où dR est l'accroissement du quadrivecteur position et $d\tau$ est l'accroissement du temps propre.
Ecrivons la quantité U en fonction de la vitesse spatiale $\mathbf{v}$ de la particule dans un référentiel $\mathcal{R}$ donné. Si le temps propre varie de $d\tau$, le temps dans $\mathcal{R}$ varie de $dt = \gamma d\tau$ (dilatation des temps). La position de la particule variant de $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, on a

$$\frac{dR}{dt} = \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \tag{2.27}$$

et

$$U = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

On remarque que la partie spatiale de la quadri-vitesse n'est autre que la célérité (vitesse calculée dans l'espace du référentiel et dans le temps propre de la particule). U étant un quadri-vecteur, il se transforme par la transformation de Lorentz dans un changement de référentiel.
Calculons enfin le carré de la norme de U :

$$U^\mu U_\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = c^2 \tag{2.29}$$

En multipliant la quadrivitesse par la masse de la particule, on obtient le quadrivecteur impulsion :

$$P = mU = \begin{pmatrix} p^0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Cette quantité jouera un rôle essentiel en dynamique.
La quadrivitesse U est une fonction du temps propre τ de la particule. On peut la dériver encore par rapport à ce temps, pour aboutir à une définition de la quadri- accélération :

$$\Gamma = \frac{dU}{d\tau} = \gamma \frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} c\gamma\gamma' \\ \gamma\gamma'\mathbf{v} + \gamma^2 \mathbf{a} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

où $\gamma' = \frac{d\gamma}{dt}$ est la dérivée temporelle du facteur γ et $\mathbf{a}$ est l'accélération tridimentionnelle de la particule. On remarque que la quadri-accélération est perpendiculaire à la quadri-vitesse $\Gamma^\mu U_\mu = 0$

Quadrivecteur d'onde. Effet Doppler

L'effet Doppler est la variation de la fréquence d'un signal lumineux lorsque la source et le récepteur sont en mouvement relatif.
Considérons deux référentiels galiléens R et R', l'un lié à la source O et l'autre

Remarque :
Si l'observateur s'éloigne de la source ($u > 0$), la fréquence reçue est plus faible que la fréquence émise, alors que s'il s'en rapproche ($u < 0$) cette fréquence est plus grande.
Cet effet est utilisé en Astrophysique pour déterminer la vitesse des étoiles et des galaxies. Lorsqu'une étoile explose, elle émet de la lumière dans toutes les directions. La différence de fréquence $\delta\nu$ entre les ondes émises dans le sens de l'éloignement et celles émises dans le sens du rapprochement est telle que

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\delta\nu}{\nu} \simeq \frac{2u}{c} \tag{2.41}$$

Dans le cas où $|\delta\lambda| = 1nm$ pour $\lambda = 500nm$, on trouve $u = 310^5 ms^{-1}$. C'est ainsi qu'on a observé le décalage vers le rouge (redshift) du rayonnement lumineux émis par les galaxies, ce qui confirme les théories sur l'expansion de l'univers.

✓Effet Doppler transversal

Cet effet correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\nu' = \gamma\nu = \frac{\nu}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.42}$$

C'est l'effet Doppler transversal observé et étudié par Ives et Stilwell de 1938 à 1941. De nouvelles vérifications réalisées en 1962 ont confirmé avec une excellente précision les prévisions de la relativité.

En phase d'éloignement :

$$\begin{aligned}(O, E_1) : \ (c\Delta\tau_0)^2 &= (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 \\ \Delta\tau_0 &= \Delta t\sqrt{1-\beta^2} \ \beta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ vitesse de J/M}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c\Delta t_r &= c\Delta t + \Delta x \\ \Delta t_r &= \Delta t(1+\beta) \Longrightarrow \Delta t_r = \Delta t_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\end{aligned}$$

