

Introduction à la propagation d'ondes (Equation d'onde de d'Alembert unidimensionnelle)

Programme de PC/PC*



Le phénomène de propagation d'ondes est un phénomène très général. son importance pratique est considérable car il est à la base de nombreux cas de transmission d'informations (propagation du son, de la lumière, d'ondes radios, ...).

Ce premier chapitre présente l'équation de d'Alembert, équation classique qui régit les phénomènes de propagation sans dispersion ni absorption.

Les exemples choisis seront d'ordre mécanique :

* Propagation du son dans les solides

* Vibration d'une corde vibrante

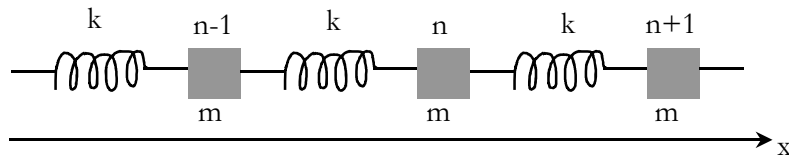
I – Chaîne infinie d'oscillateurs et approximation des milieux continus :

a) Equation d'onde de d'Alembert :

Afin d'étudier la propagation d'ondes sonores dans les solides, on utilise le modèle suivant (voir figure) : le solide est constitué d'une chaîne infinie d'atomes ponctuels, de masse m , reliés entre eux par des ressorts de raideur k et de longueur à vide d (correspondant à la distance inter-atome à l'équilibre).

La chaîne d'atomes couplés élastiquement (rappel linéaire) par des ressorts constitue une modélisation simple pour décrire la propagation de petits mouvements vibratoires dans un solide, c'est-à-dire la propagation du son dans un solide. Ce dernier est en effet constitué d'empilements réguliers d'atomes (ions ou molécules) ; les forces rappelant un atome vers sa position d'équilibre peuvent être modélisées, à l'ordre linéaire, par un rappel élastique, dans la mesure où les amplitudes des vibrations des atomes sont faibles (on suppose ici que le solide est homogène et isotrope).

Le mouvement de l'ensemble se fait sans frottements le long de l'axe (Ox). Les atomes se déplacent légèrement autour de leurs positions d'équilibres respectives, que l'on peut repérer sous la forme $x_{\text{eq},n} = nd$.



On repère les positions des atomes hors équilibre par leurs abscisses :

$$x_n(t) = nd + u_n(t)$$

où les déplacements $u_n(t)$ restent faibles vis-à-vis de d .

Le théorème du CI appliqué à l'atome de rang (n) donne, en projection :

$$m\ddot{x}_n = -k(u_n - u_{n-1}) + k(u_{n+1} - u_n) = -k(2u_n - u_{n-1} - u_{n+1})$$

La distance d inter-atome est de l'ordre de $d \approx 10^{-10} m$, distance très inférieure aux distances caractéristiques des phénomènes de propagation que l'on étudie, notamment vis-à-vis de la longueur d'onde de la vibration (de l'ordre de 25 cm à 20 kHz). Par conséquent, $u_n(t)$ varie très peu sur la distance d .

On va ainsi définir une fonction continue de la manière suivante : (approximation des milieux continus)

$$u(x_n, t) = u_n(t)$$

Il vient alors :

$$u_{n+1}(t) = u(x_{n+1}, t) = u(x_n + d, t) = u(x_n, t) + \frac{\partial u}{\partial x} d + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d^2$$

$$u_{n-1}(t) = u(x_{n-1}, t) = u(x_n - d, t) = u(x_n, t) - \frac{\partial u}{\partial x} d + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d^2$$

Et l'équation du mouvement devient alors :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d^2 \right)$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$$

C'est l'équation d'onde de d'Alembert, déjà obtenu en EM lors du chapitre sur les équations locales. On sait qu'elle est associée à un phénomène ondulatoire de célérité c .

Cette vitesse ne doit pas être confondue avec la vitesse de déplacement longitudinal des atomes $\partial u / \partial t$.

Les ondes sont ici longitudinales car le mouvement des atomes se fait dans la direction de propagation.

b) Lien avec le module de Young :

Loi phénoménologique de Hooke :

La force dF qu'il faut exercer perpendiculairement à une surface dS d'un solide pour provoquer un déplacement $u(x, t)$ est :

$$dF = Y \frac{\partial u}{\partial x} dS$$

où Y désigne le module de Young.

On peut exprimer Y en fonction des grandeurs microscopiques définies dans la partie (a), soit k , m et d .

Pour cela, on considère un modèle de solide tridimensionnel constitué de chaînes d'atomes associées en parallèle de telle sorte qu'à l'équilibre les atomes soient situés aux sommets d'un réseau cubique de pas d et d'axe (Ox), (Oy) et (Oz). Dans un tel réseau, chaque cube de côté d contient 8 atomes placés sur ses 8 sommets, chaque atome étant commun aux 8 cubes qui se touchent en ce point. Il y a donc $8 / 8 = 1$ atome de masse m par cube de volume d^3 , ce qui permet d'exprimer la masse volumique du solide :

$$\mu = \frac{m}{d^3}$$

On considère une déformation du solide le long de (Ox) telle que les atomes situés en nd à l'équilibre soient en $x_n = nd + u_n$ en présence de la déformation.

Soit une surface dS de ce solide découpée dans le plan d'abscisse x_n . La force exercée par l'atome $n + 1$ d'une chaîne sur l'atome n vaut $f = k(x_{n+1} - x_n - d)$. La surface dS contient dS / d^2 chaînes d'atomes jouant le même rôle. Donc la force exercée par la partie de solide située à droite de dS sur la partie située à gauche s'écrit :

$$dF = \left(\frac{dS}{d^2} \right) k(x_{n+1} - x_n - d) = \frac{k}{d^2} (u_{n+1} - u_n) dS$$

Dans l'approximation des milieux continus :

$$dF = \frac{k}{d^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} d \right) dS = \frac{k}{d} \frac{\partial u}{\partial x} dS$$

On démontre ainsi la loi de Hooke, avec le module de Young égal à $Y = \frac{k}{d}$. On remarque que Y est homogène à une force par une surface, soit une pression.

La vitesse de propagation du son dans le solide peut s'exprimer en fonction de Y . Les relations :

$$c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}} \quad ; \quad \mu = \frac{m}{d^3} \quad ; \quad Y = \frac{k}{d}$$

donnent finalement :

$$c = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$$

* Retour sur la définition du module de Young ($dF = Y \frac{\partial u}{\partial x} dS$) :

Si la force F est constante, ainsi que Y et que S (règle de section constante, par exemple), alors :

$$\ell = \ell_0 \left(1 + \frac{F}{YS} \right)$$

où ℓ_0 est la longueur de la règle en l'absence de contrainte. En effet, l'élongation vaut :

$$u(x) = \frac{F}{YS} x \quad \text{ainsi} \quad u(\ell_0) = \frac{F}{YS} \ell_0$$

D'où le résultat, avec $u(\ell_0) = \ell - \ell_0$.

* On peut obtenir l'équation de d'Alembert par une étude mésoscopique directe du matériau élastique étudié. Pour cela, on prend une tranche de matériau d'épaisseur au repos dx , de surface dS et donc de masse $\rho dS dx$. Elle subit, d'après la loi de Hooke, une force $dF(x + dx, t)$ en $x + dx$ et, par action et réaction, une force $-dF(x, t)$ en x (l'élément différentiel pour les forces n'est pas relatif à l'épaisseur élémentaire dx , mais à la surface élémentaire dS). Le PFD donne :

$$\mu dS dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = dF(x + dx, t) - dF(x, t) = \frac{\partial(dF)}{\partial x} dx = Y dS \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

d'où l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad v = \sqrt{\frac{Y}{\mu}}$$

Pour $Y = 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$ et $\mu = 3 \text{ à } 10 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, on a $c \approx 3000 \text{ à } 5000 \text{ m.s}^{-1}$, ordre de grandeur des vitesses des ondes acoustiques dans un solide.

