Le seul modèle homotopique développé jusqu'à présent pour les $(\infty, \infty)$-catégories faibles est celui des ensembles compliciaux faibles [**74, 72**], généralisation naturelle des ensembles compliciaux [**73**], dont la catégorie est équivalente à celle des $\infty$-catégories strictes. Les $(\infty, m)$-catégories faibles ont trouvé, pour $m = 1$, de nombreuses applications en géométrie algébrique dérivée [**50, 71**] et en théorie de topos supérieurs [**51**], pour $m = 2$, en théorie géométrique de Langlands [**33**], et pour $m$ arbitraire, dans une approche en vue de la démonstration de *l'hypothèse du cobordisme* [**52**].

### Les catégories comme modèles des types d'homotopie

Comme on l'a rappelé, les $\infty$-groupoïdes stricts ne suffisent pas à modéliser les types d'homotopie et c'est une des motivations premières à l'introduction des $\infty$-groupoïdes faibles. La situation est différente pour les $(n, m)$-catégories dès que $m > 0$ : nul besoin de $(n, m)$-catégories faibles quand on s'intéresse uniquement aux types d'homotopie ; les $(n, m)$-catégories strictes suffisent. Le premier résultat dans cette direction se trouve dans la thèse d'Illusie [**43**], attribué par celui-ci à Quillen, et affirme que les petites catégories modélisent les types d'homotopie. Plus précisément, si on localise la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories par les *équivalences faibles*, foncteurs dont l'image par le foncteur nerf, introduit par Grothendieck dans [**34**], est une équivalence faible simpliciale, on obtient une catégorie équivalente à la catégorie homotopique des CW-complexes (qui est équivalente à la localisation de celle de *tous* les espaces topologiques par les équivalences faibles topologiques, définies en termes de groupes d'homotopie).

Plus tard, Thomason a montré [**70**] que ces équivalences faibles de $\mathcal{C}at$, qu'on appelle depuis les *équivalences de Thomason*, font partie d'une structure de catégorie de modèles de Quillen sur $\mathcal{C}at$, et qu'il existe une équivalence de Quillen entre celle-ci et la structure de Kan-Quillen sur les ensembles simpliciaux [**58**]. Ainsi, on a une équivalence, non seulement en tant que catégories, mais aussi en tant que $(\infty, 1)$-catégories, entre la localisation de Dwyer-Kan [**30**] de $\mathcal{C}at$ et la $(\infty, 1)$-catégorie des types d'homotopie. De plus, grâce à ce théorème, on dispose de tous les outils provenant de la théorie des catégories de modèles de Quillen [**58**] pour étudier la théorie de l'homotopie des petites catégories.

Le premier à avoir vu l'importance des petites catégories comme modèles des types d'homotopie est Quillen et cette idée est au cœur de son travail sur la K-théorie algébrique supérieure [**59**]. En effet, celui-ci a défini les groupes de K-théorie comme étant les groupes d'homotopie de l'espace des lacets d'un espace associé à une catégorie. Ses célèbres théorèmes A et B, qui donnent respectivement une condition suffisante pour qu'un foncteur soit une équivalence de Thomason et pour qu'un certain carré de foncteurs soit homotopiquement cartésien, jouent un rôle primordial dans l'établissement des propriétés de la K-théorie algébrique. Le théorème A est également constamment utilisé dans les huit articles de Neeman consacrés à ses travaux sur la K-théorie des catégories triangulées, dont on peut trouver un compte-rendu dans [**57**].

C'est Grothendieck qui place la catégorie des petites catégories, et le théorème A, au centre de la théorie de l'homotopie [**35**]. Son inspiration est toposique : la théorie de l'homotopie des espaces est pour lui un cas particulier de celle des topos. Or, on dispose d'une notion d'équivalence faible dans la catégorie des topos et des morphismes géométriques entre ceux-ci, celle d'équivalence d'Artin-Mazur [**13**]. Un morphisme de topos $f = (f_*, f^*) : X \to Y$ est une *équivalence d'Artin-Mazur* si pour tout $n \geqslant 0$, le morphisme $H^n(Y, \mathcal{L}) \to H^n(X, f^*(\mathcal{L}))$, induit par $f$, est un isomorphisme pour tout faisceau localement constant $\mathcal{L}$ sur $Y$, d'ensembles si $n = 0$, de groupes si $n = 1$, et de groupes abéliens si $n \geqslant 2$. D'autre part, pour Grothendieck, une petite catégorie $A$ est indissociable de son topos des préfaisceaux $\widehat{A}$. Ainsi, il *définit* les équivalences faibles dans $\mathcal{C}at$ comme étant les foncteurs $u : A \to B$ tels que le morphisme de topos $(u_*, u^*) : \widehat{A} \to \widehat{B}$ (où $u^*$ désigne le foncteur de précomposition par $u$ et $u_*$ son adjoint à droite) est une équivalence d'Artin-Mazur. Avec cette définition, le théorème A est la traduction dans $\mathcal{C}at$ de la propriété des équivalences d'Artin-Mazur affirmant que pour qu'un morphisme de topos soit une équivalence d'Artin-Mazur, il suffit qu'il le soit localement sur son but. Les équivalences faibles de $\mathcal{C}at$ ainsi définies coïncident avec les équivalences de Thomason définies par le nerf (voir par exemple [**56**]).

Grothendieck a axiomatisé l'étude des équivalences faibles dans $\mathcal{C}at$ en introduisant dans [**35**] (voir aussi [**53**] et [**27**]) la notion de localisateur fondamental, classe de flèches de $\mathcal{C}at$ satisfaisant à une liste de propriétés formelles vérifiées par les équivalences de Thomason, dont la plus importante est le théorème A. Cette notion est à la base de sa théorie des catégories test, petites catégories dont la catégorie des préfaisceaux modélise canoniquement les types d'homotopie, à l'instar de la catégorie des simplexes. Il a associé à tout localisateur fondamental des notions de foncteur asphérique, propre, lisse, les foncteurs à la fois propres et lisses ayant des propriétés analogues à celles des quasi-fibrations en topologie. Cela lui a permis de construire l'espace des lacets d'une petite catégorie à partir d'une catégorie de chemins en forme de zigzag. Il a conjecturé que les équivalences de Thomason forment le plus petit localisateur fondamental (conjecture de minimalité), et qu'il est le seul non grossier à satisfaire au théorème B. En pratique, la conjecture de minimalité signifie que le *seul* moyen non trivial pour prouver qu'un foncteur est une équivalence de Thomason est le théorème A. Ces deux conjectures ont été prouvées par Cisinski [**26, 27**], qui a également démontré que, modulo des questions ensemblistes, les localisateurs fondamentaux sont en bijection avec les localisations de Bousfield à gauche des types d'homotopie.

### Les $n$-catégories comme modèles des types d'homotopie

Le présent article fait partie d'un vaste projet consacré à la théorie de l'homotopie des $\infty$-catégories strictes et à la généralisation aux catégories supérieures strictes des résultats exposés dans les paragraphes précédents. Cette généralisation est en partie motivée par le fait que, si les petites catégories modélisent bien les types d'homotopie, les modèles catégoriques produits sont en général peu naturels. On verra plus loin dans cette introduction que les $\infty$-catégories strictes fournissent des modèles plus simples et parfois très géométriques.

Pour pouvoir généraliser ces résultats aux catégories supérieures, on doit disposer d'une classe convenable d'équivalences faibles. Cela a été rendu possible grâce à l'introduction par Street [**68**] de l'objet cosimplicial des *orientaux* dans $\infty$-$\mathcal{C}at$, la catégorie des petites $\infty$-catégories strictes et $\infty$-foncteurs stricts. Cet objet cosimplicial définit par le procédé de Kan un foncteur nerf, appelé *nerf de Street*, de $\infty$-$\mathcal{C}at$ vers la catégorie des ensembles simpliciaux, adjoint à droite d'un foncteur de *réalisation $\infty$-catégorique*. La restriction du nerf de Street à $\mathcal{C}at$ coïncide avec le nerf usuel. On définit les équivalences faibles dans $\infty$-$\mathcal{C}at$, appelées par extension *équivalences de Thomason*, comme étant les $\infty$-foncteurs stricts dont le nerf de Street est une équivalence faible simpliciale. Les équivalences faibles dans la catégorie $n$-$\mathcal{C}at$ des petites $n$-catégories strictes, pour $n \geqslant 0$, et plus généralement dans $(n,m)$-$\mathcal{C}at$, la catégorie des petites $(n,m)$-catégories strictes, pour $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \infty$, appelées aussi *équivalences de Thomason*, sont les flèches dont l'image par l'inclusion dans $\infty$-$\mathcal{C}at$ est une équivalence de Thomason. Il existe d'autres foncteurs nerfs comme le *nerf $n$-simplicial*, le *nerf cubique*, ou le *nerf cellulaire* à valeurs dans les ensembles cellulaires, préfaisceaux sur la catégorie $\Theta$ de Joyal [**44, 15, 16, 28**]. Dans [**12**], nous montrerons que ces nerfs définissent les mêmes équivalences faibles que le nerf de Street, ce qui permet entre autres d'étudier les propriétés de dualité des équivalences de Thomason, et s'avère crucial dans [**9**].

Le théorème d'Illusie-Quillen affirmant l'équivalence de la localisation de $\mathcal{C}at$ par les équivalences de Thomason et de la catégorie homotopique des espaces se généralise aux $(n,m)$-catégories pourvu que $m > 0$, c'est-à-dire pourvu qu'on n'exige pas que les 1-cellules soient inversibles. Ce résultat a été établi pour les 2-catégories strictes par J. Chiche [**22, 23**] en utilisant des techniques semblables à celles de [**40**]. Il a été généralisé par A. Gagna [**32**] pour les $n$-catégories strictes, $0 < n \leqslant \infty$. En utilisant nos résultats de [**9**], il obtient le cas général des $(n,m)$-catégories strictes, $0 < m \leqslant n \leqslant \infty$. Comme les $\infty$-groupoïdes stricts ne modélisent pas les types d'homotopie, ce résultat est optimal (il est faux si $m = 0$).

On peut expliquer la philosophie de ces résultats en rapport avec l'hypothèse d'homotopie comme suit. La catégorie des $\infty$-groupoïdes faibles est une sous-catégorie de la catégorie des $\infty$-catégories faibles ($\infty$ signifiant comme dans le reste de cette introduction $(\infty,\infty)$, et *non pas* $(\infty,1)$, et les morphismes respectant *strictement* les structures). Cette inclusion admet un adjoint à gauche qui inverse formellement (faiblement) toutes les $i$-cellules, pour $i > 0$. Les catégories, les $\infty$-catégories strictes, et plus généralement, les $(n,m)$-catégories strictes sont en particulier des $\infty$-catégories faibles. Conjecturalement leur type d'homotopie, autrement dit le type d'homotopie de leur nerf de Street, coïnciderait avec le type d'homotopie représenté, en vertu de l'hypothèse d'homotopie, par le $\infty$-groupoïde faible obtenu en leur appliquant cet adjoint à gauche. (Cette conjecture généraliserait le fait que le 1-tronqué du type d'homotopie d'une catégorie est représenté par son groupoïde fondamental, obtenu en inversant formellement (strictement) toutes ses flèches.) Ainsi, le besoin de cohérences non triviales à la place des égalités dans les $\infty$-groupoïdes pour modéliser les types d'homotopie apparaîtrait dans ce processus d'inversion formelle des cellules. On se gardera de croire que les seules cohérences non triviales seraient celles exprimant que ces inverses formels sont des inverses faibles. En effet, on sait que les $\infty$-groupoïdes faibles dont la $\infty$-catégorie sous-jacente est stricte ne suffisent pas pour modéliser les types d'homotopie [**63, 4**]. *A priori*, toutes les cohérences faisant intervenir au moins un des inverses formels seront non triviales.

Dans [**8**], nous avons démontré un « théorème de Thomason abstrait » permettant d'établir une liste de propriétés suffisantes pour construire une structure de catégorie de modèles « à la Thomason » sur $n\text{-}\mathcal{C}at$, pour $0 < n \leqslant \infty$, et une adjonction de Quillen (qui sera une équivalence grâce aux résultats de J. Chiche pour $n = 2$ et de A. Gagna pour $n$ général) avec la structure de Kan-Quillen sur les ensembles simpliciaux. Nous avons prouvé toutes ces propriétés pour $n = 1, 2$, établissant ainsi, pour $n = 2$, l'analogue exact du théorème de Thomason, et toutes sauf deux dans le cas général. L'une de ces deux propriétés est établie dans [**9**], la dernière restant pour l'instant conjecturale. Dans un travail en cours, A. Gagna explore le cas $n = 3$. Le cas général est un des fils conducteurs de notre projet. Notons que si cette conjecture est établie, les généralisations du théorème d'Illusie-Quillen fourniraient non seulement des équivalences de catégories, mais aussi des équivalences de $(\infty, 1)$-catégories et on disposerait de tous les outils des catégories de modèles pour étudier la théorie de l'homotopie des petites $n$-catégories.

Dans [**20**], M. Bullejos et A. M. Cegarra ont établi un théorème A pour les 2-catégories strictes. Une variante du théorème A pour les 2-foncteurs lax normalisés de source une 1-catégorie a été prouvée par M. del Hoyo [**42**] et étendue aux 2-foncteurs lax généraux dans [**41**]. Dans [**22, 23**], J. Chiche en a établi une version relative et à transformation oplax près. Dans le présent article, nous établissons une version relative et à transformation oplax près dans $\infty\text{-}\mathcal{C}at$. Ce théorème est au centre de notre projet. Il implique comme cas particuliers des théorèmes analogues pour les $n$-catégories strictes et plus généralement pour les $(n, m)$-catégories strictes. Notons qu'un théorème A pour les $(\infty, 1)$-catégories faibles a été établi par Lurie [**51**] dans le cadre de la théorie des $(\infty, 1)$-foncteurs cofinaux, ainsi que par G. Heuts et I. Moerdijk [**39**]. Dans [**21**], A. M. Cegarra a établi un théorème B pour les 2-catégories strictes. Dans [**7**], le premier des auteurs démontre la généralisation de ce théorème dans $\infty\text{-}\mathcal{C}at$.

Pour énoncer et démontrer les théorèmes A et B dans $\infty$-$\mathcal{C}at$, nous avons été conduits à revisiter le produit tensoriel de Gray lax $\infty$-catégorique (construit pour la première fois par F. A. Al-Agl et R. Steiner [**1**], généralisant une construction analogue pour les $\infty$-groupoïdes due à R. Brown et P. J. Higgins [**19**], et étudié dans la thèse de S. Crans [**29**]) et introduire une opération joint et des tranches dans $\infty$-$\mathcal{C}at$ [**10**]. Il s'agit, nous semble-t-il, de constructions importantes en théorie des $\infty$-catégories, indépendamment de la théorie de l'homotopie. Dans l'étude des $(\infty, 1)$-catégories faibles, et plus précisément des quasi-catégories, le joint et les tranches jouent un rôle essentiel. En revanche, ces notions n'ont pas encore été introduites dans le cadre des $(\infty, m)$-catégories faibles, et notre construction peut servir de modèle.

Dans [**22**] et [**24**], J. Chiche a généralisé la théorie des localisateurs fondamentaux de Grothendieck aux 2-catégories strictes, et il a montré que les localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$ sont en bijection avec ceux de $\mathcal{C}at$. Ce résultat profond, combiné avec le théorème A 2-catégorique, implique aussitôt la conjecture de minimalité pour 2-$\mathcal{C}at$ : les équivalences de Thomason 2-catégoriques forment le plus petit localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$. De même, combiné avec le théorème B 2-catégorique, il implique que le localisateur fondamental des équivalences de Thomason est le seul localisateur fondamental non grossier de 2-$\mathcal{C}at$ satisfaisant à ce théorème. De plus, le premier des auteurs a montré que modulo des questions ensemblistes, tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ est la classe des équivalences faibles d'une structure de catégorie de modèles à la Thomason [**6**]. La définition des localisateurs fondamentaux s'étend facilement aux $\infty$-catégories strictes. La généralisation des résultats précédents, ainsi que de la théorie des foncteurs propres et lisses de Grothendieck, fait partie de notre projet.

Le principal avantage des modèles des types d'homotopie dans $\infty$-$\mathcal{C}at$ par rapport à ceux dans $\mathcal{C}at$ est qu'ils sont beaucoup plus naturels. Par exemple, le théorème B $\infty$-catégorique [**7**] implique que pour tout groupe commutatif $\pi$, et tout $n > 1$, le $n$-groupoïde strict ayant un seul objet, les unités itérées de cet objet comme $i$-cellules, pour $0 < i < n$, et les éléments de $\pi$ comme $n$-cellules, toutes les compositions des $n$-cellules étant définies par la composition du groupe, est un $K(\pi, n)$, généralisant le résultat bien connu pour $n = 1$ et $\pi$ un groupe arbitraire. De plus, si le groupe $\pi$ est réticulé, c'est-à-dire est muni d'une structure de treillis compatible à la structure de groupe, par exemple $\pi = \mathbb{Z}$, notre théorème A implique que la sous-$n$-catégorie du $n$-groupoïde précédent avec comme $n$-cellules les éléments *positifs* du groupe est aussi un $K(\pi, n)$. On obtient ainsi des modèles remarquablement simples des $K(\pi, n)$.

Par ailleurs, le foncteur de réalisation $\infty$-catégorique, adjoint à gauche du nerf de Street, associe à tout ensemble simplicial $K$ une $\infty$-catégorie stricte qui est librement engendrée au sens des polygraphes par les simplexes non dégénérés de $K$, tout $n$-simplexe de $K$ définissant une $n$-cellule. En général, le type d'homotopie de cette

$\infty$-catégorie n'est pas le même que celui de $K$. Néanmoins, dans [**9**], nous conjecturons que si l'ensemble simplicial $K$ provient d'un *complexe simplicial* (ordonné), alors ces deux types d'homotopie coïncident, et nous démontrons cette conjecture quand le complexe simplicial est celui associé à un ensemble ordonné, et en particulier s'il est la subdivision barycentrique d'un autre. Ainsi, si $X$ est une variété *munie* d'une triangulation (autrement dit, d'un homéomorphisme avec la réalisation topologique d'un complexe simplicial), quitte éventuellement à remplacer cette triangulation par sa subdivision barycentrique, on lui associe naturellement une $\infty$-catégorie ayant le même type d'homotopie et dont les $n$-cellules sont des composés de $n$-simplexes de $X$. Nous soupçonnons que cette $\infty$-catégorie encode non seulement le type d'homotopie de $X$, mais aussi son type d'homotopie *dirigée* (induit par l'homéomorphisme avec le complexe simplicial).

Un des outils techniques essentiels pour la réalisation de notre projet est la très belle théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner [**65**]. Un *complexe dirigé augmenté* est un complexe de chaînes de groupes abéliens, concentré en degrés positifs, muni d'une augmentation, et pour tout $n \geqslant 0$, d'un sous-monoïde du groupe des $n$-chaînes (ou de façon équivalente d'une relation de préordre compatible avec la structure de groupe) sans aucune compatibilité avec la différentielle ou l'augmentation. Steiner définit un foncteur d'*abélianisation* de $\infty$-$\mathcal{C}at$ vers la catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$ des complexes dirigés augmentés qui admet un adjoint à droite, le foncteur de $\infty$-*catégorification*. Il définit une classe de complexes dirigés augmentés, que nous appelons des *complexes de Steiner*, telle que la restriction du foncteur de $\infty$-catégorification à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$ formée de ces complexes est pleinement fidèle et induit une équivalence de catégories avec une sous-catégorie pleine dense de $\infty$-$\mathcal{C}at$ formée de $\infty$-catégories strictes libres au sens des polygraphes. Ce résultat permet de réduire certaines constructions ou vérifications $\infty$-catégoriques à des constructions ou vérifications bien plus simples sur les complexes de groupes abéliens.

Dans [**9**], nous avons conjecturé que la localisation de la catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$ par les morphismes dont l'image par le foncteur de $\infty$-catégorification est une équivalence de Thomason est équivalente à la catégorie homotopique des espaces, cette équivalence étant induite par le composé du nerf de Street et du foncteur de $\infty$-catégorification. Cette conjecture a été démontrée par A. Gagna, initialement en utilisant nos résultats de [**9**], et ensuite par une méthode alternative, mais toujours passant par les $\infty$-catégories strictes [**32**]. Il s'agit peut-être du sous-produit le plus spectaculaire de notre projet ; c'est à notre connaissance le premier modèle de *tous* les types d'homotopie entièrement basé sur les complexes de groupes abéliens.

Un autre aspect de notre projet consiste à faire le pont entre nos résultats et ceux relatifs à la structure de catégorie de modèles dite « folk » sur $\infty$-$\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les équivalences $\infty$-catégoriques [**49**]. On peut montrer que la classe de ces équivalences est incluse dans celle des équivalences de Thomason et que ces deux classes coïncident si on se restreint aux $\infty$-groupoïdes. En dérivant le foncteur d'abélianisation de $\infty$-$\mathcal{C}at$ vers la catégorie des complexes des groupes abéliens pour la structure « folk », on obtient la notion d'*homologie polygraphique* [**55**], tandis qu'en le dérivant relativement aux équivalences de Thomason, on obtient l'homologie de son nerf de Street. Ces deux homologies ne coïncident pas en général, l'homologie polygraphique étant un invariant plus fin. Néanmoins, quand on se restreint aux monoïdes, considérés comme $\infty$-catégories strictes avec un seul objet et des $i$-cellules triviales pour $i \geqslant 2$, ces deux homologies sont isomorphes et on retrouve l'homologie ordinaire du monoïde [**48**]. Ce résultat est sur le point d'être généralisé à toutes les (1-)catégories [**36**]. L'analogue de l'homologie polygraphique dans le cadre des $(n, 1)$-catégories strictes, $2 \leqslant n \leqslant \infty$, est activement étudié en rapport avec la théorie de la réécriture et la généralisation des liens établis par Squier entre les propriétés des systèmes de réécriture pour les monoïdes et leurs propriétés homologiques et homotopiques (voir par exemple [**37**]).

**Contenu de l'article**

Le but de cet article est de présenter une preuve aussi directe que possible d'une version du théorème A de Quillen pour les $\infty$-catégories strictes, avec le minimum d'outils $\infty$-catégoriques, en utilisant des techniques simpliciales, et les complexes dirigés augmentés de Steiner [**65**]. Dans [**11**], nous donnerons une autre preuve, basée sur la théorie du joint $\infty$-catégorique développée dans [**10**], et on montrera que la mystérieuse homotopie simpliciale de la section 6 provient d'une transformation oplax de fonctorialité des tranches.