En phase d'approche (vitesse de la lumière dans le même sens que la vitesse de Jeannette) :

$$c\Delta t_r = c\Delta t - \Delta x \Longrightarrow \Delta t_r = \Delta t_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$\nu = \frac{1}{\Delta t} \Longrightarrow \frac{\nu_r}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \text{ (en récession la lumière est en sens inverse de Jeannette)}$$

(Effet Doppler en récession $\longrightarrow$ déplacement vèrs les basses fréquences.)
(Effet Doppler en approche $\longrightarrow$ déplacement vèrs les hautes fréquences.)

$$\lim_{\beta\to 0}\frac{\nu_r}{\nu_0} = 1-\beta = 1-\frac{v}{c} \text{ (effet Doppler non relativiste)}$$

$$\beta = \frac{1-(\frac{\nu_r}{\nu_0})^2}{1+(\frac{\nu_r}{\nu_0})^2}$$

$\Longrightarrow$ Mesure de ν_r, si ν_0 connu (en reconnaissant une raie caractèristique d'un spectre)
$\Longrightarrow \beta$

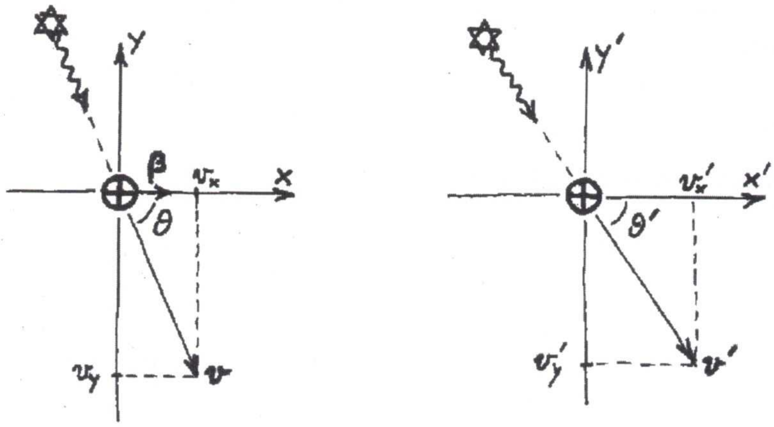

FIGURE 2.5 – Aberration des étoiles.

1. Quelles sont les valeurs des modules des vitesses $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$?
2. Établissez, au moyen de la loi de composition des vitesses, les expressions des composantes v_x' et v_y' de la vitesse en fonction des composantes v_x, v_y et de β.
3. En déduire l'expression de $cos\theta'$ en fonction de $cos\theta$ et β.
4. Suite à ces impressionnants calculs relativistes il est temps de redescendre sur Terre dont le rayon d'orbite vaut $r_\oplus \approx 1,50\ .10^{11}m$. Calculez la valeur de β.
5. Établissez une expression approchée de l'"aberration", $d\theta = \theta' - \theta$ (formule de Bradley, 1728), adaptée au cas de l'astronome terrestre. (La constante de proportionnalité, caractéristique du mouvement de la Terre, qui apparaît dans cette formule s'appelle la "constante d'aberration".)
6. Quelle est la valeur en radians de la constante d'aberration de la Terre ? Calculez cette valeur en secondes d'arc.
7. Discussion :
   - i) Cette aberration a été observée par Bradley, dès le 18 ème siècle. Ses observations pouvaient-elles manifester des effets "relativiste" ?
   - ii) L'effet que nous avons étudié ici est l'"aberration annuell". Nous avons éludé le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même ; qu'en est-il de l'"aberration diurne" correspondante ?
   - iii) Nous avons aussi escamoté l'effet de la distance finie de l'étoile qui se traduit par une parallaxe $\delta_{\parallel}$ lorsque l'astronome se déplace,

lié au récepteur O'. La source émet une onde lumineuse monochromatique plane, de fréquence ν, se dirigeant dans la direction OX qui fait, dans le plan Oxy, l'angle θ avec Ox.
Suivant que le signal est émis dans la direction de la vitesse $\mathbf{u}$ de R' ou dans une direction normale à $\mathbf{u}$, l'effet Doppler est qualifié de longitudinal ou transversal.