II – Vibrations transversales d'une corde ; équation d'onde de d'Alembert :

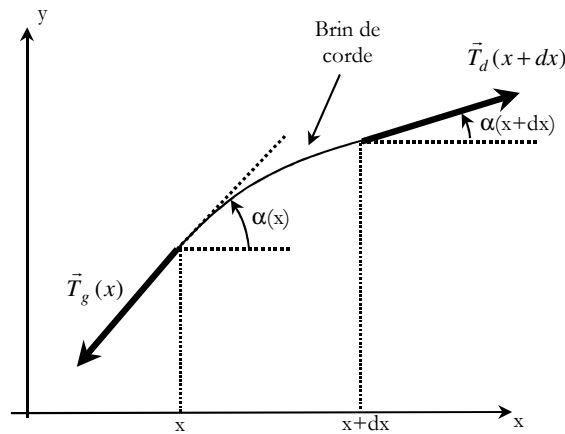
On considère une corde inextensible, de masse linéique μ , tendue horizontalement avec une force constante F .

A l'équilibre, la corde est horizontale. On supposera dans la suite que la pesanteur n'intervient pas (sinon, la forme de la corde serait une chaînette).

On se propose d'étudier les petits mouvements au voisinage de cet équilibre, avec le modèle suivant :

- L'élément de corde situé au point de coordonnées $(x,0)$ à l'équilibre se trouve au point de coordonnées $(x,y(x,t))$ hors équilibre ; autrement dit, on néglige son déplacement le long de (Ox) .
- L'angle $\alpha(x,t)$ que fait la tangente à la corde au point d'abscisse x à l'instant t est un infiniment petit ($\cos \alpha \approx 1$; $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$).
- Si on considère une coupure fictive au point d'abscisse x , l'action exercée par la partie gauche de la corde sur la partie droite se réduit à une force $\vec{T}_g(x)$ tangente à la corde ; de même, l'action exercée par la partie droite sur la partie gauche se réduit à une force $\vec{T}_d(x)$. D'après le principe des actions réciproques, $\vec{T}_d(x) = -\vec{T}_g(x)$.

Le théorème du CI appliqué à un élément de corde situé entre les abscisses x et $x + dx$ donne :



$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y = \vec{T}_g(x,t) + \vec{T}_d(x+dx,t) = -\vec{T}_d(x,t) + \vec{T}_d(x+dx,t)$$

En projection et en notant $T = \|\vec{T}_d\|$:

$$0 = -T(x,t) \cos \alpha(x,t) + T(x+dx,t) \cos \alpha(x+dx,t) \quad (1)$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T(x, t) \sin \alpha(x, t) + T(x + dx, t) \sin \alpha(x + dx, t) \quad (2)$$

Si on se limite à l'ordre 1, l'équation (1) donne :

$$T(x + dx) = T(x) = cste = F$$

L'équation (2) se réécrit :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -F\alpha(x, t) + F\alpha(x + dx, t) = F \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$$

Or, $\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \approx \alpha$, d'où :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{avec } c = \sqrt{\frac{F}{\mu}})$$

On retrouve là encore l'équation d'ondes de d'Alembert.

Dans le cas de la corde, l'onde est dite transversale (le déplacement a lieu selon Oy).

Dans le cas de la chaîne infinie d'atomes, l'onde était longitudinale (le déplacement se faisait selon (Ox)).

III – Familles de solutions de l'équation d'onde de d'Alembert :

1 - Ondes progressives :

La résolution suivante est hors programme :

On se propose de résoudre l'équation de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

De manière symbolique, cette équation peut s'écrire :

$$\left(v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right) s = 0$$

On pose :

$$p = t + \frac{x}{v} \quad \text{et} \quad q = t - \frac{x}{v}$$

et, en considérant x et t comme des fonctions de p et de q :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}$$

On en déduit :

$$v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial p} \quad \text{et} \quad v \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} = -2 \frac{\partial}{\partial q}$$

L'équation de d'Alembert prend alors la forme :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial p \partial q} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial s}{\partial q} \right) = 0$$

Par conséquent, $\frac{\partial s}{\partial q} = \varphi(q)$ et, si $f(q)$ désigne une primitive de $\varphi(q)$, alors :

$$s = f(q) + g(p) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Remarque :

On peut vérifier explicitement que, par exemple, $s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ est bien solution de l'équation de d'Alembert. Pour cela, on pose $p = t + \frac{x}{v}$. En utilisant les propriétés des dérivées composées :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dg}{dp} = \frac{1}{v} \frac{dg}{dp} \quad ; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{d^2 g}{dp^2}$$

De même :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{d^2 g}{dp^2}$$

On en déduit facilement que :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

On fait de même pour $f\left(t - \frac{x}{v}\right)$.

Interprétation physique : on considère une fonction de la forme :

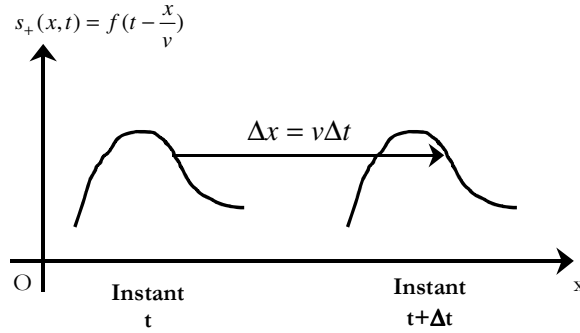
$$s_+(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

On constate que :

$$f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f\left(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{v}\right)$$

pour tout couple Δx et Δt vérifiant : $\Delta x = v \Delta t$. Ainsi, $s_+(x, t)$ représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse v le long de l'axe (Ox) dans le sens positif. Une fonction de la forme

$f\left(t - \frac{x}{v}\right)$ est appelée onde plane progressive. C'est la solution à privilégier en espace « illimité », c'est-à-dire sans obstacles.



La solution $s_-(x, t) = f(t + \frac{x}{v})$ représente un signal qui se propage sans déformation à la vitesse v le long de l'axe (Ox) dans le sens négatif.

On se propose maintenant de résoudre l'équation de d'Alembert tridimensionnelle :

$$\Delta s - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } s(\vec{r}, t) = s(x, y, z, t)$$

On vérifie que des fonctions de la forme :

$$s_{x,\pm}(x, y, z, t) = f(t \mp \frac{x}{v}) \quad ; \quad s_{y,\pm}(x, y, z, t) = f(t \mp \frac{y}{v}) \quad ; \quad s_{z,\pm}(x, y, z, t) = f(t \mp \frac{z}{v})$$

sont solution de l'équation tridimensionnelle (ces solutions sont appelées ondes planes de directions de propagations respectives $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$, dans le sens positif ou négatif).

Remarque :

Des ondes sphériques sont également solution de l'équation de d'Alembert tridimensionnelle : on cherche, par exemple, des solutions à symétrie sphérique $s(r, t)$. En utilisant la forme du laplacien en coordonnées sphériques, il vient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rs) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Soit encore :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (rs) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rs) = 0$$

On constate alors que la fonction $rs(r, t)$ est solution de l'équation unidimensionnelle de d'Alembert. Par conséquent :

$$rs(r, t) = f(t - \frac{x}{v}) + g(t + \frac{x}{v})$$

Soit :

$$s(r, t) = \frac{1}{r} f(t - \frac{x}{v}) + \frac{1}{r} g(t + \frac{x}{v})$$

Les deux termes de cette somme représentent des ondes sphériques respectivement divergente et convergente. On constate que le signal ne se propage pas sans déformation en raison de l'affaiblissement exprimé par le facteur $1/r$.