Dans la section introductive 1, on rappelle l'énoncé du théorème A de Quillen dans $\mathcal{C}at$ et on esquisse la preuve d'une variante relative et à transformation près. Les sections 2 et 3 sont consacrées respectivement à des préliminaires sur les ensembles simpliciaux et des rappels sur les complexes dirigés augmentés de Steiner et le nerf de Street. Dans la section 4, on introduit les notions de transformation oplax et de tranche $\infty$-catégoriques, nécessaires pour l'énoncé et la preuve du théorème A dans $\infty$-$\mathcal{C}at$. Les sections 5 et 6 sont dédiées à la preuve proprement dite de ce théorème.

## 1. Le théorème A de Quillen

***1.1***. — On rappelle que le *nerf* d'une petite catégorie $A$ est l'ensemble simplicial $NA$ dont les $n$-simplexes sont les suites de $n$ morphismes composables de $A$ :

$$(NA)_n = \{a_0 \to a_1 \to \cdots \to a_n\}\,,$$

les opérateurs simpliciaux étant définis de la façon évidente. On dit qu'un foncteur entre petites catégories $u : A \to B$ est une *équivalence faible* si son image par le foncteur nerf $Nu : NA \to NB$ est une équivalence faible simpliciale. On rappelle que si $b$ est un objet de $B$, on note ${}_{b}\backslash A$ la catégorie dont les objets sont les couples $(a, g)$

formés d'un objet $a$ de $A$ et d'une flèche $g : b \to u(a)$ de $B$, un morphisme de $(a, g)$ vers un autre objet $(a', g')$ de ${}_{b\backslash}A$ étant une flèche $f : a \to a'$ de $A$ telle que $g' = u(f)g$. On vérifie facilement que pour toute petite catégorie $T$, se donner un foncteur de $T$ vers ${}_{b\backslash}A$ revient à se donner un foncteur $t : T \to A$ et une transformation naturelle $\tau : b \to ut$, où l'on note aussi $b : T \to B$ le foncteur constant de valeur $b$. Le théorème A classique de Quillen [**59**] affirme que si pour tout objet $b$ de $B$ le foncteur

$$ {}_{b\backslash}u : {}_{b\backslash}A \to {}_{b\backslash}B\,, \qquad (a, g) \mapsto (u(a), g)\,, $$

induit par $u$, est une équivalence faible, alors le foncteur $u$ lui-même est une équivalence faible. Une version légèrement plus générale de ce théorème, qui se démontre exactement de la même façon, est la suivante :

***Théorème 1.2.*** — *Soit $\mathcal{T}$ un triangle de foncteurs entre petites catégories, commutatif à transformation naturelle donnée (non nécessairement inversible) près :*

$$ \mathcal{T} = \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rrightarrow}"] & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}. $$

*Si pour tout objet $c$ de $C$, le foncteur ${}_{c\backslash}\mathcal{T} : {}_{c\backslash}A \to {}_{c\backslash}B$*

$$ (a,\ c \xrightarrow{g} v(a)\ ) \ \mapsto\ (u(a),\ c \xrightarrow{g} v(a) \xrightarrow{\alpha_a} w(u(a)))\ , $$

*induit par $\mathcal{T}$, est une équivalence faible, alors il en est de même de $u$.*

Le théorème A de Quillen classique est le cas particulier où $C = B$, $w = 1_B$, $v = u$ et $\alpha = 1_u$. L'ingrédient principal de la preuve de ce théorème est le « lemme bisimplicial ». Si $K$ est un ensemble bisimplicial, on note $\mathsf{Diag}(K)$ l'ensemble simplicial dont les $n$-simplexes sont les éléments de $K_{n,n}$, les opérateurs simpliciaux étant définis de la façon évidente à partir de ceux de $K$. On dit qu'un morphisme d'ensembles bisimpliciaux $K \to L$ est une *équivalence faible diagonale* si le morphisme induit $\mathsf{Diag}(K) \to \mathsf{Diag}(L)$ est une équivalence faible simpliciale.

***1.3. Lemme bisimplicial.*** — *Soit $K \to L$ un morphisme d'ensembles bisimpliciaux. Si pour tout $m \geqslant 0$* (resp. *pour tout $n \geqslant 0$*)*, le morphisme d'ensembles simpliciaux*

$$ K_{m,\bullet} \to L_{m,\bullet} \qquad (\text{resp.} \quad K_{\bullet,n} \to L_{\bullet,n}\ ) $$

*est une équivalence faible, alors le morphisme d'ensembles bisimpliciaux $K \to L$ est une équivalence faible diagonale.*

*Démonstration.* — Voir par exemple [**18**, Chapitre XII, paragraphe 4.3] ou [**26**, proposition 2.1.7] pour une preuve plus moderne. □

*Esquisse de preuve du théorème 1.2.* — Pour tout foncteur $f : X \to Y$ entre petites catégories, on note $S(f)$ l'ensemble bisimplicial

$$(S(f))_{m,n} = \{y_0 \to y_1 \to \cdots \to y_m \to f(x_0)\,,\ x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n\}\,,$$

où les $y_i$ sont dans $Y$ et les $x_j$ dans $X$, les opérateurs simpliciaux étant définis de la façon évidente. On a un morphisme d'oubli $U_f : S(f) \to NX$, défini par

$$(y_0 \to y_1 \to \cdots \to y_m \to f(x_0)\,,\ x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n) \mapsto x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n\,,$$

l'ensemble simplicial $NX$ étant considéré comme ensemble bisimplicial constant en la première variable

$$(NX)_{m,n} = (NX)_n = \{x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n\}\,.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $(U_f)_{\bullet,n}$ s'identifie à la somme

$$\coprod_{x_0 \to \cdots \to x_n} N(Y/f(x_0)) \quad \longrightarrow \coprod_{x_0 \to \cdots \to x_n} *\,,$$

indexée par les $n$-simplexes $x_0 \to \cdots \to x_n$ de $NX$, des morphismes de source $N(Y/f(x_0))$ et de but le point simplicial, qui sont des équivalences faibles puisque les catégories $Y/f(x_0)$ admettent un objet final. La stabilité des équivalences faibles par sommes et le lemme bisimplicial impliquent alors que le morphisme d'ensembles bisimpliciaux $U_f$ est une équivalence faible diagonale.

Or, sous les hypothèses du théorème, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
S(v) \arrow[r, "S(\mathcal{T})"] \arrow[d, "U_v"'] & S(w) \arrow[d, "U_w"] \\
NA \arrow[r, "N(u)"'] & NB
\end{tikzcd}\quad,$$

le morphisme d'ensembles bisimpliciaux $S(\mathcal{T})$ étant défini par

$$\begin{aligned}
&(S(\mathcal{T}))_{m,n}(c_0 \to \cdots \to c_m \to v(a_0),\, a_0 \to \cdots \to a_n) \\
&\qquad\qquad = (c_0 \to \cdots \to c_m \to wu(a_0),\, u(a_0) \to \cdots \to u(a_n))\,, \quad m, n \geqslant 0\,,
\end{aligned}$$

où $c_m \to wu(a_0)$ est le composé

$$c_m \longrightarrow v(a_0) \xrightarrow{\alpha_{a_0}} wu(a_0)\ .$$

D'autre part, on observe que pour tout $m \geqslant 0$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $(S(\mathcal{T}))_{m,\bullet}$ s'identifie à la somme

$$\coprod_{c_0 \to \cdots \to c_m} N(c_m\backslash A) \quad \longrightarrow \coprod_{c_0 \to \cdots \to c_m} N(c_m\backslash B)\,,$$

indexée par les $m$-simplexes $c_0 \to \cdots \to c_m$ de $NC$, des morphismes

$$N(c_m\backslash\mathcal{T}) : N(c_m\backslash A) \longrightarrow N(c_m\backslash B)$$

qui sont des équivalences faibles en vertu de l'hypothèse du théorème. La stabilité des équivalences faibles par sommes et le lemme bisimplicial impliquent alors que le morphisme d'ensembles bisimpliciaux $S(\mathcal{T})$ est une équivalence faible diagonale. On en déduit par deux sur trois que le morphisme bisimplicial constant en la première variable $N(u)$ est une équivalence faible diagonale, autrement dit, que le morphisme d'ensemble simpliciaux $N(u)$ est une équivalence faible, ce qui prouve le théorème. $\square$

***1.4.*** — Le but de cet article est de prouver l'analogue exact de ce théorème pour un triangle de $\infty$-foncteurs stricts entre petites $\infty$-catégories strictes, commutatif à transformation oplax près. Pour ce faire, il faut commencer par donner un sens à l'énoncé, à savoir définir les équivalences faibles dans la catégorie $\infty$-$\mathcal{C}at$ des petites $\infty$-catégories strictes et $\infty$-foncteurs stricts entre celles-ci, et introduire les « cotranches » $y\backslash X$, pour $X \to Y$ un $\infty$-foncteur et $y$ un objet de $Y$, ainsi que la notion de transformation oplax entre $\infty$-foncteurs. Dans ce texte, toutes les $\infty$-catégories considérées seront strictes et petites et tous les $\infty$-foncteurs seront stricts, ainsi on dira plus simplement $\infty$-catégorie et $\infty$-foncteur pour les objets et les morphismes de $\infty$-$\mathcal{C}at$. La structure de la preuve du théorème qu'on va établir est la même que celle du théorème A de Quillen, sauf que les vérifications deviennent hautement non triviales.

Si $C$ est une $\infty$-catégorie et $i \geqslant 0$, on note $C_i$ l'ensemble de ses $i$-cellules. Pour toute $i$-cellule $x$ de $C$, on note $1_x$ la $(i+1)$-cellule unité de $x$, et si $i > 0$, on note $s(x)$ la $(i-1)$-cellule source de $x$ et $t(x)$ la $(i-1)$-cellule but. Pour $j$ tel que $0 \leqslant j < i$, on note $s_j(x)$ (resp. $t_j(x)$) la $j$-cellule source itérée (resp. but itéré) de $x$ et on pose $s_i(x) = x$ (resp. $t_i(x) = x$). Pour $0 \leqslant j < i$, si $x$ et $y$ sont deux $i$-cellules *$j$-composables* de $C$, autrement dit si $s_j(x) = t_j(y)$, on note $x *_j y$ le composé correspondant.

Plus généralement, pour $i, j, k$ tels que $0 \leqslant k < \min\{i, j\}$, si $x$ est une $i$-cellule et $y$ une $j$-cellule de $C$ telles que $s_k(x) = t_k(y)$, on notera $x *_k y$ la $(\max\{i, j\})$-cellule obtenue en composant $x$ avec la $i$-cellule identité itérée de $y$ ou la $j$-cellule identité itérée de $x$ avec $y$ selon que $i \geqslant j$ ou $i \leqslant j$.

## 2. Préliminaires simpliciaux

***2.1.*** — On rappelle que la *catégorie des simplexes* $\mathbf{\Delta}$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles ordonnés formée des ensembles

$$\Delta_n = \{0, 1, \dots, n\}\,, \qquad n \geqslant 0\,,$$

ordonnés par l'ordre naturel. La catégorie des *ensembles simpliciaux* est la catégorie $\widehat{\mathbf{\Delta}}$ des préfaisceaux sur $\mathbf{\Delta}$. On identifiera, par le plongement de Yoneda, $\mathbf{\Delta}$ à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathbf{\Delta}}$. Comme de coutume, si $X$ est un ensemble simplicial et $n \geqslant 0$, on note $X_n$ l'ensemble $X(\Delta_n)$ de ses *$n$-simplexes*, et si $\varphi : \Delta_m \to \Delta_n$ est un morphisme de $\mathbf{\Delta}$, on note $X_\varphi$ l'application $X(\varphi) : X_n \to X_m$.

***Notations 2.2.*** — Soient $X$ un ensemble simplicial, $n \geqslant 0$ un entier positif, et $x$ un $n$-simplexe de $X$. Pour tout $m \geqslant 0$ et toute suite d'entiers $0 \leqslant i_0 \leqslant \dots \leqslant i_m \leqslant n$, on note $x_{i_0,\dots,i_m}$ le $m$-simplexe $X_\varphi(x)$ de $X$, où $\varphi : \Delta_m \to \Delta_n$ désigne l'application définie par $\varphi(k) = i_k$, pour $0 \leqslant k \leqslant m$.

Pour tous $m, n \geqslant 0$, on pose $\Delta_m \amalg \Delta_n = \Delta_{m+1+n}$ et on note

$$i_{m,n} : \Delta_m \to \Delta_{m+1+n} \qquad \text{et} \qquad j_{m,n} : \Delta_n \to \Delta_{m+1+n}$$

les inclusions « initiale » et « finale », définies par

$$i_{m,n}(k) = k\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant m\,, \qquad \text{et} \qquad j_{m,n}(l) = m+1+l\,, \quad 0 \leqslant l \leqslant n\,.$$

Ainsi, pour tout ensemble simplicial $X$, et tout $(m+1+n)$-simplexe $x$ de $X$, on a

$$X_{i_{m,n}}(x) = x_{0,\dots,m} \qquad \text{et} \qquad X_{j_{m,n}}(x) = x_{m+1,\dots,m+1+n}\,.$$

Si $\varphi : \Delta_{m'} \to \Delta_m$ et $\psi : \Delta_{n'} \to \Delta_n$ sont deux morphismes de $\mathbf{\Delta}$, on note $\varphi \amalg \psi$ le morphisme $\varphi \amalg \psi : \Delta_{m'+1+n'} \to \Delta_{m+1+n}$ défini par

$$(\varphi \amalg \psi)(i) = \begin{cases} \varphi(i) & 0 \leqslant i \leqslant m' \qquad\qquad\quad , \\ m+1+\psi(i-1-m') & m'+1 \leqslant i \leqslant m'+1+n'\,, \end{cases}$$

de sorte que pour tout ensemble simplicial $X$ et tout $(m+1+n)$-simplexe $x$ de $X$, on a

$$(X_{\varphi\amalg\psi}(x))_{0,\dots,m'} = X_\varphi(x_{0,\dots,m}) \text{ et } (X_{\varphi\amalg\psi}(x))_{m'+1,\dots,m'+1+n'} = X_\psi(x_{m+1,\dots,m+1+n})\,.$$

Si $m' = m$ et $\varphi = 1_{\Delta_m}$, on note plus simplement $\varphi \amalg \psi = \Delta_m \amalg \psi$ et de même si $n' = n$ et $\psi = 1_{\Delta_n}$, on note $\varphi \amalg \psi = \varphi \amalg \Delta_n$. On remarque que $\Delta_m \amalg \Delta_n$ est la somme disjointe au niveau des ensembles sous-jacents, mais *n'est pas* la somme catégorique de $\Delta_m$ et $\Delta_n$ dans $\mathbf{\Delta}$ (qui n'existe pas). Les foncteurs $\Delta_0 \amalg ? : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta}$ et $? \amalg \Delta_0 : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{\Delta}$ sont connus sous les noms de *foncteurs de décalage vers la droite* et *vers la gauche* respectivement, et les foncteurs $\Delta_m \amalg ?$ et $? \amalg \Delta_n$ sont des *foncteurs de décalage itérés.*

***2.3.*** — Soient $Y$ un ensemble simplicial, $m \geqslant 0$, et $y$ un $m$-simplexe de $Y$. On définit des ensembles simpliciaux $y\backslash Y$ et $Y/y$ en posant, pour $n \geqslant 0$,

$$(y\backslash Y)_n = \{y' \in Y_{m+1+n} \mid y'_{0,\dots,m} = y\} = \{y' \in Y_{m+1+n} \mid Y_{i_{m,n}}(y') = y\}\,,$$

$$(Y/y)_n = \{y' \in Y_{n+1+m} \mid y'_{n+1,\dots,n+1+m} = y\} = \{y' \in Y_{n+1+m} \mid Y_{j_{n,m}}(y') = y\}\,,$$

les opérateurs simpliciaux étant définis de la façon suivante. Soit $\psi : \Delta_{n'} \to \Delta_n$ un morphisme de $\mathbf{\Delta}$. Si $y'$ est un $n$-simplexe de $y\backslash Y$, alors avec les notations 2.2, $(y\backslash Y)_\psi(y') = Y_{\Delta_m \amalg \psi}(y')$, et de même si $y'$ est un $n$-simplexe de $Y/y$, alors $(Y/y)_\psi(y') = Y_{\psi \amalg \Delta_m}(y')$. On a des morphismes canoniques

$$y\backslash Y \to Y \qquad \text{et} \qquad Y/y \to Y\,,$$

définis par les applications

$$(y\backslash Y)_n \to Y_n\,, \quad y' \mapsto y'_{m+1,\dots,m+1+n} \qquad \text{et} \qquad (Y/y)_n \to Y_n\,, \quad y' \mapsto y'_{0,\dots,n}\,.$$

Si $f : X \to Y$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux, on pose

$$y\backslash X = y\backslash Y \times_Y X \qquad \text{et} \qquad X/y = X \times_Y Y/y\,.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$(y\backslash X)_n = \{(y' \in Y_{m+1+n},\, x \in X_n) \mid y'_{0,\dots,m} = y,\, y'_{m+1,\dots,m+1+n} = f(x)\}\,,$$
$$(X/y)_n = \{(x \in X_n,\, y' \in Y_{n+1+m}) \mid y'_{0,\dots,n} = f(x),\, y'_{n+1,\dots,n+1+m} = y\}\,.$$

Le lemme suivant résulte de [**43**, chapitre 6, section 1] ; on en donne une preuve élémentaire.

***Lemme 2.4***. — *Pour tout ensemble simplicial $X$, tout $n \geqslant 0$, et tout $n$-simplexe $x$ de $X$, l'ensemble simplicial $X/x$ est contractile.*

*Démonstration.* — Le $(1+n)$-simplexe $X_{\sigma_0}(x)$ de $X$, où $\sigma_0 : \Delta_{1+n} \to \Delta_n$ est l'unique surjection croissante prenant deux fois la valeur 0, est un 0-simplexe de $X/x$ et définit donc un morphisme $\Delta_0 \to X/x$. On note $s$ le composé

$$s : X/x \to \Delta_0 \to X/x\,.$$

On définira une homotopie $h : \Delta_1 \times X/x \to X/x$ de $1_{X/x}$ vers $s$ comme suit, ce qui prouvera l'assertion. Soient $m \geqslant 0$ et $(\varphi, x')$,

$$\varphi : \Delta_m \to \Delta_1\,, \quad x' \in X_{m+1+n}\,, \qquad x'_{m+1,\dots,m+1+n} = x\,,$$

un $m$-simplexe de $\Delta_1 \times X/x$. On pose $h(\varphi, x') = X_{\theta_\varphi}(x')$, où $\theta_\varphi : \Delta_{m+1+n} \to \Delta_{m+1+n}$ est défini par

$$\theta_\varphi(i) = \begin{cases} i & 0 \leqslant i \leqslant m \quad \text{et} \quad \varphi(i) = 0\,, \\ m+1 & 0 \leqslant i \leqslant m \quad \text{et} \quad \varphi(i) = 1\,, \\ i & m+1 \leqslant i \leqslant m+1+n \quad , \end{cases}$$

et on vérifie aussitôt que $X_{\theta_\varphi}(x')$ est bien un $m$-simplexe de $X/x$, que si $\varphi = 0$, alors $X_{\theta_\varphi}(x') = x'$ et que si $\varphi = 1$, alors $X_{\theta_\varphi}(x') = s(x')$. Il reste donc à prouver que ces formules définissent un morphisme d'ensembles simpliciaux $h : \Delta_1 \times X/x \to X/x$. Soit $\psi : \Delta_{m'} \to \Delta_m$ ; il s'agit de montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} (\Delta_1 \times X/x)_m \arrow[r, "h"] \arrow[d, "(\Delta_1 \times X/x)_\psi"'] & (X/x)_m \arrow[d, "(X/x)_\psi"] \\ (\Delta_1 \times X/x)_{m'} \arrow[r, "h"'] & (X/x)_{m'} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Or, pour tout $m$-simplexe $(\varphi, x')$ de $\Delta_1 \times X/x$, on a

$$(X/x)_\psi h(\varphi, x') = (X/x)_\psi(X_{\theta_\varphi}(x')) = X_{\psi \amalg \Delta_n} X_{\theta_\varphi}(x') = X_{\theta_\varphi(\psi \amalg \Delta_n)}(x')\,,$$
$$h(\Delta_1 \times X/x)_\psi(\varphi, x') = h(\varphi\psi, X_{\psi \amalg \Delta_n}(x')) = X_{\theta_{\varphi\psi}} X_{\psi \amalg \Delta_n}(x') = X_{(\psi \amalg \Delta_n)\theta_{\varphi\psi}}(x')\,.$$

Il suffit donc de vérifier que $\theta_\varphi(\psi \amalg \varDelta_n) = (\psi \amalg \varDelta_n)\theta_{\varphi\psi}$. Or, pour tout entier $i$ tel que $0 \leqslant i \leqslant m' + 1 + n$, on a

$$(\psi \amalg \varDelta_n)\theta_{\varphi\psi}(i) = \begin{cases} (\psi \amalg \varDelta_n)(i) = \psi(i) & 0 \leqslant i \leqslant m' \quad \text{et} \quad \varphi\psi(i) = 0\,, \\ (\psi \amalg \varDelta_n)(m'+1) = m+1 & 0 \leqslant i \leqslant m' \quad \text{et} \quad \varphi\psi(i) = 1\,, \\ (\psi \amalg \varDelta_n)(i) = m+i-m' & m'+1 \leqslant i \leqslant m'+1+n \quad , \end{cases}$$

$$\theta_\varphi(\psi \amalg \varDelta_n)(i) = \begin{cases} \theta_\varphi\psi(i) = \begin{cases} \psi(i) & \varphi\psi(i) = 0 \\ m+1 & \varphi\psi(i) = 1 \end{cases} & 0 \leqslant i \leqslant m'\,, \\ \theta_\varphi(m+i-m') = m+i-m' & m'+1 \leqslant i \leqslant m'+1+n\,, \end{cases}$$

ce qui achève la démonstration. □

## 3. Rappels sur les complexes dirigés augmentés de Steiner

***3.1***. — On rappelle qu'un *complexe dirigé augmenté*, notion introduite par Steiner [**65**], est un triplet $(K, K^*, e)$, où

$$K = \qquad \cdots \xrightarrow{d_{i+1}} K_i \xrightarrow{d_i} K_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} K_1 \xrightarrow{d_1} K_0$$

est un complexe de chaînes de groupes abéliens en degrés positifs, $e : K_0 \to \mathbb{Z}$ une augmentation (de sorte que $d_i d_{i+1} = 0$ pour $i \geqslant 1$, et $ed_1 = 0$), et $K^* = (K_i^*)_{i \geqslant 0}$ est la donnée pour tout $i \geqslant 0$ d'un sous-monoïde $K_i^*$ du groupe abélien $K_i$. (On ne demande aucune compatibilité entre la différentielle ou l'augmentation et ces sous-monoïdes.) Les éléments de $K_i$ seront appelés des *$i$-chaînes* ou des *chaînes de degré $i$*.

