Oscillations.

Pré requis = PFD, poids, force de Hookes, frottements fluide -visqueux.

Resolution d'eq diff du second ordre.

Niveau: L1.

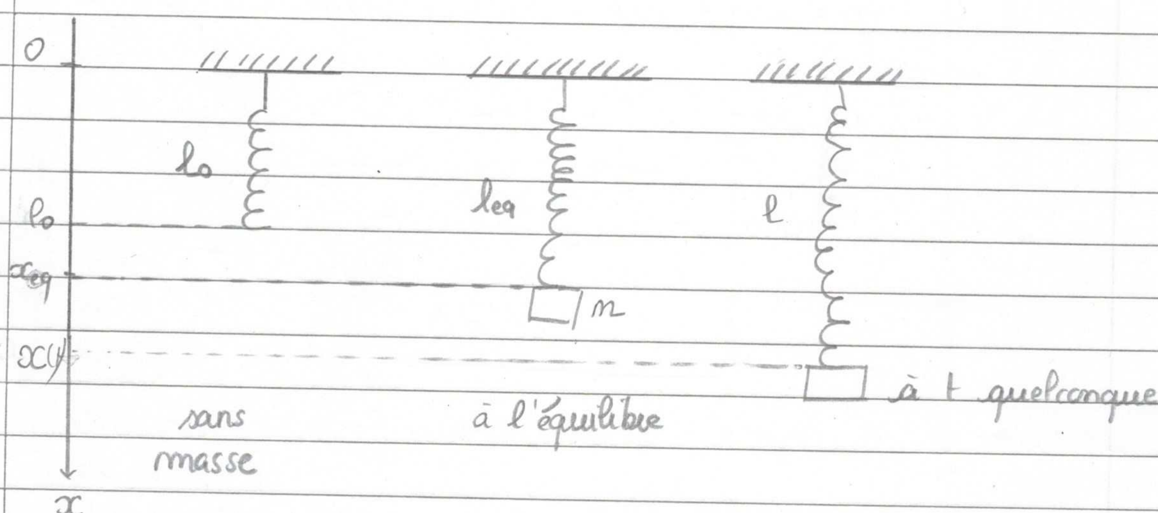
Introduction.

Oscillations : mvt périodiques autour d'une position stable
amplitude constante = non amortie → métronome
amplitude qui décroit : amorti →

Au cours de la leçon, on étudie plus précisément, le sys masse-ressort.
Ce dernier peut servir de modèle pour les sismographes ou les liaison moléculaire.
Comment prédire le mvt de la masse?

I) Oscillations harmoniques non amortis.

1) Description du modèle.



2) Mise en équation.

Sys : masse m
Réf : terrestre galiléen

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{e_x}$

Force de Rappel (Hooke) $\quad f = -k(x - \ell_0)\,\vec{e_x}$.

PFD : $\quad \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma \vec{f_{ext}}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{e_x} = mg\vec{e_x} - k(x-\ell_0)\vec{e_x}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x-\ell_0)\,\vec{e_x} \qquad (1)$$

A l'equilibre : $\quad x = x_{eq}$. et $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$.

$(1) \Leftrightarrow \quad 0 = mg - k(x_{eq} - \ell_0)$.

$$mg = +k(x_{eq} - \ell_0). \qquad (2)$$

On insert (2) ds (1).

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = k(x_{eq} - \ell_0) - k(x - \ell_0)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_{eq})$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0. \qquad (3)$$

on pose $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et on fait le chg^t de variable suivant :

$$q = x - x_{eq}$$

$$\frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dt} \qquad \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

donc $(3) \Leftrightarrow \quad \boxed{\dfrac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2\, q = 0}$

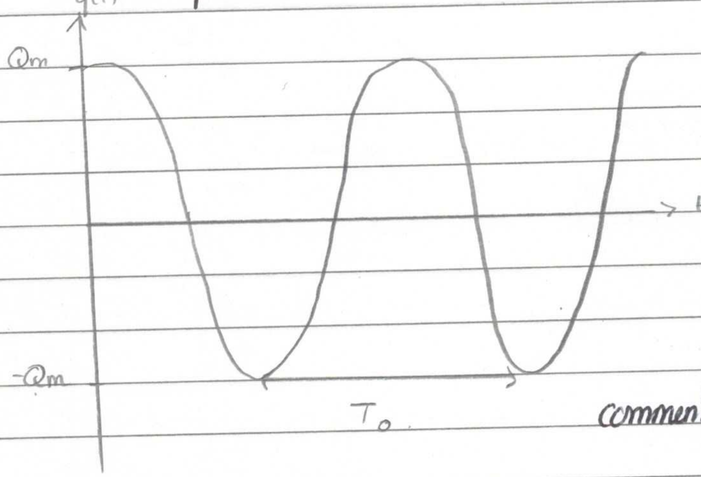
* sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/oscillateurs/ressort.php.

