⚠ vecteur

Ecoulement de fluides.

Niveau PC - PC*.

Pré requis : Statique des fluides
Description eulérienne et Lagrangienne
viscosité
equat° conservat° de la masse

Intro Après la descript° Eulérienne / Lagrangienne du champ de vitesse ainsi que la viscosité
Leçon à cheval entre cinématique & dynamique des fluide.
difficulté : nouvelle opérateur mathématique dérivée particulaire
énormément de condition => conséquence.
stationnaire champ de vitesse dep pas de t
irrot : $\vec{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$

Intro : Comprendre comment s'écoule un fluide incomp puisque nature même du fluide.
Applicat° ds de nbx domaines.
=> décrire le fluide
=> comprendre les forces qui s'appliquent.

I] Description d'un fluide en mvt

1) Derivée particulaire

$$\vec{a}(\vec{r},t) \neq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \lim \frac{\vec{v}(\vec{r},t+\delta t) - \vec{v}(\vec{r},t)}{\delta t}$$

car $\vec{v}(\vec{r},t+\delta t)$ et $\vec{v}(\vec{r},t)$ ne désigne pas la vitesse de la même particule (champ eulerien) dérivée particulaire ②

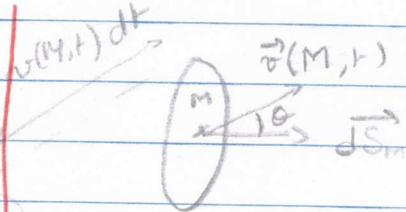
$$\vec{a}(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{acc locale}} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\vec{v}}_{\text{accélération convective}} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Signification physique : exprime le tx de variat° d'une grandeur physique exprimé ss la forme d'un champ eulérien.

on suit la particule.

2) Conservation de la masse

pré requis



masse d^2m qui traverse la surface ds le sens de la normale pdt dt est contenu ds les pointillés

$$d^2m = \underbrace{\mu(M,t)}_{\text{champ de masse volumique}}\,(v(M,t)\cos\theta\, dt)\,dS_M.$$

θ petit $\Rightarrow d^2m = \mu(M,t)\,v(M,t)\,dt\,dS_M$.

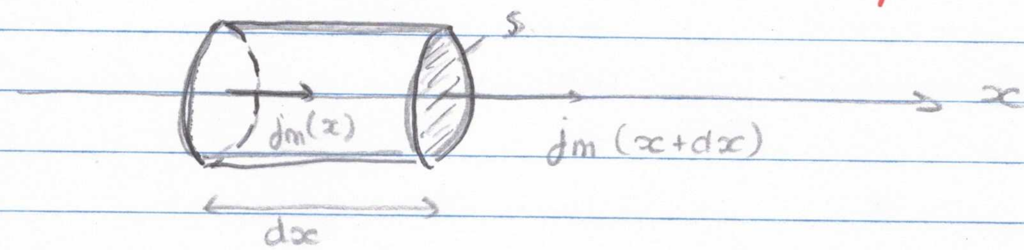
$\Rightarrow$ débit massique élémentaire $\dfrac{d^2m}{dt} = dD_m$

$$dD_m = \mu(M,t)\,v(M,t)\,dS_M$$

$$\underbrace{D_m}_{kg.s^{-1}} = \iint_{M\in\mathcal{S}} \underbrace{\mu(M,t)\vec{v}(M,t)}_{j_m\text{ : densité de courant}}\cdot\vec{dS_M}$$

de même on trouve le débit volumique $\underbrace{D_v}_{m^3s^{-1}} = \iint_{M\in\mathcal{S}} \vec{v}(M,t)\,\vec{dS_M}$

Equation de conservation de la masse en abs de sce & de puit.



$$\delta m_e = j_m(x,t)\, S\, dt$$

$$\delta m_s = j_m(x+dx,t)\, S.\, dt$$

$$\delta m_\Sigma = \delta m_e - \delta m_s$$

$$= j_m(x,t)\, S dt - j_m(x+dx,t)\, S.dt$$

$$\delta m_\Sigma = \frac{-\partial j_m(x,t)}{\partial x}\, dx\, S dt$$

pré requis

de $\oplus$ $\delta m_\Sigma = (\mu(x,t+dt) - \mu(x,t))\, S\, dx$

$$= \frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t}\, dt\, S\, dx$$

donc $\dfrac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} = \dfrac{-\partial j_m(x,t)}{\partial x}$

$$\boxed{\text{En 3D : } \frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{j_m}(M,t) = 0}$$