Pour $i \geqslant 0$, le sous-monoïde $K_i^*$ induit une relation de préordre $\leqslant$ sur $K_i$, compatible avec sa structure de groupe, définie par

$$x \leqslant y \iff y - x \in K_i^*\,,$$

et alors on a l'égalité

$$K_i^* = \{x \in K_i \,|\, x \geqslant 0\}\,.$$

Ainsi, pour $i \geqslant 0$, on dira qu'une $i$-chaîne de $K$ est *positive* si elle appartient à $K_i^*$, et on appellera les sous-monoïdes $K_i^*$ les *sous-monoïdes de positivité* de $K$.

Un *morphisme de complexes dirigés augmentés* $f : (K, K^*, e) \to (K', K'^*, e')$ est un morphisme de complexes $f : K \to K'$ compatible à l'augmentation et aux sous-monoïdes de positivité (au sens où $e'f_0 = e$ et où pour tout $i \geqslant 0$, on a $f_i(K_i^*) \subset K_i'^*$, autrement dit $f_i$ envoie les $i$-chaînes positives de $K$ sur des $i$-chaînes positives de $K'$). On note $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$ la catégorie des complexes dirigés augmentés. On peut montrer que la catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$ est localement présentable. En particulier, elle admet des petites limites inductives et projectives. Le foncteur complexe sous-jacent commute aux limites inductives (pour la description des limites inductives dans $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$, voir [**10**, paragraphe 3.1]).

On désignera souvent, par abus de notation, un complexe dirigé augmenté par son complexe de chaînes sous-jacent.

*3.2.* — Dans [**65**], Steiner définit un couple de foncteurs adjoints

$$\lambda : \infty\text{-}\mathcal{C}at \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathrm{da}} \ , \qquad \nu : \mathcal{C}_{\mathrm{da}} \longrightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at\,.$$

Le foncteur $\lambda : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}_{\mathrm{da}}$ est défini de la façon suivante. Pour $C$ une $\infty$-catégorie et $i \geqslant 0$, le groupe abélien $\lambda(C)_i$ est engendré par les générateurs

$$[x], \qquad \text{pour } x \text{ une } i\text{-cellule de } C,$$

soumis aux relations

$$[x *_j y] = [x] + [y], \qquad \text{pour } 0 \leqslant j < i \text{ et } x \text{ et } y \text{ des } i\text{-cellules } j\text{-composables.}$$

Le sous-monoïde de positivité $\lambda(C)^*_i$ est le sous-monoïde engendré par les $[x]$, pour $x$ une $i$-cellule de $C$. Pour $i > 0$, la différentielle $d_i : \lambda(C)_i \to \lambda(C)_{i-1}$ est définie par

$$d([x]) = [t(x)] - [s(x)], \qquad \text{pour } x \text{ une } i\text{-cellule de } C.$$

Enfin, l'augmentation $\lambda(C)_0 \to \mathbb{Z}$ est l'unique morphisme qui envoie, pour toute 0-cellule $x$ de $C$, le générateur $[x]$ sur 1. Si $u : C \to D$ est un $\infty$-foncteur, pour tout $i \geqslant 0$, le morphisme de groupes abéliens $\lambda(u)_i : \lambda(C)_i \to \lambda(D)_i$ envoie un générateur $[x]$, pour $x$ une $i$-cellule de $C$, sur le générateur $[u(x)]$ de $\lambda(D)$.

Le foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\mathrm{da}} \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$ est défini de la façon suivante. Soit $K$ un complexe dirigé augmenté. Pour $i \geqslant 0$, les $i$-cellules de $\nu(K)$ sont les tableaux

$$\begin{pmatrix} x^0_0 & \dots & x^0_{i-1} & x^0_i \\ x^1_0 & \dots & x^1_{i-1} & x^1_i \end{pmatrix}$$

tels que

($a$) $x^\varepsilon_k$ est une $k$-chaîne positive de $K$, pour $\varepsilon = 0, 1$ et $0 \leqslant k \leqslant i$ ;
($b$) $d(x^\varepsilon_k) = x^1_{k-1} - x^0_{k-1}$, pour $\varepsilon = 0, 1$ et $0 < k \leqslant i$ ;
($c$) $e(x^\varepsilon_0) = 1$, pour $\varepsilon = 0, 1$ ;
($d$) $x^0_i = x^1_i$.

La structure de $\infty$-catégorie sur $\nu(K)$ est décrite comme suit. Soient $i \geqslant 0$ et

$$x = \begin{pmatrix} x^0_0 & \dots & x^0_{i-1} & x^0_i \\ x^1_0 & \dots & x^1_{i-1} & x^1_i \end{pmatrix}$$

une $i$-cellule de $\nu(K)$. Si $i > 0$, les sources et buts de $x$ sont les tableaux

$$s(x) = \begin{pmatrix} x^0_0 & \dots & x^0_{i-2} & x^0_{i-1} \\ x^1_0 & \dots & x^1_{i-2} & x^0_{i-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t(x) = \begin{pmatrix} x^0_0 & \dots & x^0_{i-2} & x^1_{i-1} \\ x^1_0 & \dots & x^1_{i-2} & x^1_{i-1} \end{pmatrix}$$

respectivement. Pour tout $i \geqslant 0$, l'identité de $x$ est le tableau

$$1_x = \begin{pmatrix} x^0_0 & \dots & x^0_i & 0 \\ x^1_0 & \dots & x^1_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, si

$$x = \begin{pmatrix} x_0^0 & \dots & x_{i-1}^0 & x_i^0 \\ x_0^1 & \dots & x_{i-1}^1 & x_i^1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} y_0^0 & \dots & y_{i-1}^0 & y_i^0 \\ y_0^1 & \dots & y_{i-1}^1 & y_i^1 \end{pmatrix}$$

sont deux $i$-cellules $j$-composables pour $i > j \geqslant 0$, on a

$$x *_j y = \begin{pmatrix} y_0^0 & \dots & y_j^0 & x_{j+1}^0 + y_{j+1}^0 & \dots & x_i^0 + y_i^0 \\ x_0^1 & \dots & x_j^1 & x_{j+1}^1 + y_{j+1}^1 & \dots & x_i^1 + y_i^1 \end{pmatrix}.$$

Si $f : K \to K'$ est un morphisme de complexes dirigés augmentés, le $\infty$-foncteur $\nu(f) : \nu(K) \to \nu(K')$ est défini par

$$\begin{pmatrix} x_0^0 & \dots & x_{i-1}^0 & x_i^0 \\ x_0^1 & \dots & x_{i-1}^1 & x_i^1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x_1^0) & \dots & f(x_{i-1}^0) & f(x_i^0) \\ f(x_1^1) & \dots & f(x_{i-1}^1) & f(x_i^1) \end{pmatrix}.$$

***Proposition 3.3* (Steiner).** — *Les foncteurs*

$$\lambda : \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}_{\mathrm{da}}, \qquad \nu : \mathcal{C}_{\mathrm{da}} \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$$

*forment un couple de foncteurs adjoints.*

*Démonstration.* — Voir [**65**, théorème 2.11]. □

***3.4.*** — Une *base* d'un complexe dirigé augmenté $K$ est un ensemble gradué $B = (B_i)_{i \geqslant 0}$ tel que, pour tout $i \geqslant 0$,

($a$) $B_i$ est une base du $\mathbb{Z}$-module $K_i$ ;
($b$) $B_i$ engendre le sous-monoïde $K_i^*$ de $K_i$.

Si un complexe dirigé augmenté $K$ admet une base $B$, on dira qu'il est *à base*, et alors pour tout $i \geqslant 0$, la relation de préordre sur $K_i$ définie par le sous-monoïde de positivité $K_i^*$ (voir le paragraphe 3.1) est une relation d'ordre, et $B_i$ est l'ensemble des éléments minimaux de $K_i^* \smallsetminus \{0\}$ pour cette relation d'ordre. Ainsi, si $K$ admet une base, cette base est unique et ne constitue pas une donnée supplémentaire.

Soit $K$ un complexe dirigé augmenté admettant une base $B$. Pour $i \geqslant 0$, toute $i$-chaîne $x$ de $K$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire à coefficients entiers d'éléments de $B_i$. Le *support* de $x$ est l'ensemble (fini) des éléments de $B_i$ ayant un coefficient non nul dans cette combinaison linéaire. Toute $i$-chaîne $x$ de $K$ s'écrit de façon unique comme différence de deux $i$-chaînes positives à supports disjoints, $x = x_+ - x_-$. On définit un tableau

$$\langle x \rangle = \begin{pmatrix} \langle x \rangle_0^0 & \langle x \rangle_1^0 & \dots & \langle x \rangle_{i-1}^0 & \langle x \rangle_i^0 \\ \langle x \rangle_0^1 & \langle x \rangle_1^1 & \dots & \langle x \rangle_{i-1}^1 & \langle x \rangle_i^1 \end{pmatrix},$$

où les $\langle x \rangle_k^\varepsilon$ sont définis par récurrence descendante sur $k$ de $i$ à $0$ :

– $\langle x \rangle_i^0 = x = \langle x \rangle_i^1$ ;
– $\langle x \rangle_{k-1}^0 = d(\langle x \rangle_k^0)_-$ et $\langle x \rangle_{k-1}^1 = d(\langle x \rangle_k^1)_+$ , pour $0 < k \leqslant i$ .

Ce tableau est une $i$-cellule de $\nu(K)$ si et seulement si, d'une part, $x$ est une $i$-chaîne positive et, d'autre part, on a les égalités $e(\langle x\rangle_0^0) = 1 = e(\langle x\rangle_0^1)$. On dit que la base $B$ de $K$ est *unitaire* si, pour tout $i \geqslant 0$ et tout $x$ dans $B_i$, le tableau $\langle x\rangle$ est une $i$-cellule de $\nu(K)$, ce qui revient à dire qu'on a l'égalité $e(\langle x\rangle_0^0) = 1 = e(\langle x\rangle_0^1)$. Si le complexe dirigé augmenté $K$ est à base unitaire, pour tout élément $x$ de la base de $K$, on appelle *atome* associé à $x$ la cellule $\langle x\rangle$ de $\nu(K)$. On remarque que l'ensemble des objets de $\nu(K)$ est alors formé des atomes $\langle x\rangle$, pour $x$ dans $B_0$.

Soit $K$ un complexe dirigé augmenté admettant une base $B$. On dit que la base $B$ est *sans boucles* si pour tout $i \geqslant 0$, il existe une relation d'ordre sur $B_i$ telle que pour tout $j > i$ et tout $b \in B_j$, tout élément de $B_i$ qui est dans le support de $\langle b\rangle_i^0$ précède ceux qui sont dans le support de $\langle b\rangle_i^1$ (voir [**67**] ; l'équivalence avec la définition donnée dans [**65**] est immédiate). On dit qu'elle est *fortement sans boucles* s'il existe une relation d'ordre sur $B$ telle que pour tout $i > 0$ et tout élément $b$ de $B_i$, tout élément du support de $d_i(b)_-$ précède $b$, et $b$ précède tout élément du support de $d_i(b)_+$. On notera $\preccurlyeq_K$ la plus petite relation de préordre sur $B$ satisfaisant à ces conditions. Ainsi, dire que $B$ est fortement sans boucles revient à dire que la relation de préordre $\preccurlyeq_K$ est une relation d'ordre. Si la base $K$ est fortement sans boucles, alors elle est sans boucles (voir [**65**, proposition 3.7]). On appellera *complexe de Steiner* (resp. *complexe de Steiner fort*) un complexe dirigé augmenté à base unitaire sans boucles (resp. fortement sans boucles).

***Théorème 3.5* (Steiner).** — *Pour tout complexe de Steiner $K$, le morphisme d'adjonction*

$$\lambda(\nu(K)) \to K$$

*est un isomorphisme. En particulier, la restriction du foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\mathrm{da}} \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$ à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$ formée des complexes de Steiner est un foncteur pleinement fidèle.*

*Démonstration.* — Voir [**65**, théorème 5.6]. □

***3.6.*** — Soit $C$ une $\infty$-catégorie. Pour tout $i \geqslant 0$, on note $\tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant i}(C)$ le *$i$-tronqué bête de* $C$, sous-$\infty$-catégorie de $C$ ayant, pour $0 \leqslant j \leqslant i$, les mêmes $j$-cellules que $C$, et pour $j > 0$, que des $j$-cellules unités.

Soit $E$ un ensemble de cellules de $C$, et posons $E_i = E \cap C_i$. On dit que $C$ est *engendrée librement au sens des polygraphes par $E$* si

($a$) $E_0 = C_0$ ;

($b$) pour tout $i \geqslant 0$, toute $\infty$-catégorie $D$, tout $\infty$-foncteur $u : \tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant i}(C) \to D$ et toute application $f : E_{i+1} \to D_{i+1}$ *compatible à la formation des sources et buts*, autrement dit telle que, pour tout $x$ dans $E_{i+1}$, on ait

$$s(f(x)) = u(s(x)) \quad \text{et} \quad t(f(x)) = u(t(x)),$$

il existe un unique $\infty$-foncteur $u' : \tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant i+1}(C) \to D$ tel que

$$u'|\tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant i}(C) = u \quad \text{et} \quad u'|E_{i+1} = f.$$

***Théorème 3.7*** **(Steiner)**. — *Soit $K$ un complexe de Steiner. Alors la $\infty$-catégorie $\nu(K)$ est engendrée librement au sens des polygraphes par ses atomes, autrement dit, par les $\langle x\rangle$, où $x$ varie dans la base de $K$.*

*Démonstration.* — Voir [**65**, théorème 6.1]. □

***3.8***. — Soit $f : K \to L$ un morphisme de complexes dirigés augmentés à base. On dira que $f$ est un *monomorphisme rigide* s'il est un monomorphisme envoyant tout élément de la base de $K$ sur un élément de la base de $L$.

***Proposition 3.9***. — *Soient $K, L, M$ trois complexes de Steiner forts, de bases respectives $B^K, B^L, B^M$, et $M \to K$ et $M \to L$ deux monomorphismes rigides. On suppose que la relation d'ordre $\preccurlyeq_M$ sur $B^M$ est une relation d'ordre total. Alors :*

(a) *Le complexe dirigé augmenté $K \amalg_M L$ est un complexe de Steiner fort de base $B^K \amalg_{B^M} B^L$.*
(b) *Le $\infty$-foncteur canonique $\nu(K) \amalg_{\nu(M)} \nu(L) \to \nu(K \amalg_M L)$ est un isomorphisme de $\infty$-$\mathcal{C}at$.*

*Démonstration.* — Voir [**10**, proposition 3.6 et corollaire 3.20]. □

***3.10***. — À tout ensemble simplicial $X$, on associe un complexe dirigé augmenté $\mathsf{c}X$ comme suit. Le complexe sous-jacent à $\mathsf{c}X$ est le complexe de chaînes normalisé de $X$, qui a comme base les simplexes non dégénérés de $X$. Les sous-monoïdes de positivité sont les sous-monoïdes engendrés par les simplexes non dégénérés. L'augmentation associe à un 0-simplexe l'entier 1. On en déduit un foncteur $\mathsf{c} : \widehat{\boldsymbol{\Delta}} \to \mathcal{C}_{\mathrm{da}}$. On remarque que pour tout ensemble simplicial $X$, le complexe dirigé augmenté $\mathsf{c}X$ est à base, et que cette base est formée des simplexes non dégénérés de $X$.

On va s'intéresser plus particulièrement à la restriction de ce foncteur à $\boldsymbol{\Delta}$. Pour $m \geqslant 0$, le complexe dirigé augmenté $\mathsf{c}\Delta_m$ se décrit comme suit. Pour $p \geqslant 0$, un $p$-simplexe non dégénéré de l'ensemble simplicial représentable $\Delta_m$ est une application strictement croissante $\Delta_p \to \Delta_m$. Ainsi, pour $p \geqslant 0$, $(\mathsf{c}\Delta_m)_p$ (resp. $(\mathsf{c}\Delta_m)^*_p$) s'identifie au groupe (resp. au monoïde) commutatif libre engendré par la famille des $(p+1)$-uplets

$$(i_0, i_1, \dots, i_p)\,, \quad 0 \leqslant i_0 < i_1 < \cdots < i_p \leqslant m\,.$$

La différentielle est définie par

$$d(i_0, i_1, \dots, i_p) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant p} (-1)^k (i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_p)\,, \quad p > 0\,,$$

où $(i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_p) = (i_0, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_p)$, et l'augmentation par $e(i_0) = 1$. On remarque que pour $p > m$, on a $\mathsf{c}(\Delta_m)_p = 0$. Le complexe dirigé augmenté $\mathsf{c}\Delta_m$

est un complexe de Steiner fort, et de plus, la relation $\preccurlyeq_{\mathsf{c}\Delta_m}$ est une relation d'ordre *total* (voir [**69**, corollaire 6.1] et [**65**, exemple 3.8]).

Si $\varphi : \Delta_m \to \Delta_n$ est un morphisme de $\mathbf{\Delta}$, le morphisme $\mathsf{c}(\varphi) : \mathsf{c}\Delta_m \to \mathsf{c}\Delta_n$ est défini par

$$(i_0, \dots, i_p) \mapsto (\varphi(i_0), \dots, \varphi(i_p))\,, \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant m\,, \quad p \geqslant 0\,,$$

avec la convention que pour $0 \leqslant j_0 \leqslant \dots \leqslant j_p \leqslant n$, s'il existe $k$ tel que $0 \leqslant k < p$ et tel que $j_k = j_{k+1}$, alors $(j_0, \dots, j_p) = 0$.

***3.11***. — En composant la restriction à $\mathbf{\Delta}$ du foncteur $\mathsf{c}$ avec le foncteur $\nu$, on obtient un objet cosimplicial

$$\mathbf{\Delta} \xrightarrow{\mathsf{c}|\mathbf{\Delta}} \mathcal{C}_{\mathrm{da}} \xrightarrow{\nu} \infty\text{-}\mathcal{C}at$$

dans $\infty$-$\mathcal{C}at$, l'objet cosimplicial $\mathcal{O}$ des orientaux de Street [**68, 69, 65, 66**]. Pour $n \geqslant 0$, la $\infty$-catégorie $\mathcal{O}_n$ est une $n$-catégorie, autrement dit les $i$-cellules de $\mathcal{O}_n$ pour $i > n$ sont des unités. En basse dimension, on a

$$\mathcal{O}_0 = \Delta_0 = \{0\}\,,$$

$$\mathcal{O}_1 = \Delta_1 = 0 \longrightarrow 1\,,$$

$$\mathcal{O}_2 = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\Uparrow"] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr] & {} & 2 \end{tikzcd}\,,$$

$$\mathcal{O}_3 = \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\Uparrow"] & & & & 1 \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & {} & 2 & \Rrightarrow & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\Nearrow"] & {} & 2 \arrow[l, phantom, "\Rightarrow"] \\ & 3 \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "\Nearrow"] & & & & 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}\,.$$

Pour la description explicite des $n$-catégories $\mathcal{O}_n$ pour $4 \leqslant n \leqslant 6$, voir [**68**].

L'objet cosimplicial des orientaux définit un foncteur nerf

$$N_\infty : \infty\text{-}\mathcal{C}at \longrightarrow \widehat{\mathbf{\Delta}}\,, \qquad C \longmapsto (\Delta_m \mapsto \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\mathcal{O}_m, C) = \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(\nu\mathsf{c}\Delta_m, C))\,,$$

le nerf de Street [**68**]. On vérifie facilement que si $C$ est une catégorie, considérée comme $\infty$-catégorie dont les $i$-cellules sont des unités pour $i > 1$, on a $N_\infty(C) = N(C)$. Ainsi, pour alléger la notation, on notera aussi $N$ le nerf de Street $N_\infty$. On définit les *équivalences faibles* dans $\infty$-$\mathcal{C}at$ comme étant les $\infty$-foncteurs dont le nerf de Street est une équivalence faible simpliciale.

***3.12***. — On définit le produit tensoriel $K \otimes L$ de deux complexes dirigés augmentés $K$ et $L$ comme suit. Le complexe sous-jacent à $K \otimes L$ est le produit tensoriel des complexes sous-jacents à $K$ et $L$, de sorte qu'en particulier, on a

$$(K \otimes L)_p = \bigoplus_{\substack{i+j=p \\ i \geqslant 0,\, j \geqslant 0}} K_i \otimes L_j\,, \qquad \text{pour } p \geqslant 0\,.$$

Pour $p \geqslant 0$, le sous-monoïde de positivité $(K \otimes L)^*_p$ est le sous-monoïde de $(K \otimes L)_p$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes y$, avec $x$ dans $K^*_i$, $y$ dans $L^*_j$ et $i + j = p$. L'augmentation $e : (K \otimes L)_0 = K_0 \otimes L_0 \to \mathbb{Z}$ est définie par $e(x \otimes y) = e(x)e(y)$, pour $x$ dans $K_0$ et $y$ dans $L_0$.

***Proposition 3.13***. — *Si $K$ et $L$ sont deux complexes de Steiner forts, il en est de même pour $K \otimes L$.*

*Démonstration.* — Voir [**65**, exemple 3.10]. □

***3.14***. — La catégorie $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$, munie du produit tensoriel $\otimes$, est une catégorie monoïdale, d'objet unité $\mathsf{c}\Delta_0$. En vertu de la proposition précédente, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$ formée des complexes de Steiner forts en est une sous-catégorie monoïdale.

***Théorème 3.15***. — *Il existe une structure de catégorie monoïdale sur $\infty\text{-}\mathcal{C}at$, unique à isomorphisme monoïdal près, de produit*

$$\otimes : \infty\text{-}\mathcal{C}at \times \infty\text{-}\mathcal{C}at \longrightarrow \infty\text{-}\mathcal{C}at\,,$$

*satisfaisant aux deux conditions suivantes :*

(a) *le foncteur $\otimes : \infty\text{-}\mathcal{C}at \times \infty\text{-}\mathcal{C}at \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$ commute aux petites limites inductives en chaque variable ;*

(b) *la restriction du foncteur $\nu : \mathcal{C}_{\mathrm{da}} \to \infty\text{-}\mathcal{C}at$ à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{\mathrm{da}}$ formée des complexes de Steiner forts est un foncteur monoïdal.*

*En particulier, l'unité de cette structure monoïdale sur $\infty\text{-}\mathcal{C}at$ est la $\infty$-catégorie ponctuelle $\mathcal{O}_0 = \nu\mathsf{c}\Delta_0$.*

*Démonstration.* — Voir [**10**, théorème A.15]. □

Le produit tensoriel du théorème précédent a été construit pour la première fois par Al-Agl et Steiner [**1**], généralisant une construction analogue pour les $\infty$-groupoïdes due à Brown et Higgins [**19**]. Deux autres constructions sont données par Crans dans sa thèse [**29**].