3) Résolution.

on peut vérifier que la solution de l'équation est de la forme :

$$q(t) = Q_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

amplitude (Q_m) — phase (ϕ)



→ projeter l'animation (4)
$\lambda = 0$
modif ω_0

commenter.

T_0 : période propre.
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$ fréquence propre.

$$x(t) = x_{eq} + q(t)$$

La détermination de Q_m et ϕ se fait à partir des conditions initiales : $q(0)$ et $\dot{q}(0)$.

II/ Oscillations harmoniques amorties.

1) Description du modèle.

prise en compte des frottements :

$$\vec{f} = -h\vec{v_M} = -h\frac{dx}{dt}\vec{e_x}$$

2) Mise en équation

PFD $\quad m\dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{e_x} = mg\vec{e_x} - k(x-\ell_0)\vec{e_x} - h\dfrac{dx}{dt}\vec{e_x}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x-\ell_0) - h\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}(x - l_0) = g$$

à l'equilibre $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = 0.$

$$\frac{k}{m}(x_{eq} - l_0) = g$$

de plus on pose $q = x - x_{eq}$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{h}{m}\frac{dq}{dt} + \frac{k}{m}q = 0$$

on pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m}{h}\sqrt{\frac{k}{m}}$ facteur de qualité

$$[Q] = \frac{\cancel{M}}{\cancel{M}T^{-1}}\sqrt{\frac{\cancel{M}T^{-2}}{\cancel{M}}}$$

$$= T \times T^{-1} = \text{ss dimension.}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

on vérifie bien que $h \to 0$ (peu frottement)

$Q \to \infty$

$\frac{\omega_0}{Q} \to 0$ = oscillateur amorti

3) Resolution :

équation caractéristique. $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 \underbrace{(1 - 4Q^2)}_{\text{signe de } \Delta}.$$

$Q < 1/2$ $\Delta > 0$ $\Rightarrow$ apériodique.

$$q(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

dans simulation : $x_0 = 70\,mm$ $\lambda = 1{,}5\,s^{-1}$

$v_0 = 65\,mm.s^{-1}$ $\omega = 1{,}8\,rad.s^{-1}$

- $Q = 1/2 \Rightarrow \Delta = 0$ Critique

$$r = \frac{-\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

$$q(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}$$

simulat° $x_0 = 70$ mm $\quad \lambda = 1{,}2\,s^{-1}$

$V_0 = 65$ mms^{-1} $\quad \omega = 1{,}8$ rad

- $Q > 1/2 \quad \Delta > 0$ peu de frottement.

$$r_{1,2} = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$$

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1} \quad \text{pseudoperiode.}$$

$$\lambda = \frac{\omega_0}{2Q} = \text{facteur d'amortissement}$$

$$q(t) = De^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi)$$

simulation: $x_0 = 70$ mm

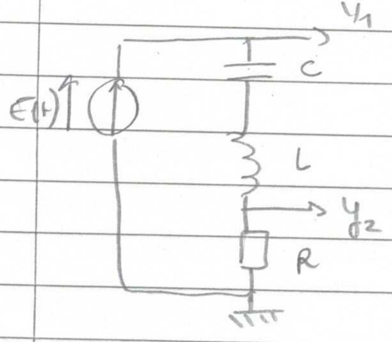
$v_0 = 65$ mm.s^{-1}

$\lambda = 0{,}2\,s^{-1}$

$\omega = 1{,}8$ rad.

III) Oscillations entretenue

1) Etude du circuit RLC.



$$E(t) = LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c$$

$$E_0\cos(\omega t) = LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c$$

Equations complexe :

$$LC\frac{d^2\underline{u}}{dt^2} + RC\frac{d\underline{u}}{dt} + \underline{u} = \underline{E}(t) = E_0 e^{j\omega t}$$

Solution de la forme $\underline{u}(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$

avec $$\underline{U}_0 = \frac{E_0}{-LC\omega^2 + j RC\omega + 1}$$

On peut retrouver la solut° réelle :

$U_0 = |\underline{U}_0|$

$\phi = \arg(U_0)$

phase à l'origine.

$u_2 = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$

$$\phi = \text{Arctan}\left(\frac{1 - LC\omega^2}{RC\omega}\right)$$

$$|\underline{U}_0| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$$

→ Comparaison oscillateur méca / elec. tableau p 186 - 187
précis Electrocinétique ~~pcc~~
Rosset

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{R}{2L\omega_0} = \frac{1}{2}RC\omega_0$$

coef amortissement

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

on peut réecrire : $$U_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\alpha^2 x^2}}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \text{Arctan}\left(\frac{1-x^2}{2\alpha x}\right)$$

2) Etude de la résonnance :

facteur de qualité : $Q = \frac{1}{2\alpha}$.

Courbe fig 6 p 188 précis.

→ paramétré par α. g_α.

on voit $y(1) = Q$.

→ $\alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\Rightarrow Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$

l'amplitude U_0 des oscillat° décroit ac ω

→ $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

l'amplitude passe vers un max avant de décroitre rapidement

→ trouver largeur de pic ac $G_{max}/\sqrt{2}$ (TP L2).