⟹ projeter : PC PC* Sanz Dunod p 266 4ème ed

on obtient une forme alternative de la conservat° de la masse : $\dfrac{D\mu(x,t)}{Dt} + \mu(M,t)\, \mathrm{div}\, \vec{v}(M,t) = 0$ (1)

3) Cas particuliers

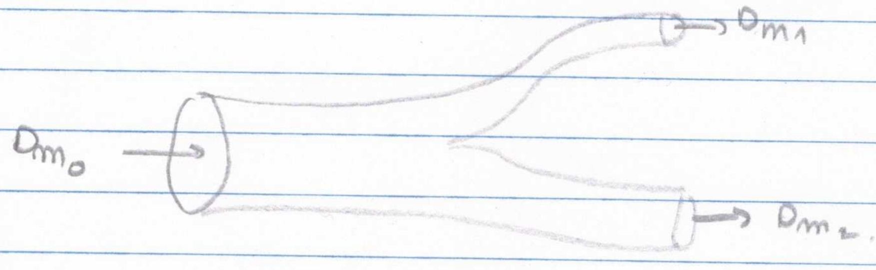
• Ecoulement stationnaire

champ eulerien de masse volumique est ind du tps

$$\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow \text{div}\, \vec{j}_m (M,t) = 0$ champ à flux conservatif (comme $\text{div}\,\vec{B} = 0$ B est à flux conservatif)

conséquence conservation du débit massique



$$D_{m_0} = D_{m_1} + D_{m_2}$$

• écoulement incompressible

⚠ fluide incomp ≠ écoulement incomp

chaque particule garde sa masse volumiq.

milieu compressible si vitesse écoulem^t proche de la vitesse du son (0,7 mach)

$\Rightarrow \text{div}\, \vec{v} (M,t) = 0$

peut être prouvé par (1) $\frac{D\mu}{Dt} = 0$ a $\mu(M,t) \neq 0$ (4)

conséquence : conservation du débit volumique

II) Actions mécaniques ds un fluide en mvt

1) Act° meca sur un fluide

→ force pression + force de viscosité

• Force de pression

A la surface d'un volume de fluide, le fluide ext exerce sur le fluide intérieur une force de pression, orthogonale à la surface

$$d\vec{F}_p = - p(M,t)\, d\vec{S}_M$$

→ Figure 9.2 p 296 Dunod

$$dF_z = p(x,y,z)\,dx\,dy - p(x,y,z+dz)\,dx\,dy$$
$$= \left(p(x,y,z) - p(x,y,z+dz)\right) dx\,dy$$

$$\Rightarrow \quad dF_z = \frac{-\partial p(x,y,z)}{\partial z} \underbrace{dx\,dy\,dz}_{d\tau}$$

de même : $$dF_x = \frac{-\partial p(x,y,z)}{\partial x}\, d\tau$$

$$dF_y = \frac{-\partial p(x,y,z)}{\partial y}\, d\tau$$

$\Rightarrow$ La resultante : $d\vec{F_p}(M,t) = -\vec{\mathrm{grad}}\, p(M,t)\, d\tau$

Equivalent volumique : $\vec{f_p}(M,t) = \dfrac{d\vec{F_p}}{d\tau} = -\vec{\mathrm{grad}}\, p(M,t)$

- Viscosité

→ figure 9.4 p 299 + 2 lignes suivantes.

Pour un cas de fluide Newtonien

on peut projeter cas fluide non Newtonien. ~~Ko~~ Maïzena Ketchup.

Pr un cisaillem^t peu imp, on peut écrire que la force que la couche de fluide sup exerce s/ la couche de fluide inf $\propto$ à la $\neq$ de vitesse

$$\Rightarrow \quad d\vec{F_v}(y,t) = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS\, \vec{u_x}$$ force de viscosité de cisaillem^t

η : viscosité dynamique → tableau valeur

En 3D : la resultante des forces de viscosité de cisaillem^t écoulem^t incompressible d'un fluide Newtonien

$$d\vec{F_v} = \eta\, \vec{\Delta}\vec{v}(M,t)\, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad \vec{f}_{visc}(M,t) = \eta\, \vec{\Delta}\vec{v}(M,t)$$ équivalent volumique.