## 4. Transformations oplax et tranches $\infty$-catégoriques

On va adopter la convention suivante pour les opérations de composition dans une $\infty$-catégorie. Si $i < j$, l'opération $*_i$ sera prioritaire sur l'opération $*_j$. Par exemple :

$$u *_0 v *_1 w *_2 x *_1 y *_0 z = \big((u *_0 v) *_1 w\big) *_2 \big(x *_1 (y *_0 z)\big)\,,$$

lorsque le membre de droite a un sens.

*4.1.* — Soient $C$ une $\infty$-catégorie et $c$ un objet de $C$. La $\infty$-catégorie ${}_{c\backslash}C$ se décrit comme suit. De façon informelle, les objets, 1-cellules et 2-cellules de ${}_{c\backslash}C$ sont respectivement les diagrammes de la forme

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "\alpha_1"'] \\
a_0
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "\alpha_1^0"'] \arrow[dr, "\alpha_1^1"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow \alpha_2"] & \\
a_0^0 \arrow[rr, "a_1"'] & & a_0^1
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
& c \arrow[dl, "\alpha_1^0"'] \arrow[dr, "\alpha_1^1"] \arrow[d, phantom, "\alpha_2^0 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2^1"] & \\
a_0^0 \arrow[rr, dotted, bend left, "a_1^0"] \arrow[rr, bend right, "a_1^1"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow a_2"] & & a_0^1
\end{tikzcd}
\quad .
$$

Plus formellement, pour $i \geqslant 0$, les $i$-cellules de ${}_{c\backslash}C$ sont les tableaux

$$
(a, \alpha) = \begin{pmatrix} (a_0^0, \alpha_1^0) & \cdots & (a_{i-1}^0, \alpha_i^0) & (a_i^0, \alpha_{i+1}^0) \\ (a_0^1, \alpha_1^1) & \cdots & (a_{i-1}^1, \alpha_i^1) & (a_i^1, \alpha_{i+1}^1) \end{pmatrix}
$$

avec $a_i^0 = a_i^1$, $\alpha_{i+1}^0 = \alpha_{i+1}^1$, où pour $\varepsilon = 0, 1$, $a_0^\varepsilon$ est un objet de $C$ et

$$
\begin{aligned}
&a_k^\varepsilon : a_{k-1}^0 \longrightarrow a_{k-1}^1 \,, && 0 < k \leqslant i \,, \\
&\alpha_k^\varepsilon : \alpha_{k-1}^1 \longrightarrow a_{k-1}^\varepsilon *_0 \alpha_1^0 *_1 \cdots *_{k-2} \alpha_{k-1}^0 \,, && 0 < k \leqslant i + 1 \,,
\end{aligned}
$$

sont des $k$-cellules de $C$, où par convention, on a posé $\alpha_0^1 = c$, de sorte que pour $k = 1$, on a $\alpha_1^\varepsilon : c \to a_0^\varepsilon$. On posera souvent $a_i = a_i^0 = a_i^1$ et $\alpha_{i+1} = \alpha_{i+1}^0 = \alpha_{i+1}^1$ Les tableaux correspondant aux diagrammes du début du paragraphe sont respectivement

$$
\begin{pmatrix} (a_0, \alpha_1) \\ (a_0, \alpha_1) \end{pmatrix}, \qquad
\begin{pmatrix} (a_0^0, \alpha_1^0) & (a_1, \alpha_2) \\ (a_0^1, \alpha_1^1) & (a_1, \alpha_2) \end{pmatrix}, \qquad
\begin{pmatrix} (a_0^0, \alpha_1^0) & (a_1^0, \alpha_2^0) & (a_2, \alpha_3) \\ (a_0^1, \alpha_1^1) & (a_1^1, \alpha_2^1) & (a_2, \alpha_3) \end{pmatrix}.
$$

Si $i > 0$, la source de la $i$-cellule $(a, \alpha)$ de ${}_{c\backslash}C$ est le tableau

$$
s(a, \alpha) = \begin{pmatrix} (a_0^0, \alpha_1^0) & \cdots & (a_{i-2}^0, \alpha_{i-1}^0) & (a_{i-1}^0, \alpha_i^0) \\ (a_0^1, \alpha_1^1) & \cdots & (a_{i-2}^1, \alpha_{i-1}^1) & (a_{i-1}^0, \alpha_i^0) \end{pmatrix}
$$

et le but le tableau

$$
t(a, \alpha) = \begin{pmatrix} (a_0^0, \alpha_1^0) & \cdots & (a_{i-2}^0, \alpha_{i-1}^0) & (a_{i-1}^1, \alpha_i^1) \\ (a_0^1, \alpha_1^1) & \cdots & (a_{i-2}^1, \alpha_{i-1}^1) & (a_{i-1}^1, \alpha_i^1) \end{pmatrix}.
$$

Pour $i \geqslant 0$, l'unité de $(a, \alpha)$ est le tableau

$$
1_{(a,\alpha)} = \begin{pmatrix} (a_0^0, \alpha_1^0) & \cdots & (a_{i-1}^0, \alpha_i^0) & (a_i^0, \alpha_{i+1}^0) & (1_{a_i^0}, 1_{\alpha_{i+1}^0}) \\ (a_0^1, \alpha_1^1) & \cdots & (a_{i-1}^1, \alpha_i^1) & (a_i^1, \alpha_{i+1}^1) & (1_{a_i^1}, 1_{\alpha_{i+1}^1}) \end{pmatrix}.
$$

Pour $j$ un entier, $0 \leqslant j < i$, et

$$
(b, \beta) = \begin{pmatrix} (b_0^0, \beta_1^0) & \cdots & (b_{i-1}^0, \beta_i^0) & (b_i^0, \beta_{i+1}^0) \\ (b_0^1, \beta_1^1) & \cdots & (b_{i-1}^1, \beta_i^1) & (b_i^1, \beta_{i+1}^1) \end{pmatrix}
$$

une deuxième $i$-cellule, $j$-composable avec $(a,\alpha)$, autrement dit telle que

$$a^\varepsilon_k = b^\varepsilon_k\,,\ \alpha^\varepsilon_{k+1} = \beta^\varepsilon_{k+1}\,,\quad \varepsilon = 0,1\,,\ 0 \leqslant k < j\,,\quad \text{et}\quad a^0_j = b^1_j\,,\ \alpha^0_{j+1} = \beta^1_{j+1}\,,$$

la $j$-composition est définie par le tableau

$$(a,\alpha){*_j}(b,\beta) = \begin{pmatrix} (b^0_0,\beta^0_1) & \cdots & (b^0_j,\beta^0_{j+1}) & (a^0_{j+1} *_j b^0_{j+1}, \gamma^0_{j+2}) & \cdots & (a^0_i *_j b^0_i, \gamma^0_{i+1}) \\ (a^1_0,\alpha^1_1) & \cdots & (a^1_j,\alpha^1_{j+1}) & (a^1_{j+1} *_j b^1_{j+1}, \gamma^1_{j+2}) & \cdots & (a^1_i *_j b^1_i, \gamma^1_{i+1}) \end{pmatrix},$$

où pour $\varepsilon = 0,1$,

$$\begin{aligned} \gamma^\varepsilon_{j+2} &= a^\varepsilon_{j+1} *_0 \beta^0_1 *_1 \cdots *_{j-1} \beta^0_j *_j \beta^\varepsilon_{j+2} *_{j+1} \alpha^\varepsilon_{j+2}\,, \\ \gamma^\varepsilon_k &= a^1_{j+1} *_0 \beta^0_1 *_1 \cdots *_{j-1} \beta^0_j *_j \beta^\varepsilon_k *_{j+1} \alpha^\varepsilon_k\,, \qquad j+2 < k \leqslant i+1\,. \end{aligned}$$

On remarquera que l'information contenue dans les tableaux représentant les cellules de ${}_c\backslash C$ est largement redondante. La $i$-cellule $(a,\alpha)$ est déjà déterminée par les cellules $\alpha^0_1,\dots,\alpha^0_{i+1}$ et $a^0_i$ de $C$. En effet, pour $0 \leqslant k < i$, on a $a^0_k = s_k(a^0_i)$, $a^1_k = t_k(a^0_i)$ et pour $0 < k \leqslant i$, on a $\alpha^1_k = s(\alpha^0_{k+1})$. Néanmoins, cette représentation est plus symétrique et rend plus simples les formules exprimant la source, le but, l'unité et la composition des cellules. De plus, elle rappelle la représentation par tableaux des cellules de $\nu(K)$, pour $K$ un complexe dirigé augmenté, ce qui n'est pas fortuit.

On a un $\infty$-foncteur d'oubli ${}_c\backslash C \to C$, défini par $(a,\alpha) \mapsto a_i = a^0_i = a^1_1$. Pour tout $\infty$-foncteur $A \to C$, on pose ${}_c\backslash A = {}_c\backslash C \times_C A$. Ainsi, les $i$-cellules de ${}_c\backslash A$ sont données par des tableaux du même type

$$(a,\alpha) = \begin{pmatrix} (a^0_0,\alpha^0_1) & \cdots & (a^0_{i-1},\alpha^0_i) & (a^0_i,\alpha^0_{i+1}) \\ (a^1_0,\alpha^1_1) & \cdots & (a^1_{i-1},\alpha^1_i) & (a^1_i,\alpha^1_{i+1}) \end{pmatrix},$$

mais où cette fois-ci, pour $\varepsilon = 0,1$, $a^\varepsilon_0$ est un objet de $A$, pour $0 < k \leqslant i$,

$$a^\varepsilon_k : a^0_{k-1} \longrightarrow a^1_{k-1}$$

est une $k$-cellule de $A$, et pour $0 < k \leqslant i+1$

$$\alpha^\varepsilon_k : \alpha^1_{k-1} \longrightarrow u(a^\varepsilon_{k-1}) *_0 \alpha^0_1 *_1 \cdots *_{k-2} \alpha^0_{k-1}$$

est une $k$-cellule de $C$, toujours en posant par convention $\alpha^1_0 = c$, de sorte que pour $k=1$, on a $\alpha^\varepsilon_1 : c \to u(a^\varepsilon_0)$. Les formules pour les sources, buts, unités et compositions sont tout à fait analogues à celles pour ${}_c\backslash C$.

*4.2.* — Soient $u,v : A \to C$ deux $\infty$-foncteurs de même source et même but. Une prétransformation oplax de $u$ vers $v$ consiste en la donnée, pour tout $i \geqslant 0$ et toute $i$-cellule $a$ de $A$, d'une $(i+1)$-cellule

$$\alpha_a : \alpha_{t_{i-1}(a)} *_{i-1} \cdots *_1 \alpha_{t_0(a)} *_0 u(a) \longrightarrow v(a) *_0 \alpha_{s_0(a)} *_1 \cdots *_{i-1} \alpha_{s_{i-1}(a)}$$

de $C$. Ainsi, si $a$ est un objet de $A$, on dispose d'une 1-cellule

$$\begin{tikzcd}
u(a) \arrow[d, "\alpha_a"'] \\
v(a)
\end{tikzcd}$$

de $C$ ; si $a$ est une 1-cellule de $A$, on dispose d'une 2-cellule

$$\begin{tikzcd}
u(s_0(a)) \arrow[r, "u(a)"] \arrow[d, "\alpha_{s_0(a)}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha_a}{\swarrow}"] & u(t_0(a)) \arrow[d, "\alpha_{t_0(a)}"] \\
v(s_0(a)) \arrow[r, "v(a)"'] & v(t_0(a))
\end{tikzcd}$$

de $C$ ; si $a$ est une 2-cellule de $A$, on dispose d'une 3-cellule

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge]
u(s_0(a)) \arrow[r, bend left, "u(s_1(a))"] \arrow[r, bend right, "u(t_1(a))"'] \arrow[r, phantom, "u(a)\Downarrow"] \arrow[d, "\alpha_{s_0(a)}"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha_{s_1(a)} \quad \alpha_a \quad \alpha_{t_1(a)}"] & u(t_0(a)) \arrow[d, "\alpha_{t_0(a)}"] \\
v(s_0(a)) \arrow[r, bend left, dotted, "v(s_1(a))"] \arrow[r, bend right, "v(t_1(a))"'] \arrow[r, phantom, "v(a)\Downarrow"] & v(t_0(a))
\end{tikzcd}$$

de $C$ de source $\alpha_{t_1(a)} *_1 (\alpha_{t_0(a)} *_0 u(a))$ et de but $(v(a) *_0 \alpha_{s_0(a)}) *_1 \alpha_{s_1(a)}$ ; etc.

Une telle prétransformation oplax est une *transformation oplax* si elle satisfait aux axiomes de fonctorialité suivants :

($a$) pour tout $i \geqslant 0$ et toute $i$-cellule $a$ de $A$, on a

$$\alpha_{1_a} = 1_{\alpha_a} ;$$

($b$) pour tous $i > j \geqslant 0$ et tout couple $a, b$ de $i$-cellules $j$-composables de $A$, on a

$$\begin{aligned}\alpha_{a *_j b} = \big(&v(t_{j+1}(a)) *_0 \alpha_{s_0(b)} *_1 \cdots *_{j-1} \alpha_{s_{j-1}(b)} *_j \alpha_b\big) \\ &*_{j+1} \big(\alpha_a *_j \alpha_{t_{j-1}(a)} *_{j-1} \cdots *_1 \alpha_{t_0(a)} *_0 u(s_{j+1}(b))\big) .\end{aligned}$$

Si $\alpha$ est une transformation oplax de $u$ vers $v$ et $f : A' \to A$ un $\infty$-foncteur, on vérifie immédiatement qu'on définit une transformation oplax $\alpha * f$ de $uf$ vers $vf$ en posant pour $a$ une cellule de $A'$, $(\alpha * f)_a = \alpha_{f(a)}$. De même, pour tout $\infty$-foncteur $g : C \to C'$, on définit une transformation oplax $g * \alpha$ de $gu$ vers $gv$ en posant pour $a$ une cellule de $A$, $(g * \alpha)_a = g(\alpha_a)$.

La proposition suivante résulte de [**10**, corollaire B.5.3]. On en donne ici l'esquisse d'une preuve élémentaire.

***Proposition 4.3.*** — *Soient $u : A \to C$ un $\infty$-foncteur et $c$ un objet de $C$. Pour toute $\infty$-catégorie $X$, on a une bijection canonique naturelle de l'ensemble des $\infty$-foncteurs de $X$ vers ${}_{c\backslash}A$ sur l'ensemble des couples $(a, \alpha)$ formés d'un $\infty$-foncteur $a : X \to A$ et d'une transformation oplax $\alpha : c \to ua$, où $c$ désigne aussi le $\infty$-foncteur constant de $X$ vers $C$ de valeur $c$.*

*Démonstration.* — Soit $a : X \to A$ un $\infty$-foncteur. Une prétransformation de $c$ vers $ua$ consiste en la donnée, pour tout $i \geqslant 0$ et toute $i$-cellule $x$ de $X$, d'une $(i+1)$-cellule

$$\alpha_x : \alpha_{t_{i-1}(x)} *_{i-1} \cdots *_1 \alpha_{t_0(x)} *_0 c(x) \longrightarrow ua(x) *_0 \alpha_{s_0(x)} *_1 \cdots *_{i-1} \alpha_{s_{i-1}(x)}$$

de $C$. Si $i = 0$, la source de la 1-cellule $\alpha_x$ est $c$ et son but $ua(x)$. Pour $i > 0$, comme $c$ est le foncteur constant de valeur $c$, la source de la $(i+1)$-cellule $\alpha_x$ est la $i$-cellule $\alpha_{t_{i-1}(x)} *_{i-1} \alpha_{t_{i-2}(x)} *_{i-2} \cdots *_1 \alpha_{t_0(x)} *_0 1^i_c$ de $C$, où $1^i_c$ désigne la $i$-cellule unité itérée de l'objet $c$. Or, la $i$-cellule $\alpha_{t_{i-2}(x)} *_{i-2} \cdots *_1 \alpha_{t_0(x)} *_0 1^i_c$ est l'unité d'une $(i-1)$-cellule, et par suite, la source de $\alpha_x$ est égale à $\alpha_{t_{i-1}(x)}$. Ainsi, $\alpha_x$ est une $(i+1)$-cellule

$$\alpha_x : \alpha_{t_{i-1}(x)} \longrightarrow ua(x) *_0 \alpha_{s_0(x)} *_1 \cdots *_{i-1} \alpha_{s_{i-1}(x)} .$$

Par définition, pour que la prétransformation oplax $\alpha$ soit une transformation oplax, il faut et il suffit, d'une part, que pour tout $i \geqslant 0$ et toute $i$-cellule $x$ de $X$, on ait $\alpha_{1_x} = 1_{\alpha_x}$, et d'autre part, que pour tous $i > j \geqslant 0$ et tout couple $x, y$ de $i$-cellules $j$-composables de $X$, on ait

$$\begin{aligned}\alpha_{x *_j y} = \big(ua(t_{j+1}(x)) *_0 \alpha_{s_0(y)} *_1 \cdots *_{j-1} \alpha_{s_{j-1}(y)} *_j \alpha_y\big) \\ *_{j+1} \big(\alpha_x *_j \alpha_{t_{j-1}(x)} *_{j-1} \cdots *_1 \alpha_{t_0(x)} *_0 1^{j+1}_c\big) .\end{aligned}$$

Or, la $(j+1)$-cellule $\alpha_{t_{j-1}(x)} *_{j-1} \cdots *_1 \alpha_{t_0(x)} *_0 1^{j+1}_c$ est l'unité d'une $j$-cellule de $C$, et par suite, cette deuxième condition est équivalente à

$$\alpha_{x *_j y} = ua(t_{j+1}(x)) *_0 \alpha_{s_0(y)} *_1 \cdots *_{j-1} \alpha_{s_{j-1}(y)} *_j \alpha_y *_{j+1} \alpha_x .$$

Il résulte alors facilement de ces considérations qu'en associant, pour $i \geqslant 0$, à toute $i$-cellule $x$ de $X$, le tableau

$$\begin{pmatrix} \big(a(s_0(x)), \alpha_{s_0(x)}\big) & \cdots & \big(a(s_{i-1}(x)), \alpha_{s_{i-1}(x)}\big) & \big(a(x), \alpha_x\big) \\ \big(a(t_0(x)), \alpha_{t_0(x)}\big) & \cdots & \big(a(t_{i-1}(x)), \alpha_{t_{i-1}(x)}\big) & \big(a(x), \alpha_x\big) \end{pmatrix},$$

on définit un $\infty$-foncteur $X \to {}_{c\backslash}A$, et on établit ainsi une bijection de l'ensemble des couples $(a, \alpha)$, formés d'un $\infty$-foncteur $a : X \to A$ et d'une transformation oplax $\alpha : c \to ua$, sur l'ensemble des $\infty$-foncteurs de $X$ vers ${}_{c\backslash}A$. La naturalité en $X$ de cette bijection est évidente. $\square$

***Proposition 4.4.*** — *Soient $u, v : A \to C$ deux $\infty$-foncteurs de même source et même but. On a une bijection canonique naturelle entre l'ensemble des transformations oplax de $u$ vers $v$ et l'ensemble des $\infty$-foncteurs $h : \Delta_1 \otimes A \to C$ rendant* *commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \otimes A \simeq A \arrow[dr, hook] \arrow[drr, bend left, "u"] & & \\
& \Delta_1 \otimes A \arrow[r, "h"] & C \\
\{1\} \otimes A \simeq A \arrow[ur, hook] \arrow[urr, bend right, "v"'] & &
\end{tikzcd} .$$

*Démonstration.* — Voir [**10**, corollaire B.2.6]. □

On notera souvent par la même lettre une transformation oplax et le $\infty$-foncteur correspondant par la proposition précédente. Avec cet abus de notation, si $\alpha$ est une transformation oplax entre deux $\infty$-foncteurs de source $A$ et de but $C$, et si $a : A' \to A$ et $c : C \to C'$ sont des $\infty$-foncteurs, on a les égalités $\alpha * a = \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a)$ et $c * \alpha = c\alpha$, où dans les membres de gauche $\alpha$ est vue comme une transformation oplax et dans les membres de droite comme un $\infty$-foncteur.

***4.5.*** — Soient $u, v, w : A \to C$ trois $\infty$-foncteurs de même source et même but, $\alpha$ une transformation oplax de $u$ vers $v$ et $\beta$ une transformation oplax de $v$ vers $w$. On définit une transformation oplax $\beta\alpha$ de $u$ vers $w$, *composé vertical* de $\beta$ avec $\alpha$, comme suit. On forme dans $\infty$-$\mathcal{C}at$ la somme amalgamée $\Delta_1 \amalg_{\Delta_0} \Delta_1$, où $\Delta_0$ s'envoie dans le terme de gauche (resp. de droite) de la somme amalgamée par $0 \mapsto 0$ (resp. par $0 \mapsto 1$). On définit $\delta : \Delta_1 \to \Delta_1 \amalg_{\Delta_0} \Delta_1$ en envoyant 0 (resp. 1) sur l'objet 0 du terme de droite (resp. sur l'objet 1 du terme de gauche) et on pose $\beta\alpha = (\beta, \alpha)(\delta \otimes 1_A)$

$$\Delta_1 \otimes A \xrightarrow{\delta \otimes 1_A} (\Delta_1 \amalg_{\Delta_0} \Delta_1) \otimes A \simeq (\Delta_1 \otimes A) \amalg_A (\Delta_1 \otimes A) \xrightarrow{(\beta,\alpha)} C \ .$$

On remarquera qu'en vertu du théorème 3.5, de la proposition 3.9 et des paragraphes 3.10 et 3.11, $\delta : \Delta_1 \to \Delta_1 \amalg_{\Delta_0} \Delta_1$ s'identifie à l'image par le foncteur $\nu$ du morphisme de complexes dirigés augmentés $\lambda(\delta) : \mathsf{c}\Delta_1 \to \mathsf{c}\Delta_1 \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}\Delta_1$.