Ordres de grandeurs :

On peut évaluer l'ordre de grandeur de la célérité des ondes dans le modèle de la chaîne d'atomes et la comparer avec l'ordre de grandeur de la célérité des ondes sonores dans les solides qui vaut typiquement quelques milliers de mètres par seconde.

Pour estimer la raideur k , on suppose que l'ordre de grandeur de l'énergie de liaison par atome est l'év et que cette énergie est de la forme élastique $\frac{1}{2}kd^2$ où $d \approx 10^{-10}m$. On trouve $k \approx 10 N.m^{-1}$.

Avec $m \approx 10^{-26} kg$, on obtient :

$$c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}} \approx 3.10^3 m.s^{-1}$$

Soit un ordre de grandeur tout à fait satisfaisant.

Dans chacun des deux exemples (chaîne d'atomes et corde vibrante), on constate que la célérité est une fonction croissante de la raideur du milieu (k ou F) et décroissante de l'inertie du milieu (m ou μ). On peut retenir, plus généralement que :

« Des ondes mécaniques se propagent d'autant plus mal que le milieu est plus mou et plus inerte. »

2 - Ondes progressives harmoniques :

On se limite ici à des solutions harmoniques de l'équation de d'Alembert, c'est-à-dire des solutions de la forme :

$$s(x,t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

Ces solutions correspondent à des ondes planes progressives harmoniques (OPPH).

Ces fonctions, de période temporelle $T = \frac{2\pi}{\omega}$ possèdent une période spatiale $\lambda = cT = 2\pi \frac{c}{\omega}$ appelée longueur d'onde.

On définit le vecteur d'onde $\vec{k}$ tel que :

$$\vec{k} = k \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

L'OPPH est alors de la forme :

$$s(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$$

3 - Ondes stationnaires :

On cherche des solutions de l'équation de d'Alembert de la forme (méthode de séparation des variables) :

$$s(x,t) = f(x) g(t)$$

En substituant dans l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Il vient :

$$f''(x)g(t) - \frac{1}{c^2} f(x)\ddot{g}(t) = 0$$

D'où :

$$\frac{1}{f(x)} f''(x) = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = \text{cste} = K$$

On obtient ainsi deux équations différentielles :

$$\frac{1}{f(x)} f''(x) = K \quad \text{et} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = K$$

Ou encore :

$$f''(x) - Kf(x) = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{g}(t) - c^2 K g(t) = 0$$

Si $K > 0$, la solution de la deuxième équation différentielle est de la forme :

$$g(t) = Ae^{c\sqrt{K}t} + Be^{-c\sqrt{K}t}$$

Cette solution est à rejeter : en effet, elle correspond soit à une solution divergente soit à une solution transitoire.

Dans la suite, on suppose $K < 0$; alors, en posant $-c^2 K = \omega^2$:

$$g(t) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

La 1^{ère} équation donne alors :

$$f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0 \quad \text{soit} \quad f(x) = B \cos\left(\frac{\omega}{c} x - \psi\right)$$

La solution globale de l'équation de d'Alembert est alors :

$$s(x, t) = C \cos\left(\frac{\omega}{c} x - \psi\right) \cos(\omega t - \varphi)$$

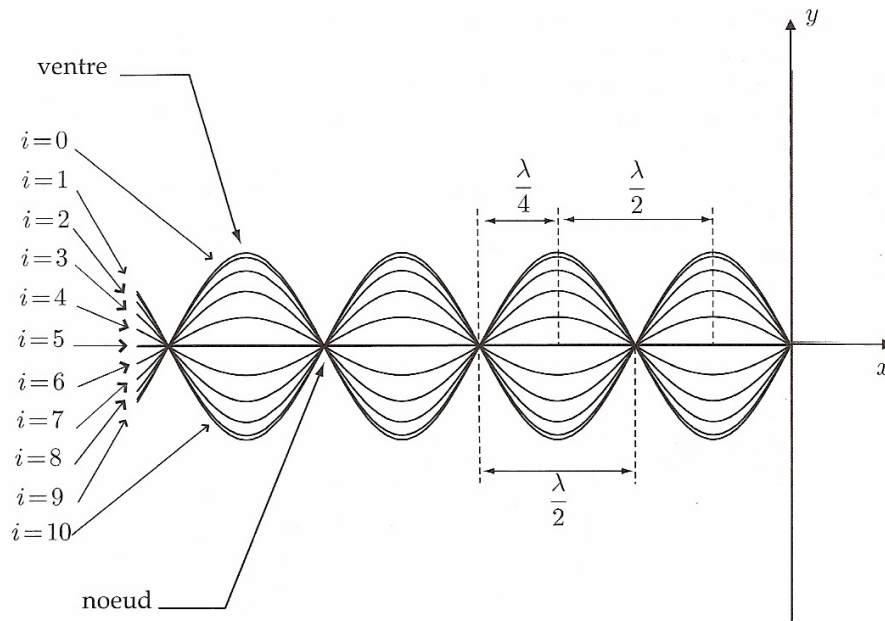
On pose dans la suite $k = \frac{\omega}{c}$, alors :

$$s(x, t) = C \cos(kx - \psi) \cos(\omega t - \varphi)$$

Ce type de solutions, appelé onde plane stationnaire est très différent d'une onde plane progressive : les dépendances spatiale et temporelle interviennent séparément ; la dépendance spatiale intervient dans l'amplitude de l'oscillation temporelle et non plus dans la phase, de telle sorte que tous les points de la corde vibrent en phase ou en opposition de phase.

L'allure de la corde à différents instants est représentée sur la figure suivante. Certains points de la corde sont fixes et sont appelés nœuds de vibrations ; d'autres ont une amplitude de vibration maximale et sont appelés ventres de vibrations.

Entre les nœuds se trouvent les ventres qui oscillent en faisant du « sur place ».



Position des nœuds : elle s'obtient en écrivant que :

$$\cos(kx - \psi) = 0 \quad \text{soit} \quad kx_n - \psi = (2n+1) \frac{\pi}{2}$$

Soit, avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$x_n = \frac{2n+1}{4} \lambda + \frac{\psi}{k}$$

La distance entre deux nœuds successifs est égale à $\frac{\lambda}{2}$.

Position des ventres : elle s'obtient en écrivant que :

$$\cos(kx - \psi) = \pm 1 \quad \text{soit} \quad kx_v - \psi = n\pi$$

Soit :

$$x_v = \frac{n}{2} \lambda + \frac{\psi}{k}$$

La distance entre deux ventres successifs est égale à $\frac{\lambda}{2}$.

La distance entre un nœud et un ventre successif est égale à $\frac{\lambda}{4}$.

IV – Applications :

1 - Etude des petits mouvements libres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités, modes propres :

On considère une corde de longueur L fixée à ses extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$:

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad (\text{à tout instant})$$

Les CI sont les suivantes :

$$\text{A } t = 0 : y(x, 0) = \alpha(x) \text{ et } \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = \beta(x)$$

La corde évolue ensuite librement (régime libre).

On cherche des solutions de l'équation de d'Alembert sous la forme d'ondes stationnaires :

$$y(x, t) = C \cos(kx - \psi) \cos(\omega t - \varphi)$$

Les conditions aux limites entraînent :

$$\cos \psi = 0 \quad \text{et} \quad \cos(kL - \psi) = 0$$

Par conséquent, $\psi = \frac{\pi}{2}$ et $\sin kL = 0$, soit $kL = n\pi$: la norme du vecteur d'onde k est quantifiée.

