Algèbre
ENS Cachan

Année 2011/2012
Dimitri Ara

TD 2
Autour des groupes quotients

Exercice 1 (Intersection de sous-groupes distingués). Montrer que l'intersection de deux sous-groupes distingués est un sous-groupe distingué.

Exercice 2 (Sous-groupes d'indice 2). Soit H un sous-groupe d'indice 2 d'un groupe fini G. Montrer que H est distingué.

Exercice 3 (Autour du centre). Soit G un groupe et $Z(G)$ son centre. Montrer que si $G/Z(G)$ est cyclique alors G est abélien.

Exercice 4 (Sous-groupes des groupes monogènes). Soit $n \geq 0$. Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en utilisant les résultats sur les groupes quotients.

Exercice 5 (Théorème de Cauchy abélien). Soit G un groupe abélien fini et p un nombre premier divisant l'ordre de G. Montrer que G admet un élément d'ordre p. On pourra procéder par récurrence sur l'ordre de G.

Exercice 6 (Abélianisé).

1. Soit G un groupe. On a appelle *sous-groupe dérivé* de G le sous-groupe engendré par les commutateurs *i.e.* les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ pour x, y dans G. On note $D(G)$ ce sous-groupe. Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Montrer $G/D(G)$ est un groupe abélien.
3. Montrer que pour tout groupe abélien A et tout morphisme $f : G \to A$, il existe un unique morphisme $\overline{f} : G/D(G) \to A$ tel que $\overline{f}p = f$, où $p : G \to G/D(G)$ est la projection canonique

Exercice 7 (Actions de groupes). Soit G un groupe et X un ensemble. Fixons une *action* de G sur X, *i.e.* un morphisme $\varphi : G \to S_X = \mathsf{Aut}(X)$. Si g est dans G et x est dans X, on notera $g.x = \varphi(g)(x)$.

1. Soit x un élément de X. On pose $\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G; g.x = x\}$. Montrer que $\mathrm{Stab}(x)$ est un sous-groupe de G. Est-il distingué ?
2. Soit x un élément de G. On appelle *orbite* de x l'ensemble $Gx = \{g.x; g \in G\}$. Montrer que la relation « être dans la même orbite » est une relation d'équivalence.
3. Soit x dans X. Montrer qu'on a une bijection canonique $G/\mathrm{Stab}(x) \to Gx$.
4. **(Équation aux classes)** On suppose maintenant G et X finis. Montrer qu'on a

$$|X| = \sum_x |G|/|\mathrm{Stab}(x)|,$$

où x parcourt un système complet de représentants des orbites.

5. Notons $X^G = \{x \in X ; \forall\, g \in G, g.x = x\}$. Montrer que si G est un p-groupe (*i.e.* d'ordre une puissance de p avec p est premier), alors $|X| = |X^G|$ modulo p.

Exercice 8 (Centre d'un p-groupe). En utilisant le dernière question de l'exercice précédent, montrer que le centre d'un p-groupe est non trivial. En déduire que tout groupe d'ordre p^2 (avec p premier) est abélien.

Exercice 9 (Théorème de Cauchy non abélien). Soit G un groupe non abélien et p un nombre premier divisant l'ordre de G. Montrer que G admet un élément d'ordre p. On pourra raisonner par récurrence en appliquant l'équation aux classes à l'action de G sur lui-même par conjugaison.

Exercice 10 (Décomposition en produit semi-direct). Soit G un groupe admettant deux sous-groupes N et H tels que :

1. $G = NH$;
2. $N \cap H = \{1\}$;
3. N est un sous-groupe distingué de G.

Montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct $N \rtimes H$.

Exercice 11 (Suites exactes). On dit qu'une suite

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$

de morphismes de groupes est une *suite exacte courte* si i est injectif, p est surjectif et si $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} p$.

1. Vérifier que si H est un sous-groupe distingué de G, on a une suite exacte courte
$$1 \to H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G/H \to 1.$$
(Toute suite exacte courte est en fait « isomorphe » à une telle suite.)
2. On dit qu'une suite exacte courte
$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \to 1$$
est *scindée* s'il existe un morphisme $s : H \to G$ tel que $ps = 1$. Montrer que si une telle suite exacte est scindée, la donnée d'un tel s définit une isomorphisme entre G et un produit semi-direct $N \rtimes H$.
3. Soit k un corps et V un espace vectoriel de dimension finie. Décomposer le groupe linéaire $\mathrm{GL}(V)$ en un produit semi-direct.
4. Décomposer le groupe diédral en un produit semi-direct.

Exercice 12 (Groupes d'ordre $\mathbf{p^2}$). Soit p un nombre premier. En utilisant l'exercice précédent, déterminer les groupes d'ordre p^2.

Exercice 13 (Groupes d'ordre pq ?). En utilisant l'exercice 11, déterminer les groupes d'ordre 6 et 10.

Exercice 14 (Groupes d'ordre inférieur à 11). Déterminer les groupes d'ordre inférieur ou égal à 11. On admettra l'existence d'un groupe non abélien d'ordre 8 non isomorphe au groupe diédral (le groupe des quaternions).