On se gardera de croire que cette composition verticale et les compositions d'une transformation oplax à gauche ou à droite par un $\infty$-foncteur (voir le paragraphe 4.2) satisfont à la « règle de Godement ». Autrement dit, si

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & B \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & C
\end{tikzcd}$$

est un diagramme de $\infty$-catégories, $\infty$-foncteurs et transformations oplax, on *n'a pas* en général l'égalité $(k * \alpha)(\beta * f) = (\beta * g)(h * \alpha)$. En particulier, le composé horizontal $\beta * \alpha$ *n'est pas* défini. Ainsi, les $\infty$-catégories, $\infty$-foncteurs et transformations oplax *ne forment pas* une 2-catégorie, mais seulement ce qu'on appelle une sesquicatégorie.

***Proposition 4.6.*** — *Soient $u : A \to C$ un $\infty$-foncteur et $c$ un objet de $C$. On a un isomorphisme canonique d'ensembles simpliciaux $N({}_{c\backslash}A) \simeq {}_{c\backslash}N(A)$, où $c$ désigne aussi le 0-simplexe de $N(C)$ correspondant au $\infty$-foncteur, de source la $\infty$-catégorie ponctuelle $\mathcal{O}_0$ et de but $C$, défini par l'objet $c$ de $C$.*

*Démonstration.* — Pour commencer, on va définir, pour tout $n \geqslant 0$, une application $\theta_n : ({}_{c\backslash}N(A))_n \to (N({}_{c\backslash}A))_n$ comme suit. Soit $(c', a)$

$$c' : \mathcal{O}_{1+n} \to C\,, \quad a : \mathcal{O}_n \to A\,, \qquad c'_0 = c\,, \quad c'_{1,\dots,n} = ua\,,$$

un $n$-simplexe de ${}_{c\backslash}N(A)$. On va définir un morphisme de complexes dirigés augmentés

$$\pi_n : \mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n \to \mathsf{c}\Delta_{1+n}\,,$$

d'où en vertu du théorème 3.15, de la proposition 3.13, et des paragraphes 3.10 et 3.11, un $\infty$-foncteur

$$\nu(\pi_n) : \Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_{1+n}\,.$$

On montrera que le composé $c'\nu(\pi_n) : \Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n \to C$ définit une transformation oplax du $\infty$-foncteur constant $c : \mathcal{O}_n \to C$ vers le $\infty$-foncteur $ua$, de sorte que le couple $(a, c'\nu(\pi_n))$ correspondra, en vertu de la proposition 4.3, à un $\infty$-foncteur $\mathcal{O}_n \to {}_{c\backslash}A$, autrement dit, à un $n$-simplexe de $N({}_{c\backslash}A)$. Par définition, ce $n$-simplexe sera l'image de $(c', a)$ par $\theta_n$. Pour conclure, il restera à prouver que l'application $\theta_n$ est bijective, et que la famille des $\theta_n$, pour $n \geqslant 0$, est un morphisme d'ensembles simpliciaux.

Définissons le morphisme de complexes dirigés augmentés $\pi_n$. Le complexe dirigé augmenté $\mathsf{c}\Delta_{1+n}$ admet comme base l'ensemble gradué $E$,

$$E_p = \{(i_0, \dots, i_p) \mid 0 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant 1+n\}\,, \quad p \geqslant 0\,,$$

et $\mathsf{c}\Delta_n$, identifié à un sous-complexe dirigé augmenté de $\mathsf{c}\Delta_{1+n}$ par le morphisme $\mathsf{c}(j_{0,n})$ (voir les notations 2.2), admet comme base le sous-ensemble gradué $E'$,

$$E'_p = \{(i_0, \dots, i_p) \mid 1 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant 1+n\}\,, \quad p \geqslant 0\,,$$

de $E$. La base de $\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n$ est formée des éléments

$$(0) \otimes (i_0, \dots, i_p)\,, \qquad (1) \otimes (i_0, \dots, i_p)\,, \qquad (0,1) \otimes (i_0, \dots, i_p)\,,$$

pour $1 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant 1+n$, $p \geqslant 0$, les deux premiers étant des $p$-chaînes et le troisième une $(p+1)$-chaîne. On définit $\pi_n$ par les formules

$$\pi_n((0) \otimes (i_0, \dots, i_p)) = \begin{cases} (0) & \text{si } p = 0\,, \\ 0 & \text{si } p > 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

$$\pi_n((1) \otimes (i_0, \dots, i_p)) = (i_0, \dots, i_p)\,, \tag{2}$$

$$\pi_n((0,1) \otimes (i_0, \dots, i_p)) = (0, i_0, \dots, i_p)\,, \tag{3}$$

pour $1 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant 1+n$. Étant donné des entiers $0 \leqslant i_0 \leqslant \dots \leqslant i_p \leqslant n$, on observe que s'il existe $l$ tel que $0 \leqslant l < p$ et tel que $i_l = i_{l+1}$, les formules définissant $\pi_n$ sont compatibles avec la convention $(i_0, \dots, i_p) = 0$ (voir le paragraphe 3.10).

La compatibilité de $\pi_n$ aux augmentations et aux sous-monoïdes de positivité est évidente, ainsi que celle aux différentielles dans les cas (1) et (2). Pour montrer que $\pi_n$ est un morphisme de complexes dirigés augmentés, il reste donc à vérifier que

$$\pi_n d((0,1)\otimes(i_0,\dots,i_p)) = d\pi_n((0,1)\otimes(i_0,\dots,i_p))\,.$$

Pour $p=0$, on a

$$\pi_n d((0,1)\otimes(i_0)) = \pi_n((1)\otimes(i_0)-(0)\otimes(i_0)) = (i_0)-(0) = d(0,i_0) = d\pi_n((0,1)\otimes(i_0))\,,$$

et pour $p\geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\pi_n d((0,1)\otimes(i_0,\dots,i_p)) &= \pi_n\Big((1)\otimes(i_0,\dots,i_p)-(0)\otimes(i_0,\dots,i_p)\\ &\qquad -\sum_{k=0}^{p}(-1)^k(0,1)\otimes(i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_p)\Big)\\ &= (i_0,\dots,i_p)-\sum_{k=0}^{p}(-1)^k(0,i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_p)\\ &= d(0,i_0,\dots,i_p) = d\pi_n((0,1)\otimes(i_0,\dots,i_p))\,.\end{aligned}$$

Le fait que le composé $c'\nu(\pi_n) : \varDelta_1\otimes\mathcal{O}_n\to C$ définit une transformation oplax du $\infty$-foncteur constant $c:\mathcal{O}_n\to C$ vers le $\infty$-foncteur $ua$ résulte aussitôt des formules (1) et (2) ci-dessus et des égalités $c'_0=c$ et $c'_{1,\dots,1+n}=ua$.

D'autre part, pour tout morphisme $\psi:\varDelta_{n'}\to\varDelta_n$, il est immédiat, dans les notations de 2.2 (et en tenant compte de l'observation qui suit la définition de $\pi_n$), que le carré

$$\begin{tikzcd} \mathsf{c}\varDelta_1\otimes\mathsf{c}\varDelta_{n'} \arrow[r, "\pi_{n'}"] \arrow[d, "1_{\mathsf{c}\varDelta_1}\otimes\psi"'] & \mathsf{c}\varDelta_{1+n'} \arrow[d, "\mathsf{c}(1_{\varDelta_0}\amalg\psi)"] \\ \mathsf{c}\varDelta_1\otimes\mathsf{c}\varDelta_n \arrow[r, "\pi_n"'] & \mathsf{c}\varDelta_{1+n} \end{tikzcd}$$

est commutatif, ce qui implique facilement que la famille formée des $\theta_n$, $n\geqslant 0$, est un morphisme d'ensembles simpliciaux.

Il reste à montrer que les applications $\theta_n$ sont bijectives. Cela revient à montrer que pour tout $n\geqslant 0$ et tout couple $(a,\alpha)$, formé d'un $\infty$-foncteur $a:\mathcal{O}_n\to A$ et d'une transformation oplax $\alpha:\varDelta_1\otimes\mathcal{O}_n\to C$ du $\infty$-foncteur constant $c:\mathcal{O}_n\to C$ vers $ua$, il existe un unique $\infty$-foncteur $c':\mathcal{O}_{1+n}\to C$ rendant commutatif le triangle

$$(*)\qquad\begin{tikzcd} \varDelta_1\otimes\mathcal{O}_n \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\nu(\pi_n)"'] & C \\ \mathcal{O}_{1+n} \arrow[ur, dashed, "c'"'] & \end{tikzcd}$$

(les égalités $c'_0=c$ et $c'_{1,\dots,1+n}=ua$ étant alors automatiques). On va le démontrer en utilisant le théorème 3.7, qui implique que la $\infty$-catégorie $\mathcal{O}_{1+n}$ est engendrée librement au sens des polygraphes par ses atomes

$$\langle(j_0,\dots,j_q)\rangle\,,\qquad 0\leqslant j_0<\dots<j_q\leqslant 1+n\,,\quad q\geqslant 0.$$

Pour commencer, on observe qu'on a les égalités

$$(1')\qquad \nu(\pi_n)\langle(0)\otimes(i_0,\dots,i_p)\rangle=\begin{cases}\langle(0)\rangle & \text{si}\;\; p=0\,,\\ 1^p_{\langle(0)\rangle} & \text{si}\;\; p>0\,,\end{cases}$$

$$(2')\qquad \nu(\pi_n)\langle(1)\otimes(i_0,\dots,i_p)\rangle=\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle\,,$$

$$(3')\qquad \nu(\pi_n)\langle(0,1)\otimes(i_0,\dots,i_p)\rangle=\langle(0,i_0,\dots,i_p)\rangle\,,$$

pour $p\geqslant 0$ et $1\leqslant i_0<\dots<i_p\leqslant 1+n$. Les deux premières sont immédiates. Pour prouver la troisième, on remarque qu'une récurrence descendante montre immédiatement que, pour $0\leqslant r\leqslant p$, on a dans $\mathsf{c}\varDelta_1\otimes\mathsf{c}\varDelta_n$

$$\langle(0,1)\otimes(i_0,\dots,i_p)\rangle^0_r=(0)\otimes\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle^0_r+(0,1)\otimes\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle^1_{r-1}\,,$$

$$\langle(0,1)\otimes(i_0,\dots,i_p)\rangle^1_r=(1)\otimes\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle^1_r+(0,1)\otimes\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle^0_{r-1}$$

(avec, pour $r=0$, la convention $\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle^0_{-1}=\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle^1_{-1}=0$). De même, une autre récurrence descendante montre que dans $\mathsf{c}\varDelta_{1+n}$, on a, pour $1\leqslant r\leqslant p$,

$$\langle(0,i_0,\dots,i_p)\rangle^0_r=(0,\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle^1_{r-1})\,,$$

$$\langle(0,i_0,\dots,i_p)\rangle^1_r=\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle^1_r+(0,\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle^0_{r-1})\,,$$

où pour $x$ une $r$-chaîne de $\mathsf{c}\varDelta_{1+n}$ de la forme

$$x=\sum_{1\leqslant k_0<\dots<k_r\leqslant 1+n}x_{k_0,\dots,k_r}(k_0,\dots,k_r)\,,$$

on a posé

$$(0,x)=\sum_{1\leqslant k_0<\dots<k_r\leqslant 1+n}x_{k_0,\dots,k_r}(0,k_0,\dots,k_r)\,,$$

et pour $r=0$, $\langle(0,i_0,\dots,i_p)\rangle^0_0=(0)$ et $\langle(0,i_0,\dots,i_p)\rangle^1_0=\langle(i_0,\dots,i_p)\rangle^1_0$. L'égalité (3′) résulte alors des formules définissant le morphisme $\pi_n$, en tenant compte, pour $r=0$, du fait que la base de $\mathsf{c}\varDelta_{1+n}$ est unitaire.

On remarque que les égalités (1′), (2′), (3′) impliquent que tout atome

$$\langle(j_0,\dots,j_q)\rangle\,,\qquad 0\leqslant j_0<\dots<j_q\leqslant 1+n\,,\quad q\geqslant 0\,,$$

de $\mathcal{O}_{1+n}$ est l'image par $\nu(\pi_n)$ d'un atome de $\varDelta_1\otimes\mathcal{O}_n$. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}
\langle(0)\rangle&=\nu(\pi_n)\langle(0)\otimes(1)\rangle\,, && \text{si } j_0=0 \text{ et } q=0,\\
\langle(j_0,\dots,j_q)\rangle&=\nu(\pi_n)\langle(0,1)\otimes(j_1,\dots,j_q)\rangle\,, && \text{si } j_0=0 \text{ et } q>0,\\
\langle(j_0,\dots,j_q)\rangle&=\nu(\pi_n)\langle(1)\otimes(j_0,\dots,j_q)\rangle\,, && \text{si } j_0>0 \text{ et } q\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Cela prouve déjà qu'il y a au plus un seul $\infty$-foncteur $c'$ rendant commutatif le triangle $(*)$, et permet aussi d'associer à tout atome $y$ de $\mathcal{O}_{1+n}$ une cellule $f(y)$

de $C$, image par le $\infty$-foncteur $\alpha$ d'un atome $x$ de $\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n$ tel que $\nu(\pi_n)(x) = y$. Par exemple on peut poser

$$\begin{aligned}
f\langle(0)\rangle &= \alpha\langle(0)\otimes(1)\rangle\,, && \text{si } j_0 = 0 \text{ et } q = 0,\\
f\langle(j_0,\dots,j_q)\rangle &= \alpha\langle(0,1)\otimes(j_1,\dots,j_q)\rangle\,, && \text{si } j_0 = 0 \text{ et } q > 0,\\
f\langle(j_0,\dots,j_q)\rangle &= \alpha\langle(1)\otimes(j_0,\dots,j_q)\rangle\,, && \text{si } j_0 > 0 \text{ et } q \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Pour montrer l'existence d'un $\infty$-foncteur $c'$ rendant commutatif le triangle $(*)$, on va construire, par récurrence sur $q \geqslant 0$, une suite de $\infty$-foncteurs $c'_q : \tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant q}(\mathcal{O}_{1+n}) \to C$ tels que $c'_q\tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant q}(\nu(\pi_n)) = \alpha|\tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant q}(\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n)$ et $c'_{q+1}|\tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant q}(\mathcal{O}_{1+n}) = c'_q$, ce qui prouvera l'assertion.

Pour $q = 0$, on pose $c'\langle(j_0)\rangle = f\langle(j_0)\rangle$, pour $0 \leqslant j_0 \leqslant 1+n$. Comme $\alpha$ est une transformation oplax de source le $\infty$-foncteur constant de valeur $c$, pour $1 \leqslant i_0 \leqslant 1+n$, on a $\alpha\langle(0)\otimes(i_0)\rangle = c$, et par suite

$$c'_0\nu(\pi_n)\langle(0)\otimes(i_0)\rangle = c'_0\langle(0)\rangle = f\langle(0)\rangle = \alpha\langle(0)\otimes(1)\rangle = c = \alpha\langle(0)\otimes(i_0)\rangle\,.$$

D'autre part, on a

$$c'_0\nu(\pi_n)\langle(1)\otimes(i_0)\rangle = c'_0\langle(i_0)\rangle = f\langle(i_0)\rangle = \alpha\langle(1)\otimes(i_0)\rangle\,,$$

ce qui prouve que $c'_0\tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant 0}(\nu(\pi_n)) = \alpha|\tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant 0}(\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n)$. Supposons maintenant que $c'_q$ soit construit. On remarque que l'application associant à un atome $y$ de dimension $q+1$ de $\mathcal{O}_{1+n}$ la $(q+1)$-cellule $f(y)$ de $C$ est compatible à la formation des sources et de buts au sens du paragraphe 3.6. En effet, il existe un atome $x$ de $\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n$ tel que $y = \nu(\pi_n)(x)$ et $f(y) = \alpha(x)$, et par suite, on a

$$\begin{aligned}
s(f(y)) &= s(\alpha(x)) = \alpha(s(x)) = c'_q\nu(\pi_n)(s(x)) = c'_q(s(\nu(\pi_n)(x))) = c'_q(s(y))\,,\\
t(f(y)) &= t(\alpha(x)) = \alpha(t(x)) = c'_q\nu(\pi_n)(t(x)) = c'_q(t(\nu(\pi_n)(x))) = c'_q(t(y))\,.
\end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'un unique $\infty$-foncteur $c'_{q+1} : \mathcal{O}_{1+n} \to C$ tel que $c'_{q+1}|\tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant q}(\mathcal{O}_{1+n}) = c'_q$ et tel que pour tout atome $y$ de dimension $q+1$ de $\mathcal{O}_{1+n}$, on ait $c'_{q+1}(y) = f(y)$. Il reste à prouver l'égalité $c'_{q+1}\tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant q+1}(\nu(\pi_n)) = \alpha|\tau^{\mathrm{b}}_{\leqslant q+1}(\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n)$. Or, en vertu du théorème 3.7, de la proposition 3.13, et du paragraphe 3.10, la $\infty$-catégorie $\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n$ est engendrée librement au sens des polygraphes par ses atomes. Il suffit donc de montrer que pour tout atome $x$ de dimension $q+1$ de $\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n$, on a $c'_{q+1}\nu(\pi_n)(x) = \alpha(x)$. Le seul cas non trivial est celui des atomes de la forme $x = \langle(0)\otimes(i_0,\dots,i_{q+1})\rangle$, pour $1 \leqslant i_0 < \dots < i_{q+1} \leqslant n$. Comme $\alpha$ est une transformation oplax de source le $\infty$-foncteur constant de valeur $c$, on a $\alpha(x) = 1^{q+1}_c$. D'autre part, en vertu de l'égalité $(1')$, on a $\nu(\pi_n)(x) = 1^{q+1}_{\langle(0)\rangle}$, et par suite

$$c'_{q+1}\nu(\pi_n)(x) = c'_{q+1}(1^{q+1}_{\langle(0)\rangle}) = 1^{q+1}_{c'_0\langle(0)\rangle} = 1^{q+1}_c = \alpha(x)\,,$$

ce qui achève la démonstration. $\square$

## 5. Le théorème A $\infty$-catégorique

***5.1***. — Soient $A, B, C$ trois $\infty$-catégories, $u : A \to B$, $v : A \to C$, $w : B \to C$ des $\infty$-foncteurs, et $\alpha : v \to wu$ une transformation oplax, formant un triangle

$$\mathcal{T} = \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

dans $\infty$-$\mathcal{C}at$, commutatif à transformation oplax donnée près. Pour tout objet $c$ de $C$, on définit un $\infty$-foncteur

$$c\backslash\mathcal{T} : c\backslash A \to c\backslash B$$

comme suit. Pour $T$ une $\infty$-catégorie, se donner un $\infty$-foncteur de $T$ vers $c\backslash A$ revient à se donner un couple $(t, \tau)$, où $t : T \to A$ est un $\infty$-foncteur, et $\tau : c \to vt$ une transformation oplax de source le $\infty$-foncteur constant de $T$ vers $C$ de valeur $c$ et de but le $\infty$-foncteur composé $vt$ (voir proposition 4.3). On en déduit un couple $(ut, (\alpha * t)\tau)$

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "c"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\tau}{\Rightarrow}"] & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

correspondant à un $\infty$-foncteur de $T$ vers $c\backslash B$. On définit ainsi une application

$$\mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T, c\backslash A) \to \mathsf{Hom}_{\infty\text{-}\mathcal{C}at}(T, c\backslash B)\,,$$

naturelle en $T$, d'où en vertu du lemme de Yoneda, un $\infty$-foncteur $c\backslash\mathcal{T} : c\backslash A \to c\backslash B$.

***Théorème 5.2***. — *Soit $\mathcal{T}$ un triangle dans $\infty$-$\mathcal{C}at$, commutatif à transformation oplax donnée près :*

$$\mathcal{T} = \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}\,.$$

*Si pour tout objet $c$ de $C$, le $\infty$-foncteur $c\backslash\mathcal{T} : c\backslash A \to c\backslash B$ est une équivalence faible, alors il en est de même de $u$.*

***Remarque 5.3***. — On rappelle que, pour $n \geqslant 1$, la catégorie $n$-$\mathcal{C}at$ des petites $n$-catégories strictes, et $n$-foncteurs stricts entre celles-ci, s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\infty$-$\mathcal{C}at$ formée des $\infty$-catégories dont les $i$-cellules, pour $i > n$, sont des identités. La notion d'équivalence faible dans $\infty$-$\mathcal{C}at$ induit une notion d'équivalence faible dans $n$-$\mathcal{C}at$, un $n$-foncteur étant une équivalence faible s'il l'est en tant que $\infty$-foncteur. D'autre part, si $X \to Y$ est un morphisme de $n$-$\mathcal{C}at$ et $y$ un objet de $Y$, on vérifie immédiatement que la $\infty$-catégorie $y\backslash X$ est en fait une $n$-catégorie. Ainsi, le théorème A

$\infty$-catégorique énoncé ci-dessus implique aussitôt un théorème A $n$-catégorique dont l'énoncé est le même, sauf qu'on remplace « $\infty$-$\mathcal{C}at$ » par « $n$-$\mathcal{C}at$ » et « $\infty$-foncteur » par « $n$-foncteur ».

La suite de cette section est consacrée à la preuve du théorème 5.2.

***5.4.*** — Pour tout $\infty$-foncteur $f : X \to Y$, on note $S(f)$ l'ensemble bisimplicial défini, avec les notations 2.2, par

$$\begin{aligned}(S(f))_{m,n} &= \{(y \in (NY)_{m+1+n},\, x \in (NX)_n) \mid (Nf)(x) = y_{m+1,\dots,m+1+n}\} \\ &= \{(y : \mathcal{O}_{m+1+n} \to Y,\, x : \mathcal{O}_n \to X) \mid fx = y\,\mathcal{O}_{j_{m,n}}\}\,,\end{aligned}$$

pour $m, n \geqslant 0$, les opérateurs simpliciaux étant définis de la façon suivante. Soient $\varphi : \Delta_{m'} \to \Delta_m$ et $\psi : \Delta_{n'} \to \Delta_n$ des morphismes de $\mathbf{\Delta}$. Pour $(y, x)$ dans $(S(f))_{m,n}$, on pose $(S(f))_{\varphi,\psi}(y, x) = (y\,\mathcal{O}_{\varphi \amalg \psi},\, x\,\mathcal{O}_\psi)$.