Les pulsations le sont également :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad d'où \quad \omega = n \frac{\pi c}{L}$$

En faisant intervenir la longueur d'onde $\lambda = cT = c \frac{2\pi}{\omega}$, il vient :

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

La longueur de la corde doit être égale à un nombre entier de fois la demi-longueur d'onde. Cette condition traduit la contrainte imposée par les extrémités fixes de la corde : on doit y avoir un nœud de vibration et l'on sait que deux nœuds de vibration successifs sont distants de $\frac{\lambda}{2}$.

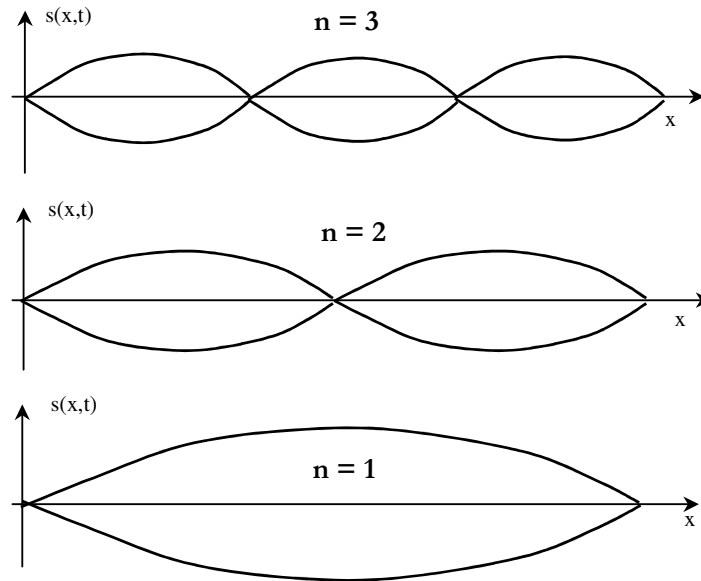
Ces pulsations, quantifiées par l'entier n , sont appelées pulsations propres ; un mode propre sera caractérisé par la solution suivante de l'équation de d'Alembert :

$$y_n(x, t) = C_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t - \varphi_n\right) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

La solution générale sera une superposition de ces modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t - \varphi_n\right) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

L'allure de la corde vibrante pour les premiers modes propres est donnée sur la figure :



Trois premiers modes propres d'une corde fixée à ses extrémités.

Les CI imposent :

$$y(x,0) = \alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\varphi_n) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

et :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(n \frac{\pi c}{L}\right) \sin(\varphi_n) \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

Etendus à l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, ces développements en série de Fourier sont ceux d'une fonction impaire (absence de termes en cosinus) de période $2L$.

Connaissant les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sur l'intervalle physique $[0,L]$ correspondant à la corde, on peut définir des fonctions impaires et périodiques de période double $2L$, puis développer ces fonctions en série de Fourier :

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad \text{et} \quad \beta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right)$$

Avec :

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \alpha(x) dx$$

et :

$$\beta_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \beta(x) dx$$

En identifiant les deux développements en séries de Fourier :

$$\alpha_n = C_n \cos \varphi_n \quad \text{et} \quad \beta_n = C_n \left(n \frac{\pi c}{L}\right) \sin(\varphi_n)$$

On peut ainsi en déduire les coefficients C_n et φ_n inconnus et déterminer ensuite la solution finale $y(x,t)$.

En conclusion, on peut construire la solution générale en régime libre de l'équation de d'Alembert pour une corde fixée à ses deux extrémités par superposition de modes propres, en utilisant les développements en séries de Fourier des conditions initiales.

A x fixé, la dépendance temporelle de $y(x,t)$ fait apparaître un fondamental de pulsation $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$.

Le mouvement de la corde est donc périodique, de période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2L}{c}$.

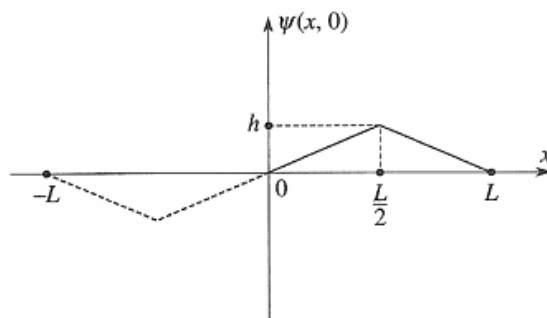
En pratique, une corde vibrante réagit avec l'air ambiant et émet une onde sonore. Ceci a pour effet de prélever de l'énergie sur la corde et d'amortir ses oscillations qui ne sont donc pas réellement périodiques.

L'application suivante illustre cette méthode :

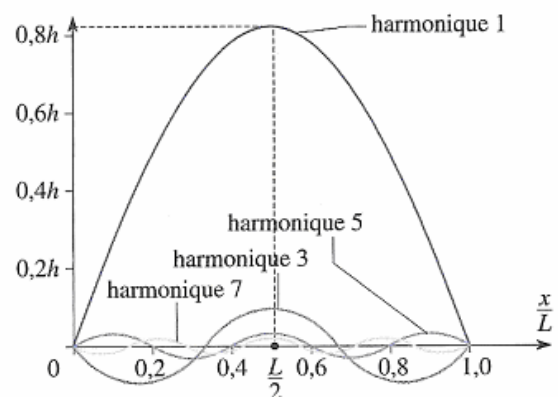
Spectre d'une corde pincée

Appliquer la technique du 4-1 pour étudier le spectre d'une corde d'un instrument à cordes pincées (clavecin, guitare, ...). Cette corde, fixée à ses extrémités, entre tout à fait dans le cadre de l'étude précédente.

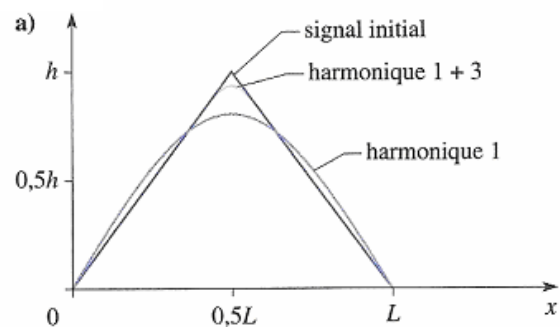
À l'instant initial, où elle a été préalablement déformée, elle est lâchée sans vitesse initiale. Pour simplifier les calculs, la corde est pincée au milieu de sa longueur : l'allure de $\psi(x, 0)$ est donnée sur le document ci-dessous :



Corde pincée à $t = 0$.



Harmoniques 1, 3, 5 et 7 de la corde pincée.



Pour cette corde, le coefficient B_n est nul.

Le coefficient A_n étant, par symétrie, nul pour n pair, il nous faut déterminer :

$$A_{2p+1} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin\left((2p+1) \frac{\pi}{L} x\right) \psi(x, 0) dx$$

$$= \frac{8}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin\left((2p+1) \frac{\pi}{L} x\right) h \frac{x}{L} dx.$$

Une intégration par parties nous donne :

$$A_{2p+1} = \frac{8h(-1)^p}{(2p+1)^2 \pi^2}.$$

Les harmoniques présents sont tous impairs : $n = 1$ (fondamental), 3, 5, 7, 9, ..., et leurs amplitudes décroissent très rapidement en $\frac{1}{n^2}$.

Le spectre sonore perçu par l'oreille sera ainsi essentiellement limité aux premiers harmoniques.

Considérons quelques valeurs numériques.

$$A_1 = 8,11 \cdot 10^{-1} h; \quad A_3 = -9,00 \cdot 10^{-2} h;$$

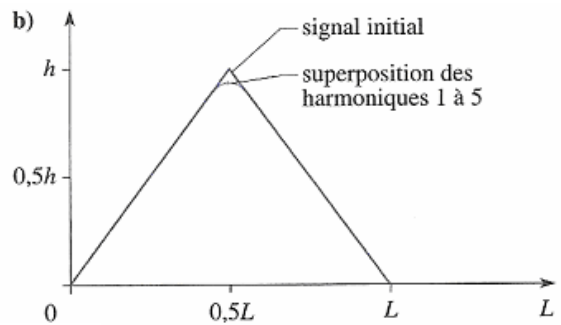
$$A_5 = 3,24 \cdot 10^{-2} h \quad A_7 = -1,65 \cdot 10^{-2} h;$$

etc.