√Quadrivecteur d'onde

L'onde lumineuse monochromatique plane est caractérisée, en notation complexe, par la fonction d'onde Ψ :

$$\Psi(\mathbf{r},t) = A\exp -i(\omega t - \mathbf{k}.\mathbf{r}) = A\exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t), \qquad \omega = 2\pi\nu \tag{2.32}$$

k_x, k_y, k_z etant les composantes du vecteur d'onde $\mathbf{k}$. La partie imaginaire de l'argument de l'exponentielle peut être considérée comme le produit scalaire de deux qudrivecteurs : le quadrivecteur d'onde $K = (\mathbf{k}, \frac{\omega}{c}$ et le quadrivecteur position $R = (\mathbf{r}, ct)$

√Formules de l'effet Doppler

Elles découlent de la transformation de Lorentz entre le référentiel de l'émetteur R et le référentiel du récepteur R'.

$$k'_x = \gamma(k_x - \beta\frac{\omega}{c}) \tag{2.33}$$

$$k'_y = k_y \tag{2.34}$$

$$k'_z = k_z \tag{2.35}$$

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma(\frac{\omega}{c} - \beta k_x) \tag{2.36}$$

Il en résulte que, puisque $k_x = k\cos\theta = \frac{2\pi}{c}\nu\cos\theta$,

$$\nu' = \gamma\nu(1 - \beta\cos\theta) \tag{2.37}$$

√Effet Doppler longitudinal

Il est définit par $\theta = 0$. La formule précédente devient :

$$\nu' = \gamma\nu(1-\beta) = \nu\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.38}$$

Lorsque, comme c'est souvent le cas, $\beta \ll 1$, on obtient

$$\nu' = \nu(1-\beta) \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu' - \nu}{\nu} \simeq -\frac{u}{c} \tag{2.39}$$

Retenons ce dernier résultat en fonction de la longueur d'onde ($\lambda = \frac{c}{\nu}$ sous la forme suivante, $\mathbf{u}$ étant la vitesse d'éloignement de l'observateur

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq \frac{u}{c} \tag{2.40}$$

✓Effet Doppler par la géométrie

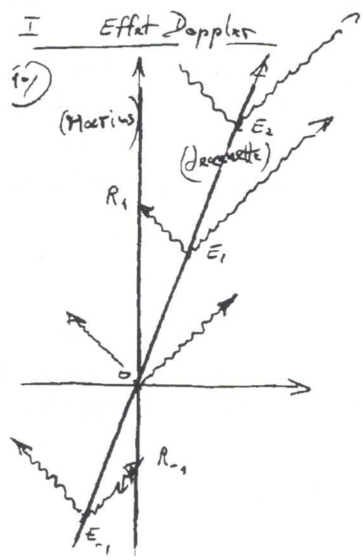

FIGURE 2.3 – Effet Doppler dans le diagramme espace temps.

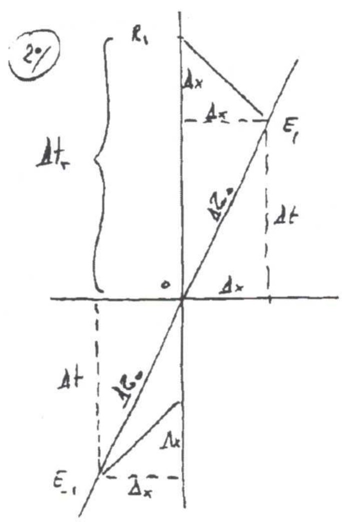

FIGURE 2.4 – Effet Doppler dans le diagramme espace temps.