On définit un morphisme d'oubli $U_f : S(f) \to NX$ par $(y, x) \mapsto x$, l'ensemble simplicial $NX$ étant considéré comme ensemble bisimplicial constant en la première variable

$$(NX)_{m,n} = (NX)_n = \{x : \mathcal{O}_n \to X\}\,.$$

Pour tout $n \geqslant 0$, le morphisme d'ensembles simpliciaux $(U_f)_{\bullet,n}$ s'identifie à la somme

$$\coprod_{x : \mathcal{O}_n \to X} NY/fx \quad \longrightarrow \coprod_{x : \mathcal{O}_n \to X} *\,,$$

indexée par les $n$-simplexes $x : \mathcal{O}_n \to X$ de $NX$, des morphismes de source $NY/_{fx}$ et de but le point simplicial, qui sont des équivalences faibles puisque, en vertu du lemme 2.4, les ensembles simpliciaux $NY/_{fx}$ sont contractiles. La stabilité des équivalences faibles par sommes et le lemme bisimplicial (lemme 1.3) impliquent alors que le morphisme d'ensembles bisimpliciaux $U_f$ est une équivalence faible diagonale.

Enfin, on remarque que, par définition, pour tout $m \geqslant 0$, on a un isomorphisme canonique d'ensembles simpliciaux

$$(S(f))_{m,\bullet} \simeq \coprod_{y : \mathcal{O}_m \to Y} y\backslash NX\,.$$

*Dans la suite, on fixe un triangle dans $\infty$-$\mathcal{C}at$, commutatif à transformation oplax donnée près :*

$$\mathcal{T} = \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rrightarrow}"] & B \arrow[dl, "w"] \\ & C & \end{tikzcd}.$$

***5.5***. — On va définir un morphisme d'ensembles bisimpliciaux $S(\mathcal{T}) : S(v) \to S(w)$ comme suit. Soient $m, n \geqslant 0$ et $(c, a) \in (S(v))_{m,n}$. Par définition, avec les notations 2.2, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_n \simeq \{0\} \otimes \mathcal{O}_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathcal{O}_{j_{m,n}}"'] & \Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n \arrow[r, "1_{\Delta_1} \otimes a"] & \Delta_1 \otimes A \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathcal{O}_{m+1+n} \arrow[rr, "c"'] & & C \end{tikzcd} ,$$

d'où un $\infty$-foncteur

$$(c, \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a)) : \mathcal{O}_{m+1+n} \amalg_{\mathcal{O}_n} (\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n) \longrightarrow C\,.$$

On va définir un morphisme de complexes dirigés augmentés

$$\kappa_{m,n} : \mathsf{c}\Delta_{m+1+n} \longrightarrow \mathsf{c}\Delta_{m+1+n} \amalg_{\mathsf{c}\Delta_n} (\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n)\,,$$

d'où en vertu du théorème 3.15, des propositions 3.13 et 3.9, et du paragraphe 3.10, un $\infty$-foncteur

$$\nu(\kappa_{m,n}) : \mathcal{O}_{m+1+n} \longrightarrow \mathcal{O}_{m+1+n} \amalg_{\mathcal{O}_n} (\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n)\,,$$

et on posera

$$S(\mathcal{T})(c, a) = ((c, \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a))\nu(\kappa_{m,n}), ua)\,.$$

Le complexe dirigé augmenté $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$ admet comme base l'ensemble gradué $E$,

$$E_p = \{(i_0, \dots, i_p) \mid 0 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant m+1+n\}\,, \quad p \geqslant 0\,,$$

et $\mathsf{c}\Delta_n$, identifié à un sous-complexe dirigé augmenté de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$ par le morphisme $\mathsf{c}(j_{m,n})$, admet comme base le sous-ensemble gradué $E'$,

$$E'_p = \{(i_0, \dots, i_p) \mid m+1 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant m+1+n\}\,, \quad p \geqslant 0\,,$$

de $E$. En identifiant $\mathsf{c}\Delta_n$ au sous-complexe dirigé augmenté $\{0\} \otimes \mathsf{c}\Delta_n$ de $\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n$, les éléments

$$(i_0, \dots, i_p)\,,\ (i'_0, \dots, i'_p)\,,\ (\bar{\imath}_0, \dots, \bar{\imath}_p)\,, \quad m+1 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant m+1+n\,, \quad p \geqslant 0\,,$$

où on a posé $(i'_0, \dots, i'_p) = (1) \otimes (i_0, \dots, i_p)$ et $(\bar{\imath}_0, \dots, \bar{\imath}_p) = (01) \otimes (i_0, \dots, i_p)$, forment une base de $\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n$. Avec ces notations, en vertu de la proposition 3.9, les éléments

$$\begin{aligned} &(i_0, \dots, i_p)\,, && 0 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant m+1+n\,, \quad p \geqslant 0\,, \\ &(i'_0, \dots, i'_p)\,, \quad (\bar{\imath}_0, \dots, \bar{\imath}_p)\,, && m+1 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant m+1+n\,, \quad p \geqslant 0\,, \end{aligned}$$

forment une base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n} \amalg_{\mathsf{c}\Delta_n} (\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n)$. Par définition, le morphisme de groupes gradués sous-jacent à $\kappa_{m,n}$ associe, à un élément $(i_0, \dots, i_p)$ de la base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$, l'élément homogène de degré $p$

$$\begin{aligned} &(1) \qquad (i_0, \dots, i_p) && \text{si} \quad r \geqslant 2\,, \\ &(2) \qquad (i_0, \dots, i_p) + (\bar{\imath}_1, \dots, \bar{\imath}_p) && \text{si} \quad r = 1\,, \\ &(3) \qquad (i'_0, \dots, i'_p) && \text{si} \quad r = 0 \end{aligned}$$

de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n} \amalg_{\mathsf{c}\Delta_n} (\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n)$, où $r = \mathsf{card}\{0 \leqslant k \leqslant p \mid i_k \leqslant m\}$, et où par convention dans (2), si $p = 0$, alors $(\bar{\imath}_1, \dots, \bar{\imath}_p) = 0$ (de sorte que pour $p = 0$, on a $\kappa_{m,n}(i_0) = (i_0)$ si $i_0 \leqslant m$ et $\kappa_{m,n}(i_0) = (i'_0)$ si $i_0 > m$). Étant donné des entiers $0 \leqslant i_0 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant n$, s'il existe $l$ tel que $0 \leqslant l < p$ et tel que $i_l = i_{l+1}$, les formules définissant $\kappa_{m,n}$ sont compatibles avec la convention $(i_0, \dots, i_p) = 0$ (voir le paragraphe 3.10). En effet, cela est évident pour les cas (1) et (3), et dans le cas (2), cela résulte du fait que $r = 1$ implique que $l \geqslant 1$.

On doit vérifier que $\kappa_{m,n}$ est un morphisme de complexes dirigés augmentés, que pour tout $(c, a) \in (S(v))_{m,n}$, le couple $((c, \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a))\nu(\kappa_{m,n}), ua)$ appartient à $(S(w))_{m,n}$, et que la famille des applications $(S(\mathcal{T}))_{m,n}$, $m, n \geqslant 0$, ainsi définies est un morphisme d'ensembles bisimpliciaux.

***5.6.*** — Montrons pour commencer que $\kappa_{m,n}$ est un morphisme de complexes dirigés augmentés. La compatibilité à l'augmentation et aux sous-monoïdes de positivité est évidente. Vérifions la compatibilité aux différentielles. Soient $p \geqslant 0$ et $(i_0, \dots, i_p)$ un élément de la base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$ ; on doit prouver que

$$d\kappa_{m,n}(i_0, \dots, i_p) = \kappa_{m,n} d(i_0, \dots, i_p)\,.$$

Soit $r = \mathsf{card}\{0 \leqslant k \leqslant p \mid i_k \leqslant m\}$. Si $r = 0$ ou $r > 2$, l'égalité est évidente. Il reste à la vérifier pour $r = 1$ et $r = 2$. Si $r = 1$, autrement dit si $i_0 \leqslant m$ et $i_k > m$, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, on a

$$\begin{aligned}
d\kappa_{m,n}(i_0, \dots, i_p) &= d((i_0, \dots, i_p) + (\bar{\imath}_1, \dots, \bar{\imath}_p)) \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (i_0, \dots, \hat{\imath}_k, \dots, i_p) \\
&\qquad + (i'_1, \dots, i'_p) - (i_1, \dots, i_p) - \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} (\bar{\imath}_1, \dots, \hat{\bar{\imath}}_k, \dots, \bar{\imath}_p) \\
&= (i'_1, \dots, i'_p) + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \big((i_0, \dots, \hat{\imath}_k, \dots, i_p) + (\bar{\imath}_1, \dots, \hat{\bar{\imath}}_k, \dots, \bar{\imath}_p)\big) \\
&= \kappa_{m,n}\Big(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k (i_0, \dots, \hat{\imath}_k, \dots, i_p)\Big) = \kappa_{m,n} d(i_0, \dots, i_p)\,,
\end{aligned}$$

et si $r = 2$, autrement dit si $i_0, i_1 \leqslant m$ et $i_k > m$, pour $2 \leqslant k \leqslant p$, on a

$$\begin{aligned}
\kappa_{m,n} d(i_0, \dots, i_p) &= \kappa_{m,n}\Big(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k (i_0, \dots, \hat{\imath}_k, \dots, i_p)\Big) \\
&= (i_1, \dots, i_p) + (\bar{\imath}_2, \dots, \bar{\imath}_p) - ((i_0, i_2, \dots, i_p) + (\bar{\imath}_2, \dots, \bar{\imath}_p)) \\
&\qquad + \sum_{k=2}^{p} (-1)^k (i_0, \dots, \hat{\imath}_k, \dots, i_p) \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (i_0, \dots, \hat{\imath}_k, \dots, i_p) = d(i_0, \dots, i_p) = d\kappa_{m,n}(i_0, \dots, i_p)\,.
\end{aligned}$$

***5.7.*** — Vérifions maintenant que pour tout élément $(c, a)$ de $(S(v))_{m,n}$, le couple $((c, \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a))\nu(\kappa_{m,n}), ua)$ appartient à $(S(w))_{m,n}$. On remarque qu'en vertu du cas (3) de la définition de $\kappa_{m,n}$ dans le paragraphe 5.5, et avec les notations 2.2, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_n \simeq \{1\} \otimes \mathcal{O}_n \arrow[r, hook, "\{1\}\otimes 1_{\mathcal{O}_n}"] \arrow[d, "\mathcal{O}_{j_{m,n}}"'] & \Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n \arrow[d, hook, "\mathrm{can}"] \\ \mathcal{O}_{m+1+n} \arrow[r, "\nu(\kappa_{m,n})"'] & \mathcal{O}_{m+1+n} \amalg_{\mathcal{O}_n} (\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n) \end{tikzcd} .$$

On a donc

$$\begin{aligned} (c, \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a))\nu(\kappa_{m,n})\mathcal{O}_{j_{m,n}} &= \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a)(\{1\} \otimes 1_{\mathcal{O}_n}) \\ &= \alpha(\{1\} \otimes 1_A)a = wua\,, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'assertion. On définit donc bien une application

$$(S(\mathcal{T}))_{m,n} : (S(v))_{m,n} \to (S(w))_{m,n}\,, \qquad (c,a) \mapsto ((c, \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a))\nu(\kappa_{m,n}), ua)\,.$$

***5.8***. — On va montrer maintenant que les applications $(S(\mathcal{T}))_{m,n}$, $m, n \geqslant 0$, ainsi définies, forment un morphisme d'ensembles bisimpliciaux $S(\mathcal{T}) : S(v) \to S(w)$, autrement dit que pour tous morphismes $\varphi : \Delta_{m'} \to \Delta_m$ et $\psi : \Delta_{n'} \to \Delta_n$ de $\mathbf{\Delta}$, le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} (S(v))_{m,n} \arrow[r, "(S(\mathcal{T}))_{m,n}"] \arrow[d, "(S(v))_{\varphi,\psi}"'] & (S(w))_{m,n} \arrow[d, "(S(w))_{\varphi,\psi}"] \\ (S(v))_{m',n'} \arrow[r, "(S(\mathcal{T}))_{m',n'}"'] & (S(w))_{m',n'} \end{tikzcd} .$$

Or, pour tout $(c, a)$ dans $(S(v))_{m,n}$, on a

$$\begin{aligned} (S(\mathcal{T}))_{m',n'}(S(v))_{\varphi,\psi}(c,a) &= (S(\mathcal{T}))_{m',n'}(c\,\mathcal{O}_{\varphi\amalg\psi}, a\,\mathcal{O}_\psi) \\ &= ((c\,\mathcal{O}_{\varphi\amalg\psi}, \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a\,\mathcal{O}_\psi))\nu(\kappa_{m',n'}), ua\,\mathcal{O}_\psi) \\ &= ((c, \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a)) \\ &\qquad \circ (\mathcal{O}_{\varphi\amalg\psi} \amalg_{\mathcal{O}_\psi} (1_{\Delta_1} \otimes \mathcal{O}_\psi))\nu(\kappa_{m',n'}), ua\,\mathcal{O}_\psi)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S(w))_{\varphi,\psi}(S(\mathcal{T}))_{m,n}(c,a) &= (S(w))_{\varphi,\psi}((c, \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a))\nu(\kappa_{m,n}), ua) \\ &= ((c, \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a))\nu(\kappa_{m,n})\mathcal{O}_{\varphi\amalg\psi}, ua\mathcal{O}_\psi)\,. \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathsf{c}\Delta_{m'+1+n'} \arrow[r, "\kappa_{m',n'}"] \arrow[d, "\mathsf{c}(\varphi\amalg\psi)"'] & \mathsf{c}\Delta_{m'+1+n'} \amalg_{\mathsf{c}\Delta_{n'}} (\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_{n'}) \arrow[d, "\mathsf{c}(\varphi\amalg\psi)\amalg_{\mathsf{c}(\psi)}(1_{\mathsf{c}\Delta_1}\otimes\mathsf{c}(\psi))"] \\ \mathsf{c}\Delta_{m+1+n} \arrow[r, "\kappa_{m,n}"'] & \mathsf{c}\Delta_{m+1+n} \amalg_{\mathsf{c}\Delta_n} (\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n) \end{tikzcd} ,$$

ce qui résulte aussitôt des formules définissant $\kappa_{m,n}$ dans le paragraphe 5.5 et du commentaire qui les suit.

***5.9***. — Ainsi, on dispose d'un carré commutatif d'ensembles bisimpliciaux

$$\begin{tikzcd} S(v) \arrow[r, "S(\mathcal{T})"] \arrow[d, "U_v"'] & S(w) \arrow[d, "U_w"] \\ NA \arrow[r, "Nu"'] & NB \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont, en vertu du paragraphe 5.4, des équivalences faibles diagonales. On va montrer que l'hypothèse du théorème 5.2 implique que $S(\mathcal{T})$ est aussi une équivalence faible diagonale. On en déduira par deux sur trois qu'il en est de même pour le morphisme bisimplicial constant en la première variable $Nu$, autrement dit, que le morphisme d'ensembles simpliciaux $Nu$ est une équivalence faible, ce qui prouvera le théorème 5.2.

Or, en vertu du paragraphe 5.4, pour tout $m \geqslant 0$, on a des isomorphismes d'ensembles simpliciaux

$$(S(v))_{m,\bullet} \simeq \coprod_{c:\mathcal{O}_m \to C} {}_{c}\backslash NA \qquad \text{et} \qquad (S(w))_{m,\bullet} \simeq \coprod_{c:\mathcal{O}_m \to C} {}_{c}\backslash NB\,.$$

D'autre part, dans les notations 2.2, pour tout $n \geqslant 0$, on a, par définition de $\kappa_{m,n}$, un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_m \arrow[r, "\mathcal{O}_{i_{m,n}}"] \arrow[d, "\mathcal{O}_{i_{m,n}}"'] & \mathcal{O}_{m+1+n} \arrow[d, "\mathrm{can}"] \\ \mathcal{O}_{m+1+n} \arrow[r, "\nu(\kappa_{m,n})"'] & \mathcal{O}_{m+1+n} \amalg_{\mathcal{O}_n} (\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n) \end{tikzcd} \quad .$$

On en déduit que pour tout $(c', a) \in (S(v))_{m,n}$, on a

$$(c', \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a))\nu(\kappa_{m,n})\mathcal{O}_{i_{m,n}} = c'\mathcal{O}_{i_{m,n}}\,,$$

et par suite, le morphisme d'ensembles simpliciaux $(S(\mathcal{T}))_{m,\bullet} : (S(v))_{m,\bullet} \to (S(w))_{m,\bullet}$ s'identifie à la somme

$$\coprod_{c:\mathcal{O}_m \to C} {}_{c}\backslash NA \longrightarrow \coprod_{c:\mathcal{O}_m \to C} {}_{c}\backslash NB\,,$$

indexée par les $m$-simplexes $c$ de $NC$, des morphismes, notés ${}_{c}\backslash N\mathcal{T} : {}_{c}\backslash NA \to {}_{c}\backslash NB$, associant à un $n$-simplexe $(c', a)$ de ${}_{c}\backslash NA$ le $n$-simplexe $((c', \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a))\nu(\kappa_{m,n}), ua)$ de ${}_{c}\backslash NB$. En vertu du lemme bisimplicial (lemme 1.3) et de la stabilité par sommes des équivalences faibles, pour montrer que $S(\mathcal{T})$ est une équivalence faible diagonale, il suffit de montrer que ces morphismes sont des équivalences faibles.

***5.10***. — Il s'agit donc de montrer que pour tout $m$-simplexe $c : \mathcal{O}_m \to C$ de $NC$, le morphisme ${}_{c\backslash}N\mathcal{T} : {}_{c\backslash}NA \to {}_{c\backslash}NB$ est une équivalence faible simpliciale. Or, il résulte du paragraphe 5.8 qu'on a un carré commutatif d'ensembles simpliciaux

$$\begin{tikzcd}
(S(v))_{m,\bullet} \arrow[r, "(S(\mathcal{T}))_{m,\bullet}"] \arrow[d, "(S(v))_{\varphi,\bullet}"'] & (S(w))_{m,\bullet} \arrow[d, "(S(w))_{\varphi,\bullet}"] \\
(S(v))_{0,\bullet} \arrow[r, "(S(\mathcal{T}))_{0,\bullet}"'] & (S(w))_{0,\bullet}
\end{tikzcd} \quad ,$$

où $\varphi : \Delta_0 \to \Delta_m$ désigne le morphisme de $\mathbf{\Delta}$ défini par $0 \mapsto m$. En vertu du paragraphe précédent, ce carré induit un carré commutatif

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
{}_{c\backslash}NA \arrow[r, "{}_{c\backslash}N\mathcal{T}"] \arrow[d] & {}_{c\backslash}NB \arrow[d] \\
{}_{c_m\backslash}NA \arrow[r, "{}_{c_m\backslash}N\mathcal{T}"'] & {}_{c_m\backslash}NB
\end{tikzcd} \quad ,$$

dont la flèche verticale de gauche associe à un $n$-simplexe $(c', a)$ de ${}_{c\backslash}NA$, le $n$-simplexe $(c'_{m,m+1,\dots,m+1+n}, a)$ de ${}_{c_m\backslash}NA$, celle de droite étant définie de façon analogue.

D'autre part, en vertu de la proposition 4.6, on a des isomorphismes canoniques ${}_{c_m\backslash}NA \simeq N({}_{c_m\backslash}A)$ et ${}_{c_m\backslash}NB \simeq N({}_{c_m\backslash}B)$, et le carré

$$\begin{tikzcd}
{}_{c_m\backslash}NA \arrow[r, "{}_{c_m\backslash}N\mathcal{T}"] \arrow[d, "\wr"'] & {}_{c_m\backslash}NB \arrow[d, "\wr"] \\
N({}_{c_m\backslash}A) \arrow[r, "N({}_{c_m\backslash}\mathcal{T})"'] & N({}_{c_m\backslash}B)
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet, en vertu de la description de ces isomorphismes, donnée dans la preuve de cette proposition, avec les notations de cette preuve, et en tenant compte des définitions de ${}_{c_m\backslash}N\mathcal{T}$ et de ${}_{c_m\backslash}\mathcal{T}$, il suffit de montrer que, pour tout $n$-simplexe $(c', a)$ de ${}_{c_m\backslash}NA$, on a

$$\big(ua, (c', \alpha(1_{\Delta_1} \otimes a))\nu(\kappa_{0,n})\nu(\pi_n)\big) = \big(ua, (\alpha * a)(c'\nu(\pi_n))\big)\,,$$

où $(\alpha * a)(c'\nu(\pi_n))$ désigne le composé vertical des transformations oplax $\alpha * a$ et $c'\nu(\pi_n)$. En vertu de la définition de cette composition (voir le paragraphe 4.5), il s'agit de montrer que le pentagone suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n \arrow[rr, "\nu(\pi_n)"] \arrow[d, "\delta\otimes 1_{\mathcal{O}_n}"'] & & \mathcal{O}_{1+n} \arrow[dd, "\nu(\kappa_{0,n})"] \\
(\Delta_1 \amalg_{\Delta_0} \Delta_1) \otimes \mathcal{O}_n \arrow[d, phantom, "\wr"] & & \\
(\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n) \amalg_{\mathcal{O}_n} (\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n) \arrow[rr, "\nu(S)(1_{\Delta_1\otimes\mathcal{O}_n} \amalg_{\mathcal{O}_n} \nu(\pi_n))"] \arrow[dr, "(\alpha(1_{\Delta_1}\otimes a){,}c'\nu(\pi_n))"'] & & \mathcal{O}_{1+n} \amalg_{\mathcal{O}_n} (\Delta_1 \otimes \mathcal{O}_n) \arrow[dl, "(c'{,}\alpha(1_{\Delta_1}\otimes a))"] \\
& C &
\end{tikzcd} .$$

Or, le triangle du bas, où $S$ désigne l'isomorphisme canonique

$$(\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n) \amalg_{\mathsf{c}\Delta_n} \mathsf{c}\Delta_{1+n} \longrightarrow \mathsf{c}\Delta_{1+n} \amalg_{\mathsf{c}\Delta_n} (\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n)\,,$$

est trivialement commutatif. Il suffit donc de montrer que le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n \arrow[rr, "\pi_n"] \arrow[d, "\lambda(\delta)\otimes 1_{\mathsf{c}\Delta_n}"'] & & \mathsf{c}\Delta_{1+n} \arrow[dd, "\kappa_{0,n}"] \\
(\mathsf{c}\Delta_1 \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}\Delta_1) \otimes \mathsf{c}\Delta_n \arrow[d, phantom, "\wr"] & & \\
(\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n) \amalg_{\mathsf{c}\Delta_n} (\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n) \arrow[rr, "S(1_{\mathsf{c}\Delta_1\otimes\mathsf{c}\Delta_n} \amalg_{\mathsf{c}\Delta_n} \pi_n)"] & & \mathsf{c}\Delta_{1+n} \amalg_{\mathsf{c}\Delta_n} (\mathsf{c}\Delta_1 \otimes \mathsf{c}\Delta_n)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, ce qui résulte d'une vérification facile laissée au lecteur.