Sur le document nous voyons que les cinq premiers harmoniques suffisent pour reconstruire avec une bonne approximation le signal.

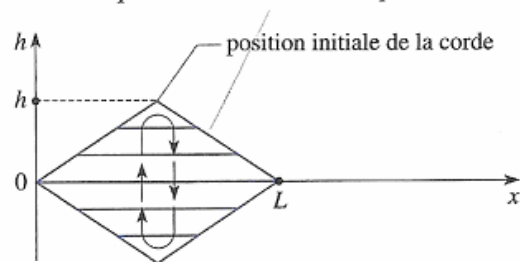
Le signal complet est donné par :

$$\psi(x, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{8h(-1)^p}{(2p+1)^2 \pi^2} \cos\left(\frac{(2p+1)\pi c}{L} t\right) \sin\left(\frac{(2p+1)\pi}{L} x\right).$$



Reconstitution du signal par superposition des premiers harmoniques.

a. Harmonique 1 + 3. b. Harmonique 1 + 3 + 5.



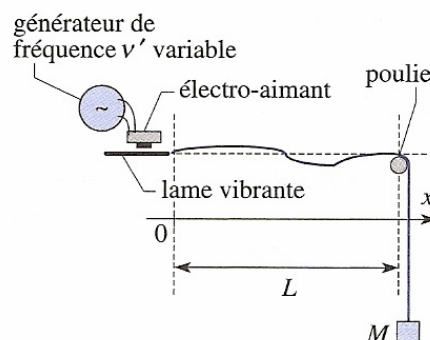
« Mouvement » d'une corde pincée en son milieu : ce schéma représente une suite de « photos » instantanées de la corde à des dates très proches.

Remarque

Les échelles latérales sont très dilatées sur tous les documents.

2 - Corde de Melde ; ondes stationnaires et résonances :

Dans l'expérience de Melde, l'extrémité d'abscisse $x = L$ d'une corde est fixée ($y(L, t) = 0$) et un opérateur impose en $x = 0$ un déplacement harmonique $y(0, t) = a \cos \omega t$ de pulsation ω .



On s'intéresse au régime forcé, obtenu après disparition du régime transitoire. On cherche ainsi une solution de l'équation de d'Alembert correspondant à une onde stationnaire de même pulsation que l'excitation :

$$y(x, t) = C \cos(kx - \psi) \cos(\omega t - \varphi)$$

Les conditions aux limites imposent :

$$y(0, t) = C \cos(\psi) \cos(\omega t - \varphi) = a \cos \omega t \quad \text{et} \quad y(L, t) = 0 = C \cos(kL - \psi) \cos(\omega t - \varphi)$$

D'où :

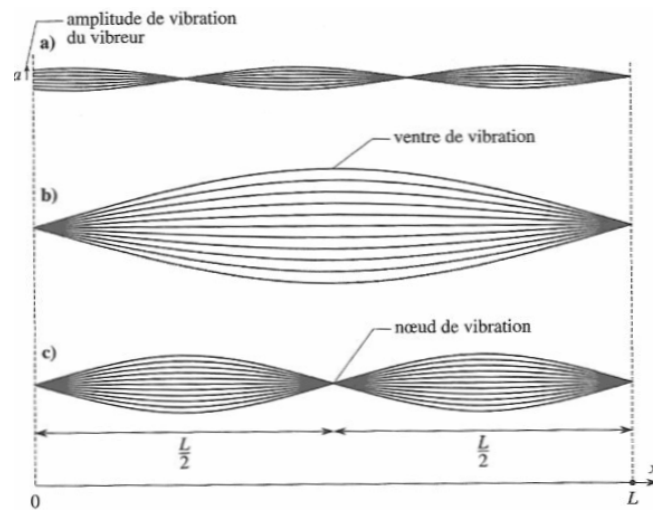
$$a = C \cos(\psi) \quad ; \quad \varphi = 0 \quad ; \quad kL - \psi = \frac{\pi}{2}$$

Soit :

$$C = \frac{a}{\sin(kL)} \quad ; \quad \varphi = 0 \quad ; \quad \psi = kL - \frac{\pi}{2}$$

Par conséquent :

$$y(x, t) = a \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \cos \omega t \quad (\text{avec } k = \frac{\omega}{c})$$



L'amplitude des vibrations est maximale pour $\sin(k(L-x)) = \pm 1$ et vaut (en valeur absolue) :

$$y_{\max} = \frac{a}{\sin(kL)}$$

Cette amplitude maximale devient infinie (la corde est alors en résonance) pour des pulsations excitatrices telles que :

$$kL = n\pi \quad \text{soit} \quad \omega_n = n \frac{\pi c}{L}$$

correspondant aux modes propres de la corde. Néanmoins, d'inévitables amortissements et la raideur de la corde font que l'amplitude maximale garde une valeur finie.

Ainsi l'onde stationnaire devient résonante (en régime forcé) lorsque la pulsation d'excitation du vibreur coïncide avec une des pulsations propres (en régime libre) de vibration de la corde, exactement comme pour un circuit LC série où la pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ désigne à la fois la pulsation propre en régime libre et la pulsation de résonance en régime forcé.

Exercice d'application :

Lors d'une manipulation avec la corde de Melde, on trouve les résultats ci-dessous :

a) Pour une même longueur de la corde L et une même masse M accrochée à celle-ci, on obtient les résultats suivants :

* Fréquence de résonance 19 Hz pour deux fuseaux.

* Fréquence de résonance 28 Hz pour trois fuseaux.

Ces valeurs numériques sont-elles compatibles entre elles ? Quelles seraient les fréquences de résonance suivantes ?

b) La longueur de la corde est $L = 117$ cm. Quelle est la vitesse c de propagation d'une perturbation sur cette corde ?

c) La masse M accrochée à cette corde est égale à $M = 25$ g. Quelle est la tension de la corde ? En déduire un ordre de grandeur de la masse linéique de la corde.

V) Prise en compte des frottements, notions de dispersion et d'absorption :

1) Nouvelle équation d'onde :

On suppose que chaque atome est soumis à une force de frottement fluide (proportionnelle à sa vitesse). Par conséquent, le théorème du CI appliqué à l'atome de rang (n) donne maintenant, en projection :

$$m\ddot{x}_n = -k(u_n - u_{n-1}) + k(u_{n+1} - u_n) - hm \frac{\partial x_n}{\partial t}$$

Ainsi, en utilisant l'approximation des milieux continus, on obtient :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} d^2 \right) - hm \frac{\partial u}{\partial t}$$

Soit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$$

C'est une nouvelle équation d'onde qui diffère de celle de d'Alembert.

2) Résolution (analyse harmonique du système) :

Cette dernière équation reste linéaire. On va chercher une solution comme superposition d'ondes harmoniques de la forme (analyse harmonique du système) :

$$\underline{u}(x,t) = \underline{f}(x)e^{j\omega t}$$

L'équation d'onde devient alors une équation vérifiée par la fonction $\underline{f}(x)$:

$$\frac{d^2 \underline{f}(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - jh\omega \right) \underline{f}(x) = 0$$

Dont les solutions sont de la forme :

$$\underline{f}(x) = \underline{A}e^{jkx} + \underline{B}e^{-jkx}$$

où le vecteur d'onde complexe $\underline{k}$ vérifie :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - jh\omega$$

Cette relation qui lie le vecteur d'onde complexe à la pulsation est la relation de dispersion.