Aberration des étoiles

✓Aberration de l'émission lumineuse

Soit θ' l'angle sous lequel l'observateur de R' voit la direction du rayonnement émis par O, on a, d'après les premières formules de transformation du quadrivecteur d'onde :

$$k'\cos\theta' \;=\; \gamma(k\cos\theta - \beta\frac{\omega}{c}) \qquad (2.43)$$

$$k'\sin\theta' \;=\; k\sin\theta \qquad (2.44)$$

Comme $k = \frac{2\pi\nu}{c}$ et $k' = \frac{2\pi\nu'}{c}$, il en résulte que :

$$\nu'\cos\theta' = \gamma\nu(\cos\theta - \beta) \qquad (2.45)$$

soit en tenant compte de l'effet Doppler :

$$\cos\theta' = \frac{(\cos\theta - \beta)}{1 - \beta\cos\theta}) \qquad (2.46)$$

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)} \qquad (2.47)$$

Pour $\theta = 0$, on retrouve $\theta' = 0$.
Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\cos\theta' = -\beta$ et $\sin\theta' = \frac{1}{\gamma}$.
Par conséquent, $\tan\theta' = -\frac{1}{\gamma\beta}$ et $\tan\alpha = \gamma\beta$, $\alpha = \theta' - \frac{\pi}{2}$ Remarques : 1. Le cas ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (émission de photons suivant l'axe $-Oy$) correspond au phénomène de l'aberration des étoiles exploité, du point de vue newtonien, par J. Bradley en 1725 pour évaluer la vitesse de la lumière. Dans ce cas, $\tan\alpha = -\gamma\beta$.
2. La formule de l'effet Doppler a été écrite en fonction de l'angle θ défini dans R. Cette formule peut être donnée en fonction de l'angle correspondant θ' que fait la direction OX avec l'axe $O'x'$ de R'. Il suffit de changer ν en ν', θ en θ' et β en $-\beta$. On a donc :

$$\nu = \gamma\nu'(1 + \beta\cos\theta') \qquad (2.48)$$

soit aussi,

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma(1 + \beta\cos\theta')} = \nu\frac{(1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}{1 + \beta\cos\theta'} \qquad (2.49)$$

Exercice : Aberration des "étoiles" fixes
Dans un repère héliocentrique (le Soleil et autres étoiles y sont à peu près fixes) la lumière d'une étoile parvient à la Terre avec une vitesse $\mathbf{v}$. Dans un repère géocentrique (Terre fixe) cette même lumière parvient à l'astronome de service avec la vitesse v'. Pour analyser cette situation, vous choisissez les axes des repères en configuration standard, avec l'axe des x du repère héliocentrique suivant la vitesse β de la Terre.

ne serait-ce qu'en attendant six mois. Estimez la valeur maximale de $\delta\theta_{\parallel}$.

Solution

1. Lumière (théorie de la relativité) $\Longrightarrow v = v' = c$
2. $$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - \beta}{1 - \beta v_x} \\ v'y &= \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - \beta v_x} \quad v_z = v'_z = 0 \end{aligned}$$
3. $$cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}$$
4. $$\begin{aligned} \beta &= \omega r_{\oplus} \\ &= \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} \times 1,50 \times 10^{11} \\ &\beta \approx 10^{-4} \ll 1 \end{aligned}$$
5. $$\begin{aligned} \cos(\theta + \delta\theta) &= \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta} \\ \cos\theta - \delta\theta\sin\theta + \cdot &= (\cos\theta - \beta)(1 + \beta\cos\theta + \cdot) \\ -\delta\theta\sin\theta &\sim -(1 - \cos^2\theta)\beta \\ \delta\theta &\sim \beta\sin\theta \end{aligned}$$

   β est une caractéristique de la terre $\oplus$; $\sin\theta$ est une caractéristique de l'étoile par rapport à la terre $\oplus$.
   La constante d'aberration est $K = \beta$
6. $K = \beta = 10^{-4} rd = 5,70 \times 10^{-3}\,{}^\circ = 0,342'$
   $K = 20,5"$
7. – i) Théorie relativiste $\delta\theta \sim \beta$, $\beta \ll 1$; ça implique que l'analyse classique donnait le même résultat (effets relativistes en β^2).
   Effectivement , Galilée :

   $$\left.\begin{aligned} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \tan\theta = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{v_x - u} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \beta}$$