Comme, en vertu de l'hypothèse du théorème, le morphisme d'ensembles simpliciaux $N({}_{c_m}\backslash\mathcal{T})$ est une équivalence faible, on en déduit qu'il en est de même du morphisme ${}_{c_m}\backslash N\mathcal{T}$. Pour conclure, il suffit donc de prouver que les deux flèches verticales du carré commutatif $(*)$ sont des équivalences faibles, ce qui résultera de la section suivante.

## 6. L'homotopie simpliciale

***6.1***. — Dans cette section, on fixe deux $\infty$-catégories $A$ et $B$, un morphisme d'ensembles simpliciaux $u : NA \to NB$, un entier $m \geqslant 0$, et un $m$-simplexe $b : \mathcal{O}_m \to B$ de $NB$. On a un morphisme d'ensembles simpliciaux

$$r : {}_{b}\backslash NA \to {}_{b_m}\backslash NA$$

qui, pour $n \geqslant 0$, associe à un $n$-simplexe $(y, x)$ de ${}_{b}\backslash NA$,

$$y : \mathcal{O}_{m+1+n} \to B\,,\ x : \mathcal{O}_n \to A \quad \text{tels que} \quad y_{0,\dots,m} = b\,,\ y_{m+1,\dots,m+1+n} = u(x)\,,$$

le $n$-simplexe $(y_{m,m+1,\dots,m+1+n}, x)$ de ${}_{b_m}\backslash NA$. Le but de cette section est de montrer que ce morphisme est une équivalence d'homotopie simpliciale, et plus précisément, qu'il fait de ${}_{b_m}\backslash NA$ un rétracte par déformation fort de ${}_{b}\backslash NA$.

***6.2.*** — Pour commencer, on définit une section

$$s : {}_{b_m}\backslash NA \to {}_{b}\backslash NA$$

de ce morphisme comme suit. Il s'agit de définir des applications

$$s_n : ({}_{b_m}\backslash NA)_n \to ({}_{b}\backslash NA)_n\,, \quad n \geqslant 0\,,$$

compatibles aux opérateurs simpliciaux. Soient $n \geqslant 0$ et $(y', x) \in ({}_{b_m}\backslash NA)_n$,

$$y' : \mathcal{O}_{1+n} \to B\,,\ x : \mathcal{O}_n \to A \quad \text{tels que} \quad y'_0 = b_m\,,\ y'_{1,\dots,1+n} = u(x)\,.$$

On en déduit un $\infty$-foncteur

$$(b, y') : \mathcal{O}_m \amalg_{\mathcal{O}_0} \mathcal{O}_{1+n} \to B\,.$$

On va définir un morphisme de complexes dirigés augmentés

$$f_n : \mathsf{c}\Delta_{m+1+n} \to \mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}\Delta_{1+n}\,,$$

d'où en vertu de la proposition 3.9 et des paragraphes 3.10 et 3.11, un $\infty$-foncteur

$$\nu(f_n) : \mathcal{O}_{m+1+n} \to \mathcal{O}_m \amalg_{\mathcal{O}_0} \mathcal{O}_{1+n}\,,$$

et on posera

$$s_n(y', x) = ((b, y')\nu(f_n), x)\,.$$

Le complexe dirigé augmenté $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$ admet comme base l'ensemble gradué $E$,

$$E_p = \{(i_0, \dots, i_p) \mid 0 \leqslant i_0 < \dots < i_p \leqslant m + 1 + n\}\,, \quad p \geqslant 0\,,$$

et la somme amalgamée $\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}\Delta_{1+n}$ le sous-ensemble gradué $E'$,

$$E'_p = \{(i_0, \dots, i_p) \in E_p \mid i_p \leqslant m \quad \text{ou} \quad m \leqslant i_0\}\,, \quad p \geqslant 0\,,$$

de $E$, l'inclusion de $E'$ dans $E$ définissant une inclusion de complexes dirigés augmentés

$$\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}\Delta_{1+n} \hookrightarrow \mathsf{c}\Delta_{m+1+n}\,.$$

Par définition, le morphisme de groupes gradués sous-jacent à $f_n$ associe, à un élément $(i_0, \dots, i_p)$ de la base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$, l'élément homogène de degré $p$

$$\begin{array}{lll}
(1) & (i_0, \dots, i_p) & \text{si} \quad i_p \leqslant m \quad \text{ou} \quad m \leqslant i_0\,, \\
(2) & (i_0, m) + (m, i_1) & \text{si} \quad p = 1 \quad \text{et} \quad i_0 < m < i_1\,, \\
(3) & (m, i_1, \dots, i_p) & \text{si} \quad p > 1 \quad \text{et} \quad i_0 < m < i_1\,, \\
(3') & (i_0, \dots, i_{p-1}, m) & \text{si} \quad p > 1 \quad \text{et} \quad i_{p-1} < m < i_p\,, \\
(4) & 0 & \text{sinon } (\textit{i.e.} \text{ si} \quad i_1 \leqslant m \leqslant i_{p-1}\,)
\end{array}$$

de $\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}\Delta_{1+n}$. On rappelle (voir le paragraphe 3.10) qu'étant donné des entiers $0 \leqslant i_0 \leqslant \dots \leqslant i_p \leqslant n$, s'il existe $k$ tel que $0 \leqslant k < p$ et tel que $i_k = i_{k+1}$, alors par convention $(i_0, \dots, i_p) = 0$. On observe que les formules définissant $f_n$ sont compatibles avec cette convention, dans le sens où ces formules impliquent alors que $f_n(i_0, \dots, i_p) = 0$. En effet, cela est évident dans les cas (1) et (4), dans le cas (3), cela résulte du fait que l'inégalité stricte $i_0 < i_1$ implique que $k \geqslant 1$, le cas $(3')$ est analogue, et le cas (2) n'intervient pas.

On doit vérifier que $f_n$ est un morphisme de complexes dirigés augmentés, que pour tout $n$-simplexe $(y', x)$ de ${}_{b_m}\backslash NA$ le couple $((b, y')\nu(f_n), x)$ est un $n$-simplexe de ${}_{b}\backslash NA$, que la famille des applications $s_n$, $n \geqslant 0$, ainsi définies est un morphisme d'ensembles simpliciaux et que ce morphisme est une section du morphisme $r$.

***6.3.*** — Montrons d'abord que $f_n$ est un morphisme de complexes dirigés augmentés. La compatibilité à l'augmentation et aux sous-monoïdes de positivité est évidente. Vérifions la compatibilité aux différentielles. Soient $p \geqslant 0$, et $(i_0, \dots, i_p)$ un élément de la base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$ ; on doit prouver que

$$df_n(i_0, \dots, i_p) = f_n d(i_0, \dots, i_p)\,.$$

On distingue plusieurs cas, en suivant la définition de $f_n$ :

(1) $i_p \leqslant m$ ou $m \leqslant i_0$ : l'égalité ci-dessus est alors évidente.

(2) $p = 1$ et $i_0 < m < i_1$ :

$$\begin{aligned} df_n(i_0, i_1) &= d((i_0, m) + (m, i_1)) = (m) - (i_0) + (i_1) - (m) = (i_1) - (i_0) \\ &= f_n(i_1) - f_n(i_0) = f_n((i_1) - (i_0)) = f_n d(i_0, i_1)\,. \end{aligned}$$

(3) $p > 1$ et $i_0 < m < i_1$ :

$$\begin{aligned} df_n(i_0, \dots, i_p) &= d(m, i_1, \dots, i_p) \\ &= (i_1, \dots, i_p) + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k (m, i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p)\,. \end{aligned}$$

Pour le calcul de $f_n d(i_0, \dots, i_p)$, on distingue deux sous-cas :

– $p = 2$ :

$$\begin{aligned} f_n d(i_0, i_1, i_2) &= f_n((i_1, i_2) - (i_0, i_2) + (i_0, i_1)) \\ &= (i_1, i_2) - ((i_0, m) + (m, i_2)) + ((i_0, m) + (m, i_1)) \\ &= (i_1, i_2) - (m, i_2) + (m, i_1). \end{aligned}$$

– $p > 2$ :

$$\begin{aligned} f_n d(i_0, \dots, i_p) &= f_n\Big(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k (i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p)\Big) \\ &= (i_1, \dots, i_p) + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k (m, i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p)\,. \end{aligned}$$

$(3')$ $p > 1$ et $i_{p-1} < m < i_p$ : le calcul est parfaitement analogue au précédent.

(4) $i_1 \leqslant m \leqslant i_{p-1}$ (ce qui implique $p > 1$) :

$$df_n(i_0, \dots, i_p) = 0\,.$$

Pour le calcul de $f_n d(i_0, \dots, i_p)$, on distingue plusieurs sous-cas :

– $p = 2$ (l'inégalité $i_1 \leqslant m \leqslant i_{p-1} = i_1$ implique alors que $i_1 = m$) :

$$\begin{aligned} f_n d(i_0, i_1, i_2) &= f_n((i_1, i_2) - (i_0, i_2) + (i_0, i_1)) \\ &= (i_1, i_2) - ((i_0, m) + (m, i_2)) + (i_0, i_1) \\ &= (m, i_2) - (i_0, m) - (m, i_2) + (i_0, m) = 0\,. \end{aligned}$$

– $p > 2$ et $i_1 = m$ :

$$\begin{aligned} f_n d(i_0, \dots, i_p) &= f_n\Big(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k (i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p)\Big) \\ &= (i_1, \dots, i_p) - (m, i_2, \dots, i_p) + \sum_{k=2}^{p} (-1)^k\, 0 = 0\,. \end{aligned}$$

– $p > 2$ et $i_{p-1} = m$ : le calcul est parfaitement analogue au précédent.

– $p = 3$ et $i_1 < m < i_2$ :

$$\begin{aligned} f_n d(i_0, i_1, i_2, i_3) &= f_n((i_1, i_2, i_3) - (i_0, i_2, i_3) + (i_0, i_1, i_3) - (i_0, i_1, i_2)) \\ &= (m, i_2, i_3) - (m, i_2, i_3) + (i_0, i_1, m) - (i_0, i_1, m) = 0\,. \end{aligned}$$

Désormais le cas $p = 3$ est réglé.

– $p > 3$ et $i_1 < m < i_2$ :

$$\begin{aligned} f_n d(i_0, \dots, i_p) &= f_n\Big(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k (i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p)\Big) \\ &= (m, i_2, \dots, i_p) - (m, i_2, \dots, i_p) + \sum_{k=2}^{p} (-1)^k\, 0 = 0\,. \end{aligned}$$

– $p > 3$ et $i_{p-2} < m < i_{p-1}$ : le calcul est parfaitement analogue au précédent.

– $p > 3$ et $i_2 \leqslant m \leqslant i_{p-2}$ :

$$\begin{aligned} f_n d(i_0, \dots, i_p) &= f_n\Big(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k (i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_p)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k\, 0 = 0\,. \end{aligned}$$

***6.4***. — Le fait que, pour tout $n$-simplexe $(y', x)$ de ${}_{b_m}\backslash NA$, le couple $((b, y')\nu(f_n), x)$ est un $n$-simplexe de ${}_{b}\backslash NA$ résulte aussitôt du cas (1) de la définition de $f_n$ dans le paragraphe 6.2. On définit donc bien une application

$$s_n : ({}_{b_m}\backslash NA)_n \to ({}_{b}\backslash NA)_n\,, \qquad (y', x) \mapsto ((b, y')\nu(f_n), x)\,.$$

***6.5***. — On va montrer maintenant que les applications $s_n$, $n \geqslant 0$, ainsi définies, forment un morphisme d'ensembles simpliciaux $s : {}_{b_m}\backslash NA \to {}_{b}\backslash NA$, autrement dit que pour tout $\psi : \Delta_{n'} \to \Delta_n$, le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
(b_m\backslash NA)_n \arrow[r, "s_n"] \arrow[d, "(b_m\backslash NA)_\psi"'] & (b\backslash NA)_n \arrow[d, "(b\backslash NA)_\psi"] \\
(b_m\backslash NA)_{n'} \arrow[r, "s_{n'}"'] & (b\backslash NA)_{n'}
\end{tikzcd} .$$

Or, pour tout $n$-simplexe $(y', x)$ de $b_m\backslash NA$, on a

$$(b\backslash NA)_\psi s_n(y', x) = (b\backslash NA)_\psi((b, y')\nu(f_n), x) = ((b, y')\nu(f_n)\nu\mathsf{c}(\psi'), x\nu\mathsf{c}(\psi)) ,$$

$$s_{n'}(b_m\backslash NA)_\psi(y', x) = s_{n'}(y'\nu\mathsf{c}(\psi''), x\nu\mathsf{c}(\psi)) = ((b, y'\nu\mathsf{c}(\psi''))\nu(f_{n'}), x\nu\mathsf{c}(\psi)) ,$$

où avec les notations 2.2,

$$\psi' = \Delta_m \amalg \psi : \Delta_{m+1+n'} \to \Delta_{m+1+n} \qquad \text{et} \qquad \psi'' = \Delta_0 \amalg \psi : \Delta_{1+n'} \to \Delta_{1+n} .$$

En tenant compte du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{m+1+n'} \arrow[r, "\nu(f_{n'})"] \arrow[d, "\nu\mathsf{c}(\psi')"'] & \mathcal{O}_m \amalg_{\mathcal{O}_0} \mathcal{O}_{1+n'} \arrow[d, "\mathcal{O}_m\amalg_{\mathcal{O}_0}\nu\mathsf{c}(\psi'')"'] \arrow[dr, "(b, y'\nu\mathsf{c}(\psi''))"] & \\
& & B \\
\mathcal{O}_{m+1+n} \arrow[r, "\nu(f_n)"'] & \mathcal{O}_m \amalg_{\mathcal{O}_0} \mathcal{O}_{1+n} \arrow[ur, "(b, y')"'] &
\end{tikzcd}$$

dont le triangle de droite est commutatif, il suffit de prouver que

$$f_n\mathsf{c}(\psi') = (\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}(\psi''))f_{n'} .$$

Pour commencer, on observe qu'avec les notations du paragraphe 6.2 pour la base de $\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}\Delta_{1+n'}$ et en tenant compte de l'inclusion $\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}\Delta_{1+n'} \hookrightarrow \mathsf{c}\Delta_{m+1+n'}$, pour tout $p \geqslant 0$, et tout élément $(i_0, \dots, i_p)$ de la base de $\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}\Delta_{1+n'}$, on a

$$(\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}(\psi''))(i_0, \dots, i_p) = \mathsf{c}(\psi')(i_0, \dots, i_p) = (\psi'(i_0), \dots, \psi'(i_p)) .$$

Soit maintenant $(i_0, \dots, i_p)$ un élément de la base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n'}$ ; montrons que

$$f_n\mathsf{c}(\psi')(i_0, \dots, i_p) = (\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}(\psi''))f_{n'}(i_0, \dots, i_p) .$$

On distingue plusieurs cas en suivant la définition de $f_n$ dans le paragraphe 6.2 et en tenant compte de l'observation qui suit cette définition :

(1) $i_p \leqslant m$ ou $m \leqslant i_0$ : alors on a aussi $\psi'(i_p) \leqslant m$ ou $m \leqslant \psi'(i_0)$, et l'égalité ci-dessus est évidente.

(2) $p = 1$ et $i_0 < m < i_1$ : alors on a aussi $\psi'(i_0) < m < \psi'(i_1)$ et

$$f_n\mathsf{c}(\psi')(i_0, i_1) = f_n(\psi'(i_0), \psi'(i_1)) = (\psi'(i_0), m) + (m, \psi'(i_1)) ,$$

$$\begin{aligned}(\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}(\psi''))f_{n'}(i_0,i_1) &= (\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}(\psi''))((i_0,m)+(m,i_1))\\ &= \mathsf{c}(\psi')((i_0,m)+(m,i_1))\\ &= (\psi'(i_0),\psi'(m))+(\psi'(m),\psi'(i_1))\\ &= (\psi'(i_0),m)+(m,\psi'(i_1))\,.\end{aligned}$$

(3) $p>1$ et $i_0<m<i_1$ : alors on a aussi $\psi'(i_0)<m<\psi'(i_1)$ et

$$f_n\mathsf{c}(\psi')(i_0,\dots,i_p) = f_n(\psi'(i_0),\dots,\psi'(i_p)) = (m,\psi'(i_1),\dots,\psi'(i_p))\,,$$

$$\begin{aligned}(\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}(\psi''))f_{n'}(i_0,\dots,i_p) &= (\mathsf{c}\Delta_m \amalg_{\mathsf{c}\Delta_0} \mathsf{c}(\psi''))(m,i_1,\dots,i_p)\\ &= \mathsf{c}(\psi')(m,i_1,\dots,i_p)\\ &= (\psi'(m),\psi'(i_1),\dots,\psi'(i_p))\\ &= (m,\psi'(i_1),\dots,\psi'(i_p))\,.\end{aligned}$$

(3′) $p>1$ et $i_{p-1}<m<i_p$ : le calcul est parfaitement analogue au précédent.

(4) $i_1\leqslant m\leqslant i_{p-1}$ : alors on a $f_{n'}(i_0,\dots,i_p)=0$ et $\psi'(i_1)\leqslant m\leqslant\psi'(i_{p-1})$, d'où

$$f_n\mathsf{c}(\psi')(i_0,\dots,i_p) = f_n(\psi'(i_0),\dots,\psi'(i_p)) = 0\,.$$

Le fait que $s$ est une section du morphisme $r$ résulte aussitôt du cas (1) de la définition de $f_n$.

***6.6***. — Dans ce qui suit, on va définir une homotopie du morphisme composé

$$sr : {}_{b}\backslash NA \to {}_{b}\backslash NA$$

vers le morphisme identité de ${}_{b}\backslash NA$. On vérifie facilement que, pour $n\geqslant 0$, ce morphisme associe à un $n$-simplexe $(y,x)$ de ${}_{b}\backslash NA$, le $n$-simplexe $(y\nu(f_n),x)$, où l'on note aussi $f_n : \mathsf{c}\Delta_{m+1+n}\to\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$ le composé de $f_n : \mathsf{c}\Delta_{m+1+n}\to\mathsf{c}\Delta_m\amalg_{\mathsf{c}\Delta_0}\mathsf{c}\Delta_{1+n}$ avec l'inclusion canonique $\mathsf{c}\Delta_m\amalg_{\mathsf{c}\Delta_0}\mathsf{c}\Delta_{1+n}\hookrightarrow\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$. On définit une homotopie $h:\Delta_1\times{}_{b}\backslash NA\to{}_{b}\backslash NA$ comme suit. Soient $n\geqslant 0$ et $(\varphi,y,x)$,

$$\varphi:\Delta_n\to\Delta_1\,,\ y:\mathcal{O}_{m+1+n}\to B\,,\ x:\mathcal{O}_n\to A\,,\quad y_{0,\dots,m}=b\,,\ y_{m+1,\dots,m+1+n}=u(x)\,,$$

un $n$-simplexe de $\Delta_1\times{}_{b}\backslash NA$. On va définir un morphisme de complexes dirigés augmentés $f_\varphi:\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}\to\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$, et on posera

$$h(\varphi,y,x) = (y\nu(f_\varphi),x)\,.$$

On définit $\bar\varphi:\Delta_{m+1+n}\to\Delta_1$ en posant

$$\bar\varphi(i)=\begin{cases}0\,, & 0\leqslant i\leqslant m\,,\\ \varphi(i-m-1)\,, & m+1\leqslant i\leqslant m+1+n\,.\end{cases}$$

Pour tout élément $(i_0,\dots,i_p)$, $p\geqslant 0$, de la base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$, il existe un unique entier $k_\varphi$ tel que $-1\leqslant k_\varphi\leqslant p$, et tel que

$$\bar\varphi(i_k)=\begin{cases}0\,, & 0\leqslant k\leqslant k_\varphi\,,\\ 1\,, & k_\varphi+1\leqslant k\leqslant p\,.\end{cases}$$

On remarque que si $k_\varphi < p$, alors $i_{k_\varphi+1} > m$. On définit $f_\varphi$ en posant

$$f_\varphi(i_0,\dots,i_p) = f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p)\,,$$

ce qui signifie que :

– si $0 \leqslant k_\varphi < p$, et si $f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})$ est une somme d'éléments de la base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$, alors $f_\varphi(i_0,\dots,i_p)$ est la somme dont les termes sont obtenus en concaténant à droite $(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p)$ à chacun des termes de la somme $f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})$ (et en particulier, si $f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi}) = 0$, alors on a aussi $f_\varphi(i_0,\dots,i_p) = 0$) ;
– si $k_\varphi = -1$, alors $f_\varphi(i_0,\dots,i_p) = (i_0,\dots,i_p)$ ;
– si $k_\varphi = p$, alors $f_\varphi(i_0,\dots,i_p) = f_n(i_0,\dots,i_p)$.

Étant donné des entiers $0 \leqslant i_0 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant n$, s'il existe $k$ tel que $0 \leqslant k < p$ et tel que $i_k = i_{k+1}$, la définition de $k_\varphi$ garde un sens, et la formule définissant $f_\varphi$ est compatible avec la convention $(i_0,\dots,i_p) = 0$. En effet, puisque alors $\bar\varphi(i_k) = \bar\varphi(i_{k+1})$, on a ou bien $k+1 \leqslant k_\varphi$ ou bien $k_\varphi + 1 \leqslant k$, et l'assertion résulte de la propriété analogue des formules définissant $f_n$ (voir le paragraphe 6.2).

On doit vérifier que $f_\varphi$ est un morphisme de complexes dirigés augmentés, que pour tout $n$-simplexe $(\varphi, y, x)$ de $\Delta_1 \times {}_b\backslash NA$, le couple $(y\nu(f_\varphi), x)$ est un $n$-simplexe de ${}_b\backslash NA$, et que $h$ est bien une homotopie simpliciale de $sr$ vers $1_{{}_b\backslash NA}$.