On pose $\underline{k} = k_1 + jk_2$:

$$k_1^2 - k_2^2 + 2jk_1k_2 = \frac{\omega^2}{c^2} - jh\omega$$

Soit :

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad ; \quad 2k_1k_2 = -h\omega$$

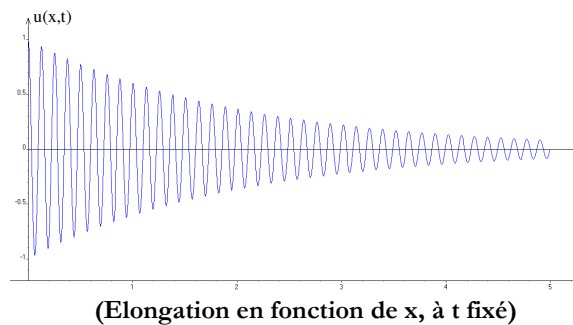
En supposant $\underline{A}$ réel, la 1^{ère} solution conduit à une elongation complexe :

$$\underline{u}(x,t) = Ae^{j(k_1 + jk_2)x} e^{j\omega t} = Ae^{-k_2x} e^{j(\omega t + k_1x)}$$

Soit, en notation réelle :

$$u(x,t) = Ae^{-k_2x} \cos(\omega t + k_1x)$$

On s'intéresse à une propagation selon les $x > 0$, par conséquent $k_1 < 0$: or le produit $k_1k_2 < 0$ donne $k_2 > 0$. Ainsi, l'exponentielle e^{-k_2x} traduit une atténuation de l'onde due aux frottements : l'onde s'amortit en se propageant. L'onde perd de l'énergie au profit du milieu de propagation.



On peut définir la longueur caractéristique de propagation de l'onde :

$$\delta = \frac{1}{k_2}$$

De telle sorte que l'élongation puisse s'écrire :

$$u(x,t) = Ae^{-k_2x} \cos(\omega t + k_1x) = Ae^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t + k_1x)$$

3) Vitesse de phase, dispersion :

L'expression suivante : (ne pas oublier que $k_1 < 0$) :

$$u(x,t) = Ae^{-k_2x} \cos(\omega t + k_1x) = Ae^{-k_2x} \cos \omega(t - \frac{(-k_1)}{\omega}x)$$

montre que la vitesse de phase de l'onde (c'est-à-dire la vitesse avec laquelle la phase de l'onde varie) est :

$$v_\phi = \frac{\omega}{|k_1|} = \frac{\omega}{|\Re(\underline{k})|}$$

Cette vitesse de phase dépend de la pulsation car ici l'expression de k_1 en fonction de ω est compliquée.

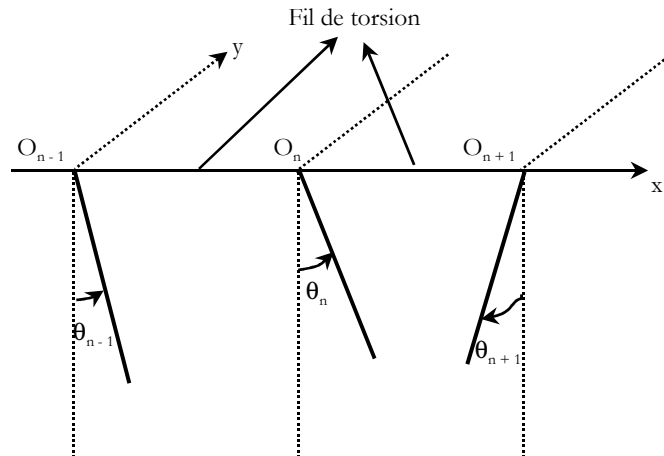
Par conséquent, le milieu de propagation sépare progressivement des ondes de pulsations différentes : c'est le phénomène de dispersion. On dit que la propagation de l'onde est dispersive.

Dans le cas du prisme étudié en optique en PCSI, on parle couramment de dispersion de la lumière en observant le faisceau en sortie couleur "arc en ciel" lorsque le prisme est éclairé en lumière blanche.

4) Un 2^{ème} exemple ; une chaîne de pendules couplés :

a) Equation de propagation :

On considère la chaîne de pendules couplés représentée sur la figure suivante :



Chaque pendule est une barre homogène de masse m et de longueur ℓ . Il oscille dans le plan $(O_n yz)$ autour de l'axe horizontal $(O_n x)$, où O_n est la point d'abscisse $x_n = nd$ (d représente la distance constante entre deux pendules successifs).

On note θ_n l'angle de déviation du pendule n par rapport à la verticale.

Chaque pendule est relié à ses voisins par un fil de torsion de constante K (confondu avec l'axe horizontal).

On suppose de plus que l'air exerce une force de frottements fluides sur chaque pendule, de la forme $-f \dot{\theta}_n$.

On note $J = \frac{m\ell^2}{3}$ le moment d'inertie de chaque pendule par rapport à son axe de rotation.

Le théorème scalaire du moment cinétique, appliqué au pendule n , donne :

$$\frac{m\ell^2}{3} \ddot{\theta}_n = -K(\theta_n - \theta_{n+1}) - K(\theta_n - \theta_{n-1}) - \frac{mg\ell}{2} \sin \theta_n - f \dot{\theta}_n$$

$$\frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}_n = -K(2\theta_n - \theta_{n+1} - \theta_{n-1}) - \frac{mg\ell}{2}\sin\theta_n - f\dot{\theta}_n$$

Approximation des milieux continus : on suppose que d est très inférieure aux distances caractéristiques des phénomènes de propagation étudiés. On pose alors :

$$\theta_n(t) = \theta(x = nd, t)$$

L'équation différentielle du mouvement devient alors :

$$\frac{m\ell^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = -K(2\theta(x, t) - \theta(x+d, t) - \theta(x-d, t)) - \frac{mg\ell}{2}\sin\theta(x, t) - f\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

Soit :

$$\frac{m\ell^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = Kd^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{mg\ell}{2}\sin\theta(x, t) - f\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

Dans l'hypothèse où les angles demeurent petits, l'équation du mouvement se linéarise :

$$\frac{m\ell^2}{3}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = Kd^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{mg\ell}{2}\theta - f\frac{\partial\theta}{\partial t}$$

b) Pseudo ondes planes progressives harmoniques :

On cherche une solution complexe de l'équation de propagation précédente de la forme :

$$\underline{\theta}(x, t) = A \exp[j(\omega t - kx)]$$

avec ω réel et k *a priori* complexe.

Ce type d'onde généralise la notion d'onde plane progressive harmonique dans le cas où le vecteur d'onde est complexe.

c) Relation de dispersion :

En reportant dans l'équation de propagation :

$$\frac{m\ell^2}{3}(-\omega^2 \underline{\theta}) = Kd^2(-k^2 \underline{\theta}) - \frac{mg\ell}{2}\underline{\theta} - f(j\omega \underline{\theta})$$

Soit :

$$\left[\frac{m\ell^2\omega^2}{3} - Kd^2k^2 - \frac{mg\ell}{2} - jf\omega \right] \underline{\theta} = 0$$

D'où l'expression du vecteur d'onde :

$$k^2 = \frac{1}{Kd^2} \left[\frac{m\ell^2\omega^2}{3} - \frac{mg\ell}{2} - jf\omega \right]$$

Soit :

$$k^2 = \left(\frac{m\ell^2\omega^2}{3Kd^2} - \frac{mg\ell}{2Kd^2} \right) - j \frac{f\omega}{Kd^2}$$

Cette relation qui lie ω et k est appelée relation de dispersion.

d) Dispersion et absorption :

Le vecteur d'onde est complexe et peut s'écrire :

$$k(\omega) = k'(\omega) + jk''(\omega)$$

La solution complexe devient alors :

$$\underline{\theta}(x, t) = A \exp[j(\omega t - kx)] = A e^{k''x} e^{j(\omega t - k'x)}$$

Et la solution réelle vaut :

$$\theta(x, t) = A e^{k''x} \cos(\omega t - k'x)$$

Le terme $\cos(\omega t - k'x)$ est identique à celui d'une onde plane progressive qui se propagerait à la vitesse $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$ appelée vitesse de phase. La vitesse de phase va dépendre, *a priori*, de la pulsation ω de l'onde : on dit que le milieu est dispersif.