Deuxième loi de Newton.

$$\mu(M,t)\,\frac{D\vec{v}(M,t)}{Dt} = -\vec{\mathrm{grad}}\,p(M,t) + \eta\,\vec{\Delta}\vec{v}(M,t) + \vec{f}_{vol}(M,t)$$

laplacien div (grad)

équation de Navier-Stokes.

autres forces
+ si R non galiléen
Coriolis
f inertie f entrainem^t

2) Nombre de Reynolds & couche limite

masse volumiq — vitesse carac — longueur carac

$$Re = \frac{\mu U L}{\eta}$$

viscosité dynamique

balance entre terme diffusif & convectif. (démonstrat° Durod)
dep de la nature de expérience.

exp de Stokes → exp action

Re << 1 Viscosité joue un rôle prépondérant à l'échelle de longueur L

Re >> 1 Viscosité joue un rôle négligeable à l'échelle de L

Chute de grain ds un fluide

Couche limite : région où l'écoulem^t au voisinage d'une paroi où la visco de cisaillem^t a une influence sur ~~les~~ écoulem^t

↘ A revoir pour quest°

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

Re << 1 => δ >> L couche lim s'étend à tt l'écoulem^t
Re >> 1 => δ << L visco négligeable < L.

3) TP. det Nb Renolds. + Poisseuil

Etude de Regime d'écoulement

III / Théorème de Bernoulli

1) Ecoulem^t parfait, stationnaire, irro, incomp

→ Ref galiléen ; pas viscosité (écoulem^t parfait)

↳ à l'ext de la couche limite (ou la visco est negligeable) ne pas dire.

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}\, p + \overrightarrow{f_{vol}}(M,t)$$

ne pas sauter l'étape ↳ formulaire d'où ça sort

$$\mu\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{rot}\,\vec{v}\wedge\vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}\, p + \overrightarrow{f_{vol}}(M,t)$$

Ecoulem^t stationnaire $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ irrot. $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$

uniquem^t le poids $\overrightarrow{f_{vol}}(M,t) = -\mu\, \overrightarrow{grad}(gz)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{-1}{\mu}\overrightarrow{\text{grad}}\, p - \overrightarrow{\text{grad}}(gz)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{p}{\mu} + gz + \frac{v^2}{2}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{p}{\mu} + gz}_{e_p} + \overbrace{\frac{v^2}{2}}^{e_c} = C.$$

↳ charge.

conservat° d'énergie méca.

si $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{v} \neq 0$

$\Rightarrow$ vrai que sur une ligne de champ.

2) Phénomène de Venturi

→ Figure 3 p 467 Tec & Doc Physique PC PC* 2ème année

écoul parfait, stationnaire, incomp, homogène
ref galiléen, uniquem^t^ pesanteur

Conservat° débit volumiq $D_{v_1} = D_{v_2}$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

$S_2 << S_1 \Rightarrow v_2 >> v_1$

$$\frac{p_2}{\mu} + g z_{A_2} + \frac{v_2^2}{2} = \frac{p_1}{\mu} + g z_{A_1} + \frac{v_1^2}{2}$$

$z_{A_1} = z_{A_2}$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = \mu \frac{v_1^2}{2}\left(1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right)$$

$S_2 << S_1$ et $p_2 < p_1$ (dépression au niveau de l'étranglem^t^)

eau : $\mu = 10^3\ \text{kg}\,\text{m}^{-3}$ $p_1 = 1\ \text{bar}$ $S_1 = 1\ \text{m}^2$

$p_2 = 2500\ \text{bar}$ $S_2 = 0{,}01\ \text{m}^2$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\mu\left(1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right)}} = 0{,}14\ \text{m.s}^{-1}$$

Conclusion

Enormément de notion sur lesquelles il faudra revenir en TD.

TD ⊕ de cas.

⊕ cas de fluide réel ex - hémodynamique (sang)

- ingénierie avion / météo.

→ macroscopiques

→