

Note manuscrite

Carnet de n... Premier carnet de notes

Créé le : 19/01/2020 16:44

Modifié le : 19/01/2020 17:16

Auteur : sophie.kervazo@gmail.com

2) Champ électrique

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\frac{\partial E(x, y)}{\partial t} \exp(i(\omega t - kz)) = 0$$

$$\frac{\partial E(x, y)}{\partial t} = 0$$

$\Rightarrow$ ne dépend que de x $E(x) \Rightarrow E(0) = E(a) = 0$
(C-Lim)

$$E = E(x) \exp(i(\omega t - kz))$$

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 E(x)}{dx^2} - k E(x) + \frac{\omega^2}{c^2} E(x) = 0$$

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E(x) = 0$$

Quel est le signe de $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ pour résoudre l'équation

$$\cdot \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = -K^2 < 0$$

Solution de la forme $E(x) = A_1 \exp(Kx) + A_2 \exp(-Kx)$

$\Rightarrow$ impossible dû aux conditions aux limites

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$$

$$\text{solution } E(x) = A_1 + A_2 x$$

$\Rightarrow$ impossible CL.

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$$

$$E(x) = A_1 \sin(Kx) + A_2 \cos(Kx)$$

$$x=0 \text{ et } x=a \Rightarrow E(x)=0$$

$$\Rightarrow A_2 = 0$$

On ne peut pas avoir $A_1 = 0$ sinon absence d'onde

$$\sin Ka = 0$$

$$K = \frac{n\pi}{a} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

D'où la relation de dispersion:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

champ magnétique

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$$

en notation complexe (champs monochromatiques)

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{-1}{i\omega} \vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}}$$

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{E}}{\partial z} \vec{e}_x + \frac{\partial \underline{E}}{\partial x} \vec{e}_z$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{1}{i\omega} \left(\frac{\partial \underline{E}}{\partial z} \vec{e}_x - \frac{\partial \underline{E}}{\partial x} \vec{e}_z \right)$$

$$\text{avec } \underline{\vec{E}}_n = \underline{A}_n \sin \frac{n\pi x}{a} \exp(i(\omega t - k_n z))$$

$$n \rightarrow \Delta n \quad n\pi x \rightarrow \pi x \quad n\pi x \rightarrow 1$$

$$\text{donc } \underline{B}_n = \frac{A_n}{i\omega} \left(-i k_n \sin \frac{n\pi x}{a} \vec{e}_x - \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \vec{e}_z \right) \\ \times \exp(i(\omega t - k_n z))$$

$$= -A_n \left(\frac{k_n}{\omega} \sin \frac{n\pi x}{a} \vec{e}_x + \frac{n\pi}{i a \omega} \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \vec{e}_z \right) \\ \times \exp(i(\omega t - k_n z))$$

$$\text{or } k_n = \sqrt{\frac{\omega^2 - n^2 \omega_c^2}{c^2}} \quad \text{et } \omega_c = \frac{\pi c}{a}$$

$$\underline{B}_n = \frac{-A_n}{c} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{n\omega_c}{\omega} \right)^2} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \vec{e}_x \right. \\ \left. + \frac{n\omega_c}{i\omega} \cos \frac{n\pi x}{a} \vec{e}_z \right) \\ \exp(i(\omega t - k_n z))$$

$$\text{CL: } \vec{B}(0, y, z) \vec{e}_x = \vec{B}(a, y, z) \vec{e}_x = 0$$

Donc $\vec{B}_n$ s'écrit en notation réelle :

$$\vec{B}_n = \frac{-A_n}{c} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{n\omega_c}{\omega} \right)^2} \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \cos(\omega t - k_n z + \varphi_n) \vec{e}_x \right. \\ \left. + \frac{n\omega_c}{\omega} \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \vec{e}_z \sin(\omega t - k_n z + \varphi_n) \right]$$

Champ magnétique total

$$\vec{B} = \sum_{n=1}^{\infty} \vec{B}_n$$

Vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

$$v_\varphi(\omega, n) = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\omega_c}{\omega} \right)^2}}$$

$$K_n \quad \sqrt{1 - \frac{n^2 \omega^2}{\omega_c^2}}$$

Vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

$$v_g(\omega, n) = c \sqrt{1 - \frac{n^2 \omega^2}{\omega_c^2}}$$

II) 1)