D'autre part, le terme $\exp(k''x)$ décrit un amortissement ou une amplification de l'amplitude selon le signe de k'' et selon le signe de x ; la situation la plus fréquente est celle de l'amortissement (k'' négatif et l'onde se propage selon les x positifs croissants). On dit alors que le milieu est absorbant. On peut définir alors une distance caractéristique δ d'amortissement par :

$$\delta = \frac{1}{|k''|}$$

Etude de deux cas particuliers :

- Limite des hautes fréquences : on ne conserve alors dans l'expression de k^2 que les termes les plus importants :

$$k^2 = \frac{m\ell^2 \omega^2}{3Kd^2} - j \frac{f \omega}{Kd^2} = \frac{m\ell^2 \omega^2}{3Kd^2} \left[1 - j \frac{3f}{m\ell^2 \omega} \right]$$
$$k = \pm \sqrt{\frac{m\ell^2 \omega^2}{3Kd^2} \left[1 - j \frac{3f}{m\ell^2 \omega} \right]}^{1/2}$$

Par conséquent, en faisant un DVL au 1^{er} ordre :

$$k \approx \pm \sqrt{\frac{m\ell^2 \omega^2}{3Kd^2} \left[1 - j \frac{3f}{2m\ell^2 \omega} \right]}$$

On en déduit :

$$k' = \pm \omega \sqrt{\frac{m\ell^2}{3Kd^2}} \quad \text{et} \quad k'' = \mp \sqrt{\frac{m\ell^2 \omega^2}{3Kd^2}} \frac{3f}{2m\ell^2 \omega} = \mp f \sqrt{\frac{3}{4m\ell^2 K^2}}$$

Dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des $x > 0$, on doit avoir $k' > 0$ et par conséquent $k'' < 0$:

$$k' = \omega \sqrt{\frac{m\ell^2}{3Kd^2}} \quad \text{et} \quad k'' = -f \sqrt{\frac{3}{4m\ell^2 K^2}}$$

La vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{\frac{3Kd^2}{m\ell^2}}$$

Elle est constante : le milieu est non dispersif.

Comme $k'' < 0$, le milieu est absorbant et l'onde est amortie sur une distance caractéristique :

$$\delta = -\frac{1}{k''} = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{4m\ell^2 K^2}{3}}$$

- Cas où les frottements sont négligeables : l'équation d'onde prend la forme dite de « Klein-Gordon » :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{3Kd^2}{m\ell^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{3g}{2\ell} \theta$$

La relation de dispersion devient alors :

$$-\omega^2 \theta = \frac{3Kd^2}{m\ell^2} (-k^2 \theta) - \frac{3g}{2\ell} \theta$$

Soit :

$$\omega^2 - \frac{3g}{2\ell} = \frac{3Kd^2}{m\ell^2} k^2$$

On note :

$$\omega_c = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\frac{3Kd^2}{m\ell^2}}$$

La relation de dispersion devient alors :

$$\omega^2 - \omega_c^2 = c^2 k^2$$

Si $\omega > \omega_c$, le vecteur d'onde est réel et vaut :

$$k = k' = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{c}$$

et le milieu n'est pas absorbant. Il est par contre dispersif puisque la vitesse de phase dépend de ω :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} c$$

Si $\omega < \omega_c$, le vecteur d'onde est imaginaire pur et vaut : $k = jk'' = -j \frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c}$

L'onde résultante devient : $\theta(x, t) = A e^{-\frac{\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{c} x} \cos \omega t$

La phase ωt de l'onde ne dépend plus de la variable x qui en revanche influe sur l'amplitude : l'onde obtenue est une onde stationnaire. Mais l'amplitude décroît exponentiellement avec x alors que les ondes stationnaires, solutions de l'équation de d'Alembert, varient de manière sinusoïdale avec x .

C'est pourquoi on qualifie souvent l'onde ainsi obtenue d'onde évanescence.



LES ONDES DANS LA NATURE



Les ondes ont été distribuées à profusion par la Nature dans l'air, la terre, l'océan et le monde vivant. La lumière solaire en est la preuve la plus visible, bien que sa nature d'onde électromagnétique n'ait été comprise qu'au XIX^e siècle. Outre sa lumière, le Soleil émet des ondes plus subtiles, nées de la collision du champ magnétique terrestre avec le *vent solaire*, un flux de particules diverses émises par bouffées lors des éruptions solaires qui agitent la surface de l'astre, une fournaise à quelque 5 800 K¹. Ces ondes de choc causent des aurores polaires, des parasites radioélectriques et, pense-t-on, des oscillations atmosphériques de très basse fréquence induisant des courants électriques dans le sol.

La lumière solaire nous est révélée par le sens de la vision, sous l'aspect d'une mince palette de couleurs étalées du rouge au violet. La couleur est un moyen de communication très utilisé par le monde vivant : plumages, carapaces, ailes, appendices diversement colorés et décorés sont autant de signaux mettant à profit l'onde lumineuse. Mieux, certaines espèces de poissons et d'insectes produisent leur propre lumière pour communiquer entre congénères ou pour appâter

leurs victimes. L'ingéniosité de la Nature ne s'arrête pas à la lumière visible : les serpents perçoivent le rayonnement infrarouge émis par leurs proies à sang chaud. La peau humaine est de même dotée de tels détecteurs thermiques. Les ondes sonores participent aussi largement à la communication dans le monde vivant : ce sont les cris et les chants dans tout le règne animal, mais aussi la parole dans l'espèce humaine. Les fréquences sonores sont utilisées depuis les infrasons, pour les grands mammifères terrestres et marins, jusqu'aux ultrasons pour les chauve-souris et sans doute aussi pour les insectes.

La Terre est elle-même une source d'ondes de diverses natures. Cause redoutée de destruction et de désolation dans les régions habitées, les tremblements de terre engendrent des ondes de compression et de cisaillement qui se propagent à l'intérieur et à la surface du Globe. Autre onde, atmosphérique cette fois : le tonnerre, dont l'intensité parfois impressionnante avait fait un dieu courroucé dans plusieurs religions anciennes.

La houle et les vagues sont d'autres ondes familières. créées par le vent à la surface de l'eau, où se manifeste aussi une onde plus rare, le *soliton*, dont on découvre le caractère fondamental dans bien d'autres domaines que l'hydrodynamique. Il s'agit ici d'un bourrelet d'eau isolé qui se propage sans déformation sur des distances parfois considérables, donnant lieu aux mascarets, visibles à l'embouchure de certains fleuves, et aux raz-de-marée dont les déferlements sur les côtes sont dévastateurs.

L'Homme, créateur d'ondes

Le progrès scientifique a mis en avant le rôle des ondes, présentes désormais dans une multitude d'applications. Ce sont le plus souvent des ondes électromagnétiques ou sonores. Toutefois, l'électronique et l'optique quantiques, nées dans les années 50, exploitent aussi d'autres propriétés ondulatoires de la matière, découvertes en 1924 par Louis de Broglie.