***6.7***. — Montrons pour commencer que $f_\varphi$ est un morphisme de complexes dirigés augmentés. La compatibilité à l'augmentation et aux sous-monoïdes de positivité est évidente. Vérifions la compatibilité aux différentielles. Soient $p \geqslant 0$ et $(i_0,\dots,i_p)$ un élément de la base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$ ; on doit prouver que

$$df_\varphi(i_0,\dots,i_p) = f_\varphi d(i_0,\dots,i_p)\,.$$

On a

$$\begin{aligned}
f_\varphi d(i_0,\dots,i_p) &= f_\varphi\Big(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k(i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_p)\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{k_\varphi}(-1)^k f_\varphi(i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{k_\varphi},i_{k_\varphi+1},\dots,i_p)\\
&\qquad + \sum_{k=k_\varphi+1}^{p}(-1)^k f_\varphi(i_0,\dots,i_{k_\varphi},i_{k_\varphi+1},\dots,\hat{i}_k,\dots,i_p)\\
&= \sum_{k=0}^{k_\varphi}(-1)^k f_n(i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{k_\varphi})(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p)\\
&\qquad + (-1)^{k_\varphi+1}\sum_{k=0}^{p-k_\varphi-1}(-1)^k f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})(i_{k_\varphi+1},\dots,\hat{i}_{k_\varphi+1+k},\dots,i_p)\\
&= f_n d(i_0,\dots,i_{k_\varphi})(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p)\\
&\qquad + (-1)^{k_\varphi+1} f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})d(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= df_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p) \\ &\qquad + (-1)^{k_\varphi+1} f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi}) d(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p) = df_\varphi(i_0,\dots,i_p)\,, \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité résultant de la compatibilité de $f_n$ aux différentielles, prouvée dans le paragraphe 6.3.

***6.8***. — Le fait que pour tout $n$-simplexe $(\varphi, y, x)$ de $\Delta_1 \times {}_b\backslash NA$, le couple $(y\nu(f_\varphi), x)$ est un $n$-simplexe de ${}_b\backslash NA$ résulte de l'observation qu'en vertu du cas (1) de la définition de $f_n$ dans le paragraphe 6.2, pour tout $p \geqslant 0$, et tout $(i_0,\dots,i_p)$ dans la base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$, si $i_p \leqslant m$ ou si $m+1 \leqslant i_0$, on a

$$f_\varphi(i_0,\dots,i_p) = f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p) = (i_0,\dots,i_p)\,.$$

On définit donc bien une application

$$h_n : (\Delta_1 \times {}_b\backslash NA)_n \to ({}_b\backslash NA)_n\,, \qquad (\varphi, y, x) \mapsto (y\nu(f_\varphi), x)\,.$$

***6.9***. — On va montrer maintenant que les applications $h_n$, $n \geqslant 0$, ainsi définies, forment un morphisme d'ensembles simpliciaux $h : \Delta_1 \times {}_b\backslash NA \to {}_b\backslash NA$, autrement dit que pour tout $\psi : \Delta_{n'} \to \Delta_n$, le carré suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} (\Delta_1 \times {}_b\backslash NA)_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "(\Delta_1 \times {}_b\backslash NA)_\psi"'] & ({}_b\backslash NA)_n \arrow[d, "({}_b\backslash NA)_\psi"] \\ (\Delta_1 \times {}_b\backslash NA)_{n'} \arrow[r, "h_{n'}"'] & ({}_b\backslash NA)_{n'} \end{tikzcd} \quad .$$

Or, pour tout $n$-simplexe $(\varphi, y, x)$ de $\Delta_1 \times {}_b\backslash NA$, on a

$$h_{n'}(\Delta_1 \times {}_b\backslash NA)_\psi(\varphi, y, x) = h_{n'}(\varphi\psi, y\nu\mathsf{c}(\psi'), x\nu\mathsf{c}(\psi)) = (y\nu\mathsf{c}(\psi')\nu(f_{\varphi\psi}), x\nu\mathsf{c}(\psi))\,,$$

$$({}_b\backslash NA)_\psi h_n(\varphi, y, x) = ({}_b\backslash NA)_\psi(y\nu(f_\varphi), x) = (y\nu(f_\varphi)\nu\mathsf{c}(\psi'), x\nu\mathsf{c}(\psi))\,,$$

où, dans les notations de 2.2, $\psi' = \Delta_m \amalg \psi : \Delta_{m+1+n'} \to \Delta_{m+1+n}$. Il suffit donc de prouver que pour tout $p \geqslant 0$, et tout élément $(i_0,\dots,i_p)$ de la base de $\Delta_{m+1+n'}$, on a

$$\mathsf{c}(\psi') f_{\varphi\psi}(i_0,\dots,i_p) = f_\varphi\, \mathsf{c}(\psi')(i_0,\dots,i_p)\,.$$

Or, d'une part, on a

$$\begin{aligned} \mathsf{c}(\psi') f_{\varphi\psi}(i_0,\dots,i_p) &= \mathsf{c}(\psi')(f_{n'}(i_0,\dots,i_{k_{\varphi\psi}})(i_{k_{\varphi\psi}+1},\dots,i_p)) \\ &= \mathsf{c}(\psi') f_{n'}(i_0,\dots,i_{k_{\varphi\psi}})\, \mathsf{c}(\psi')(i_{k_{\varphi\psi}+1},\dots,i_p) \\ &= f_n \mathsf{c}(\psi')(i_0,\dots,i_{k_{\varphi\psi}})\, \mathsf{c}(\psi')(i_{k_{\varphi\psi}+1},\dots,i_p) \\ &= f_n(\psi'(i_0),\dots,\psi'(i_{k_{\varphi\psi}}))(\psi'(i_{k_{\varphi\psi}+1}),\dots,\psi'(i_p))\,, \end{aligned}$$

(l'avant-dernière égalité résultant du paragraphe 6.5), et d'autre part, on vérifie aussitôt que $\overline{\varphi\psi} = \bar\varphi\psi'$, d'où par définition de $k_{\varphi\psi}$, on a

$$\bar\varphi\psi'(i_0) = \cdots = \bar\varphi\psi'(i_{k_{\varphi\psi}}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \bar\varphi\psi'(i_{k_{\varphi\psi}+1}) = \cdots = \bar\varphi\psi'(i_p) = 1\,,$$

et par suite,

$$\begin{aligned} f_\varphi\,\mathsf{c}(\psi')(i_0,\dots,i_p) &= f_\varphi(\psi'(i_0),\dots,\psi'(i_p)) \\ &= f_n(\psi'(i_0),\dots,\psi'(i_{k_{\varphi\psi}}))(\psi'(i_{k_{\varphi\psi}+1}),\dots,\psi'(i_p))\,. \end{aligned}$$

Ces égalités étant valables, en vertu des commentaires qui suivent la définition de $f_\varphi$ dans le paragraphe 6.6, même s'il existe $k$ tel que $0 \leqslant k < p$ et tel que $\psi'(i_k) = \psi'(i_{k+1})$, ceci achève la preuve de l'assertion.

***6.10***. — Pour tous $p, n \geqslant 0$, et tout élément $(i_0,\dots,i_p)$ de la base de $\Delta_{m+1+n}$, si $\varphi : \Delta_n \to \Delta_1$ est constant de valeur 0, alors $k_\varphi = p$ et $f_\varphi(i_0,\dots,i_p) = f_n(i_0,\dots,i_p)$, et si $\varphi$ est constant de valeur 1, alors $k_\varphi = -1$ et $f_\varphi(i_0,\dots,i_p) = (i_0,\dots,i_p)$, ce qui implique que le morphisme $h : \Delta_1 \times {}_b\backslash NA \to {}_b\backslash NA$ est une homotopie simpliciale de $sr$ vers $1_{{}_b\backslash NA}$.

***6.11***. — Il reste à montrer que ${}_{b_m}\backslash NA$ est un rétracte par déformation fort de ${}_b\backslash NA$, autrement dit que le carré

$$\begin{tikzcd} \Delta_1 \times {}_{b_m}\backslash NA \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "1_{\Delta_1}\times s"'] & {}_{b_m}\backslash NA \arrow[d, "s"] \\ \Delta_1 \times {}_b\backslash NA \arrow[r, "h"'] & {}_b\backslash NA \end{tikzcd} \quad ,$$

où $pr_2$ désigne la deuxième projection, est commutatif. Or, pour tout $n \geqslant 0$, et tout $n$-simplexe $(\varphi, y', x)$ de $\Delta_1 \times {}_{b_m}\backslash NA$, on a

$$s\,pr_2(\varphi, y', x) = s(y', x) = ((b, y')\nu(f_n), x)\,,$$

$$h(1_{\Delta_1} \times s)(\varphi, y', x) = h(\varphi, (b, y')\nu(f_n), x) = ((b, y')\nu(f_n)\nu(f_\varphi), x)\,.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $p \geqslant 0$, et tout $(i_0,\dots,i_p)$ dans la base de $\mathsf{c}\Delta_{m+1+n}$, on a $f_n f_\varphi(i_0,\dots,i_p) = f_n(i_0,\dots,i_p)$, autrement dit en vertu de la définition de $f_\varphi$, que

$$f_n\big(f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p)\big) = f_n(i_0,\dots,i_p)\,.$$

On remarque que si $k_\varphi = -1$, cette égalité est évidente, et que si $k_\varphi = p$, elle résulte de la relation $f_n f_n = f_n$, qui est conséquence immédiate de la définition de $f_n$ dans le paragraphe 6.2. On peut donc supposer que $0 \leqslant k_\varphi < p$. On distingue plusieurs cas, suivant la définition de $f_n$ :

(1) $i_{k_\varphi} \leqslant m$ ou $i_0 \geqslant m$ : alors l'égalité est évidente. On peut donc supposer dans ce qui suit que $k_\varphi > 0$ et $i_{k_\varphi} > m$.

(2) $k_\varphi = 1$ et $i_0 < m < i_1 = i_{k_\varphi}$ : alors, vu que $p > k_\varphi = 1$, on a

$$\begin{aligned} f_n\big(f_n(i_0, i_1)(i_2,\dots,i_p)\big) &= f_n(i_0, m, i_2,\dots,i_p) + f_n(m, i_1, i_2,\dots,i_p) \\ &= 0 + (m, i_1, i_2,\dots,i_p) = f_n(i_0,\dots,i_p)\,. \end{aligned}$$

(3) $k_\varphi > 1$ et $i_0 < m < i_1$ : alors on a
$$\begin{aligned} f_n\big(f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p)\big) &= f_n(m,i_1,\dots,i_{k_\varphi},i_{k_\varphi+1},\dots,i_p) \\ &= (m,i_1,\dots,i_p) = f_n(i_0,\dots,i_p)\,. \end{aligned}$$

(3′) $k_\varphi > 1$ et $i_{k_\varphi-1} < m < i_{k_\varphi}$ : alors, vu que $p > k_\varphi$, on a
$$\begin{aligned} f_n\big(f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p)\big) &= f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi-1},m,i_{k_\varphi+1},\dots,i_p) \\ &= 0 = f_n(i_0,\dots,i_p)\,. \end{aligned}$$

(4) $i_1 \leqslant m \leqslant i_{k_\varphi-1}$ : alors on a
$$f_n\big(f_n(i_0,\dots,i_{k_\varphi})(i_{k_\varphi+1},\dots,i_p)\big) = 0 = f_n(i_0,\dots,i_p)\,.$$

On a donc établi le théorème suivant.

***Théorème 6.12.*** — *Soient $A$ et $B$ deux $\infty$-catégories, $u : NA \to NB$ un morphisme d'ensembles simpliciaux, $m \geqslant 0$ un entier, et $b : \mathcal{O}_m \to B$ un $m$-simplexe de $NB$. Alors le morphisme d'ensembles simpliciaux*
$$r : {}_{b}\backslash NA \to {}_{b_m}\backslash NA\,,$$
*associant à un $n$-simplexe $(y,x)$ de ${}_{b}\backslash NA$, $n \geqslant 0$,*
$$x : \mathcal{O}_n \to A\,,\ y : \mathcal{O}_{m+1+n} \to B \quad \textit{tels que} \quad y_{0,\dots,m} = b\,,\ y_{m+1,\dots,m+1+n} = u(x)\,,$$
*le $n$-simplexe $(y_{m,m+1,\dots,m+1+n}, x)$ de ${}_{b_m}\backslash NA$, admet une section $s$ faisant de ${}_{b_m}\backslash NA$ un rétracte par déformation fort de ${}_{b}\backslash NA$. En particulier, $r$ est une équivalence faible simpliciale.*

Le cas particulier de ce théorème, pour $u$ le nerf de Street d'un $\infty$-foncteur $A \to B$, achève la démonstration du théorème A $\infty$-catégorique de la section précédente.

## Références

[1] F. A. Al-Agl & R. Steiner – « Nerves of multiple categories », *Proc. London Math. Soc. (3)* **66** (1993), no. 1, p. 92–128.

[2] D. Ara – « Sur les $\infty$-groupoïdes de Grothendieck et une variante $\infty$-catégorique », Thèse, Université Paris Diderot – Paris 7, 2010, sous la direction de G. Maltsiniotis.

[3] ———, « On the homotopy theory of Grothendieck $\infty$-groupoids », *J. Pure Appl. Algebra* **217** (2013), p. 1237–1278.

[4] ———, « Sur les types d'homotopie modélisés par les $\infty$-groupoïdes stricts », *Theory Appl. Categ.* **28** (2013), p. 552–576.

[5] ———, « Higher quasi-categories vs higher Rezk spaces », *J. K-Theory* **14** (2014), no. 3, p. 701–749.

[6] ———, « Structures de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des 2-catégories strictes », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **56** (2015), no. 2, p. 83–108.

[7] ———, « A Quillen's Theorem B for strict $\infty$-categories », en préparation.

[8] D. Ara & G. Maltsiniotis – « Vers une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des $n$-catégories strictes », *Adv. Math.* **259** (2014), p. 557–654.

[9] ———, « Le type d'homotopie de la $\infty$-catégorie associée à un complexe simplicial », Prépublication, arXiv:1503.02720, 2015.

[10] ———, « Joint et tranches pour les $\infty$-catégories strictes », Prépublication, arXiv:1607.00668, 2016.

[11] ———, « Un théorème A de Quillen pour les $\infty$-catégories strictes II : la preuve $\infty$-catégorique », en préparation.

[12] ———, « Comparaison des nerfs $n$-catégoriques », en préparation.

[13] M. Artin & B. Mazur – *Etale homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 100, Springer-Verlag, 1969.

[14] M. A. Batanin – « Monoidal globular categories as natural environment for the theory of weak $n$-categories », *Adv. Math.* **136** (1998), p. 39–103.

[15] C. Berger – « A cellular nerve for higher categories », *Adv. Math.* **169** (2002), p. 118–175.

[16] ———, « Iterated wreath product of the simplex category and iterated loop spaces », *Adv. Math.* **213** (2007), p. 230–270.

[17] J. E. Bergner – « A model category structure on the category of simplicial categories », *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), no. 5, p. 2043–2058.

[18] A. K. Bousfield & D. M. Kan – *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 304, Springer-Verlag, 1972.

[19] R. Brown & P. J. Higgins – « Tensor products and homotopies for $\omega$-groupoids and crossed complexes », *J. Pure Appl. Algebra* **47** (1987), no. 1, p. 1–33.

[20] M. Bullejos & A. M. Cegarra – « On the geometry of 2-categories and their classifying spaces », *K-Theory* **29** (2003), no. 3, p. 211–229.

[21] A. M. Cegarra – « Homotopy fibre sequences induced by 2-functors », *J. Pure Appl. Algebra* **215** (2011), no. 4, p. 310–334.

[22] J. Chiche – « La théorie de l'homotopie des 2-catégories », Thèse, Université Paris Diderot – Paris 7, 2014, sous la direction de G. Maltsiniotis.

[23] ———, « Un théorème A de Quillen pour les 2-foncteurs lax », *Theory Appl. Categ.* **30** (2015), p. 49–85.

[24] ———, « Théories homotopiques des 2-catégories », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **56** (2015), no. 1, p. 15–75.

[25] D.-C. Cisinski – « Higher categories and homotopical algebra », à paraître dans *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*.

[26] ———, « Le localisateur fondamental minimal », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **45** (2004), no. 2, p. 109–140.

[27] ———, « Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie », *Astérisque* (2006), no. 308, p. xxiv+390.

[28] D.-C. Cisinski & G. Maltsiniotis – « La catégorie $\boldsymbol{\Theta}$ de Joyal est une catégorie test », *J. Pure Appl. Algebra* **215** (2011), p. 962–982.

[29] S. Crans – « On combinatorial models for higher dimensional homotopies », Thèse, Université d'Utrecht, 1995, sous la direction de I. Moerdijk et D. van Dalen.

[30] W. G. Dwyer & D. M. Kan – « Function complexes in homotopical algebra », *Topology* **19** (1980), p. 427–440.

[31] E. Finster & S. Mimram – « A type-theoretical definition of weak $\omega$-categories », in *32nd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, 2017, p. 1–12.

[32] A. Gagna – « Strict $n$-categories and augmented directed complexes model homotopy types », Prépublication, arXiv:1612.04450, 2016.

[33] D. Gaitsgory – « Progrès récents dans la théorie de Langlands géométrique », *Astérisque* (2017), no. 390, Séminaire Bourbaki, vol. 2015/2016, exposé no. 1109.

[34] A. Grothendieck – « Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. III. Préschemas quotients », Séminaire Bourbaki, vol. 6 (1960-1961), exposé no. 212.

[35] ———, « *Pursuing stacks* », Manuscrit, 1983, à paraître dans *Documents Mathématiques.*

[36] L. Guetta – « Homologie des $\omega$-catégories », Thèse en préparation, Université Paris Diderot – Paris 7, sous la direction de C. Berger et F. Métayer.

[37] Y. Guiraud & P. Malbos – « Higher-dimensional normalisation strategies for acyclicity », *Adv. Math.* **231** (2012), no. 3-4, p. 2294–2351.

[38] S. Henry – « Algebraic models of homotopy types and the homotopy hypothesis », Prépublication, arXiv:1609.04622, 2016.

[39] G. Heuts & I. Moerdijk – « Left fibrations and homotopy colimits », *Math. Z.* **279** (2015), no. 3-4, p. 723–744.

[40] M. L. del Hoyo – « Espacios clasificantes de categorías fibradas », Thèse, Université de Buenos Aires, 2009, sous la direction de E. G. Minian.

[41] ———, « The rectification of lax functors and Quillen's Theorem A », Communication privée à J. Chiche, 2011.

[42] ———, « On the loop space of a 2-category », *J. Pure Appl. Algebra* **216** (2012), no. 1, p. 28–40.

[43] L. Illusie – *Complexe cotangent et déformations I et II*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 239 et 283, Springer-Verlag, 1971 et 1972.

[44] A. Joyal – « Disks, duality and $\Theta$-categories », Prépublication, 1997.

[45] ———, « Quasi-categories and Kan complexes », *J. Pure Appl. Algebra* **175** (2002), no. 1-3, p. 207–222, Special volume celebrating the 70th birthday of Professor Max Kelly.

[46] ———, « Notes on quasi-categories », Prépublication, 2008.

[47] ———, « The theory of quasi-categories and its applications », Lectures at the CRM (Barcelona), Prépublication, 2008.

[48] Y. Lafont & F. Métayer – « Polygraphic resolutions and homology of monoids », *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), no. 6, p. 947–968.

[49] Y. Lafont, F. Métayer & K. Worytkiewicz – « A folk model structure on omegacat », *Adv. Math.* **224** (2010), p. 1183–1231.

[50] J. Lurie – « Derived algebraic geometry », Thèse, Massachusetts Institute of Technology, 2004, sous la direction de M. Hopkins.

[51] ———, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, 2009.

[52] ———, « On the classification of topological field theories », in *Current developments in mathematics, 2008*, Int. Press, 2009, p. 129–280.

[53] G. Maltsiniotis – « La théorie de l'homotopie de Grothendieck », *Astérisque* (2005), no. 301, p. vi+140.

[54] ———, « Grothendieck $\infty$-groupoids and still another definition of $\infty$-categories », Prépublication, arXiv:1009.2331, 2015.

[55] F. Métayer – « Resolutions by polygraphs », *Theory Appl. Categ.* **11** (2003), p. 148–184.

[56] I. MOERDIJK – *Classifying spaces and classifying topoi*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1616, Springer-Verlag, 1995.

[57] A. NEEMAN – « The $K$-theory of triangulated categories », in *Handbook of $K$-theory. Vol. 1, 2*, Springer-Verlag, 2005, p. 1011–1078.

[58] D. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[59] ———, « Higher algebraic K-theory: I », p. 85–147, in *Algebraic K-theory I: Higher K-theories* (H. Bass, éd.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 341, Springer-Verlag, 1973.

[60] C. REZK – « A model for the homotopy theory of homotopy theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), no. 3, p. 973–1007.

[61] ———, « A Cartesian presentation of weak $n$-categories », *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 1, p. 521–571.

[62] ———, « Correction to "A Cartesian presentation of weak $n$-categories" », *Geom. Topol.* **14** (2010), no. 4, p. 2301–2304.

[63] C. SIMPSON – « Homotopy types of strict 3-groupoids », Prépublication, arXiv:math/9810059v1, 1998.

[64] ———, *Homotopy theory of higher categories*, New Mathematical Monographs, vol. 19, Cambridge University Press, 2012.

[65] R. STEINER – « Omega-categories and chain complexes », *Homology Homotopy Appl.* **6** (2004), no. 1, p. 175–200.

[66] ———, « Orientals », in *Categories in algebra, geometry and mathematical physics*, Contemp. Math., vol. 431, Amer. Math. Soc., 2007, p. 427–439.

[67] ———, « Opetopes and chain complexes », *Theory Appl. Categ.* **26** (2012), no. 19, p. 501–519.

[68] R. STREET – « The algebra of oriented simplexes », *J. Pure Appl. Algebra* **49** (1987), no. 3, p. 283–335.

[69] ———, « Parity complexes », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **32** (1991), no. 4, p. 315–343.

[70] R. THOMASON – « $\mathcal{C}at$ as a closed model category », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **21** (1980), no. 3, p. 305–324.

[71] B. TOËN – « Derived algebraic geometry », *EMS Surv. Math. Sci.* **1** (2014), no. 2, p. 153–240.

[72] D. VERITY – « Weak complicial sets. II. Nerves of complicial Gray-categories », in *Categories in algebra, geometry and mathematical physics*, Contemp. Math., vol. 431, Amer. Math. Soc., 2007, p. 441–467.

[73] ———, « Complicial sets characterising the simplicial nerves of strict $\omega$-categories », *Mem. Amer. Math. Soc.* **193** (2008), no. 905, p. xvi+184.

[74] ———, « Weak complicial sets. I. Basic homotopy theory », *Adv. Math.* **219** (2008), no. 4, p. 1081–1149.

---

DIMITRI ARA, Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France • *E-mail :* `dimitri.ara@univ-amu.fr`
*Url :* `http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/dimitri.ara/`

GEORGES MALTSINIOTIS, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Diderot, Case Postale 7012, Bâtiment Sophie Germain, 75205 Paris Cedex 13, France
*E-mail :* `georges.maltsiniotis@imj-prg.fr`
*Url :* `http://webusers.imj-prg.fr/~georges.maltsiniotis/`