Algèbre
ENS Cachan

Année 2011/2012
Dimitri Ara

TD 4
Autour des anneaux polynômes

Exercice 1 (**Extensions des réels).** Soient P et Q deux polynômes irréductibles de degré de 2 de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\mathbb{R}[X]/(P)$ et $\mathbb{R}[X]/(Q)$ sont isomorphes. Cet isomorphisme est-il unique ?

Exercice 2 (**Point de rebroussement).** Soit k un corps. On considère l'anneau $A = k[X,Y]/(X^2 - Y^3)$.

1. Décrire A (à isomorphisme près) comme un sous-anneau de $k[T]$.
2. Déduire de cette description que A n'est pas factoriel.

Exercice 3 (**Quelques quotients d'anneaux de polynômes).** Soit k un corps.

1. Montrer que l'anneau $k[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ est intègre. Est-ce un corps ?
2. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[X]/(2, X^4 + X + 1)$ est un corps.
3. Montrer que l'anneau $k[X,Y]/(Y - X^2)$ est principal.
4. Montrer que l'anneau $k[X,Y]/(XY - 1)$ est principal.
5. Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de V. Notons μ le polynôme minimal de u. Décrire l'anneau $k[X]/(\mu)$ en termes d'endomorphismes de V.

Exercice 4 (**Carrés modulo p).** Soit p un nombre premier impair.

1. Combien y a-t-il de carrés non nuls dans $\mathbb{F}_p$?
2. Montrer que les carrés non nuls de $\mathbb{F}_p$ sont exactement les racines dans $\mathbb{F}_p$ du polynôme $X^{(p-1)/2} - 1$.
3. En déduire que -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si p est congru à 1 modulo 4.

Exercice 5 (**Séries formelles).** Soit k un corps. On définit l'anneau $k[[X]]$ des *séries formelles* de la manière suivante. Un élément de $k[[X]]$ est une suite $(a_n)_{n\geq 0}$. On notera $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ un tel élément. La structure d'anneau est donnée par les opérations suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} a_n X^n + \sum_{n\geq 0} b_n X^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) X^n,$$
$$\Big(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\Big)\Big(\sum_{n\geq 0} b_n X^n\Big) = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j\Big) X^n.$$

Si $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est une série formelle non nulle, on appelle *valuation* de P le plus petit entier k tels que a_k est non nuls. Si $P = 0$, on convient que cette valuation est $+\infty$. On notera $\nu(P)$ la valuation de P.

1. Soient P et Q dans $k[[X]]$. Que vaut $\nu(PQ)$? En déduire que $k[[X]]$ est intègre. Que peut-on dire sur $\nu(P+Q)$?
2. Déterminer les éléments inversibles de $k[[X]]$.
3. Déterminer les éléments irréductibles de $k[[X]]$.
4. Montrer que $k[[X]]$ est un anneau principal.

Exercice 6 (Anneaux noethériens).

1. Soit A un anneau. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) tout idéal de A est de type fini ;
   (b) toute suite croissante d'idéaux est stationnaire ;
   (c) toute famille non vide d'idéaux de A admet un élément maximal.

   On dit qu'un anneau A est *noethérien* s'il vérifie les trois conditions ci-dessus.
2. Soit A un anneau noethérien et I un idéal de A. Montrer que A/I est un anneau noethérien.
3. Vérifier que tout anneau principal est noethérien.
4. Donner un exemple d'anneau factoriel qui n'est pas noethérien.

Exercice 7 (Théorème d'Hilbert). Soit A un anneau noethérien. Si I est un idéal de $A[X]$ et n est un entier positif, on notera $d_n(I)$ le sous-ensemble de A constitué de 0 et des coefficients dominants des polynômes de degré n appartenant à I.

1. Vérifier que $d_n(I)$ est un idéal de A.
2. Soient $I \subset J$ deux idéaux de $A[X]$. Montrer que si $d_n(I) = d_n(J)$ pour tout $n \geq 0$, alors $I = J$.
3. Soit $(I_k)_{k\geq 0}$ une suite croissante d'idéaux de $A[X]$. Vérifier que pour tous $n, k \geq 0$, on a $d_n(I_k) \subset d_{n+1}(I_k)$ et $d_n(I_k) \subset d_n(I_{k+1})$.
4. En considérant la famille $\{d_n(I_k)\}_{n,k\geq 0}$ et les suites $(d_n(I_k))_{k\geq 0}$ pour n fixé, montrer que la suite $(I_k)_{k\geq 0}$ est stationnaire et que l'anneau $A[X]$ est donc noethérien.
5. En déduire que pour tout idéal I de $A[X_1, \ldots, X_n]$, l'anneau $A[X_1, \ldots, X_n]/I$ est noethérien.

Exercice 8 (Éléments entiers). Si B un anneau et A est un sous-anneau de B, on dit qu'un élément x de B est *entier* sur A s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A.

1. Soient B un anneau et A un sous-anneau de B. On suppose que tout élément de B est entier sur A. Montrer que A est un corps si et seulement si B est un corps.
2. Soient A un anneau et K son corps des fractions. On dit que A est *intégralement clos* si les éléments de K entiers sur A sont dans A. Montrer que si A est factoriel, alors A est intégralement clos.