Les ondes électromagnétiques

Depuis leur prédiction, en 1873, par James Clerk Maxwell, et leur production, en 1887, par Heinrich Hertz, les ondes électromagnétiques n'ont cessé d'étendre leur champ d'application. En longueurs d'onde, elles s'étendent désormais, *grosso modo*, du nanomètre au kilomètre et elles sont omniprésentes dans la vie quotidienne par la radio et la télévision hertziennes, le téléphone mobile ou le four à micro-ondes. On les retrouve aussi dans d'innombrables domaines spécialisés, comme des outils de diagnostic et de traitement en médecine, des aides à la navigation dans les transports et des procédés industriels de contrôle et de fabrication.

La lumière elle-même, phénomène naturel un peu « brut » à l'origine, est désormais domestiquée avec le laser. Il s'agit d'un émetteur *cohérent*, prévu par Albert Einstein en 1917, préparé

par l'équipe d'Alfred Kastler dès 1950 et réalisé en 1960 par des chercheurs américains. Avec le laser, on dispose désormais d'une source de lumière de couleur très pure, d'une directivité inégalée et d'une puissance inaccessible aux sources classiques les plus intenses. Ce nouvel objet est devenu irremplaçable dans bien des domaines : en télécommunications, il permet d'acheminer une quantité énorme de messages par des fibres optiques ; dans l'industrie, il est un moyen d'usinage inédit ; en médecine, c'est un bistouri idéal ; dans l'audiovisuel, il lit les détails minuscules des disques compacts...

Même l'optique classique bénéficie d'un nouvel essor grâce à la maîtrise de la phase et de la durée d'émission de l'onde lumineuse. On peut ainsi créer des impulsions ne comportant que quelques longueurs d'onde, corriger les images instrumentales par des composants optiques adaptatifs et restituer le relief des images avec l'holographie.

Aux longueurs d'onde encore plus faibles, les rayons X associés à l'informatique ont révolutionné le diagnostic médical avec la tomodensitométrie (le *scanner X*) qui révèle des détails internes de plus en plus ténus. Enfin, à la limite inférieure des longueurs d'onde actuellement accessibles, les rayons γ de certains corps radioactifs détruisent les cellules cancéreuses.

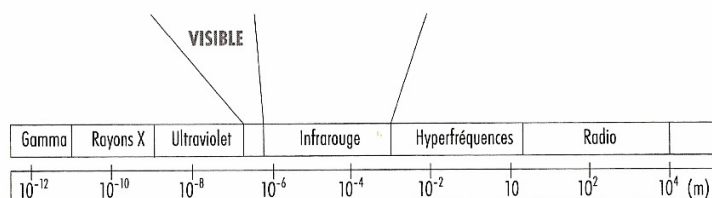


Figure 1 : Le spectre électromagnétique

Les longueurs d'onde sont représentées sur une échelle logarithmique

Les ondes sonores

Le progrès technique a aussi donné une impulsion spectaculaire aux ondes sonores. La science des sons, vieille comme l'Humanité avec le chant et la musique, a connu son apogée avec les travaux de Lord Rayleigh (William Strutt, 1842-1919). L'électronique puis l'informatique lui ont donné de nouvelles et multiples applications.

Pour les fréquences audibles (entre 20 Hz^1 et 20 kHz^2), le traitement numérique du son restitue désormais les enregistrements de façon parfaite et les synthétiseurs électroniques ouvrent de vastes espaces de création, auparavant inaccessibles aux instruments et aux modes d'écriture traditionnels.

En fait, les applications des ondes acoustiques s'étendent maintenant très au-delà de l'intervalle audible. L'extension la

plus spectaculaire s'est faite vers les hautes fréquences avec les ultrasons, dans des applications surtout médicales : échographie, lithotritie (destruction des calculs rénaux et vésicaux). Les ultrasons sont aussi d'une aide précieuse dans d'autres domaines comme la navigation maritime, avec le *sonar* (écho-sondeur), ou bien encore l'industrie, où ils facilitent le contrôle de qualité et l'usinage.

Avec les hypersons, dont les fréquences se situent vers le gigahertz, les ondes acoustiques deviennent un outil de recherche et d'applications avancées, telle la microscopie acoustique qui révèle la structure interne d'objets minuscules, comme des circuits électroniques intégrés.

À l'autre extrémité de l'intervalle audible, les infrasons n'ont pas connu le même essor ; ils n'en suscitent pas moins quelques recherches en géophysique, communication et défense.

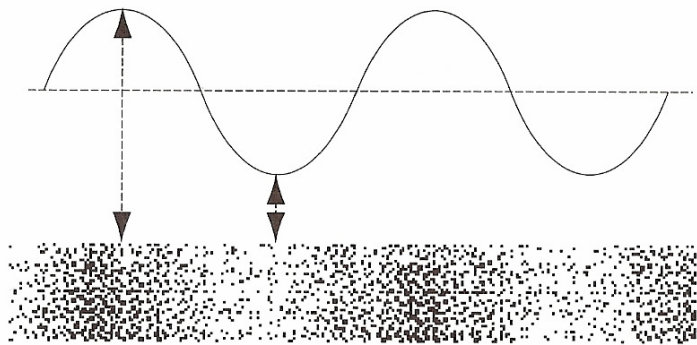


Figure 2 : Variations de pression instantanées dans une onde sonore

Les régions sombres sont en surpression par rapport à la pression normale et les régions claires sont en dépression.

Propriétés communes aux ondes

Les ondes hertziennes et les ondes sonores sont des exemples immédiats d'un phénomène physique très général qui se manifeste également dans les domaines moins accessibles que sont la matière dans sa dimension atomique ou l'Univers dans son immensité. Toutefois, quelle que soit leur nature, les ondes ont en commun des propriétés caractéristiques (cf. Annexe 1 : *Les mathématiques des ondes*).

Tout d'abord, le phénomène d'onde dépend non seulement du *temps* t , comme une simple vibration, mais aussi de la *position* x dans l'espace. Les variables temps et position sont ainsi associées de manière affine au sein de la *phase* φ :

$$\varphi = \omega (t - x / c),$$

où ω est la fréquence angulaire (égale à 2π fois la fréquence en hertz) et c est la célérité de l'onde s'éloignant de la source (en mètres par seconde). La phase a la nature d'un angle, qu'on mesure donc en degrés ou, plus souvent, en *radians*¹. Une onde est ainsi une grandeur G quelconque (pression, vitesse, etc.), qui varie périodiquement au rythme de la phase, par exemple selon la loi simple :

$$G(t,x) = G_0 \cdot \cos [\varphi(t, x) + \varphi_0],$$

où φ_0 est la valeur de la phase à l'origine du temps et de la position. La valeur maximale G_0 de l'onde est son *amplitude*. Une onde est dite *plane* lorsque sa phase est la même en tout point d'un plan. Il existe aussi des ondes sphériques, cylindriques, etc., selon la forme des surfaces d'égale phase.

La périodicité des ondes est la règle générale (à l'exception des *solitons*). Comme la phase dépend à la fois du temps et de la position, cette périodicité est double. Ainsi, en un endroit donné, la *période* T est la durée au bout de laquelle l'oscillation se reproduit identique à elle-même. Il lui correspond la *longueur*

d'onde λ , qui est la distance parcourue pendant une période par un point lié à l'onde. Le rapport de la longueur d'onde à la période est la *célérité* c , encore appelée *vitesse de phase*. Par exemple, pour le son, où la célérité est de 330 m/s environ dans l'air, la grandeur qui se propage est une variation de pression ; pour la lumière et les autres ondes électromagnétiques, c'est un champ électrique et un champ magnétique qui se propagent en phase, à environ 300 000 km/s dans le vide.

La *polarisation* caractérise la direction de l'oscillation par rapport à la direction de propagation. Elle est *longitudinale* dans l'onde sonore et *transversale* dans l'onde électromagnétique.

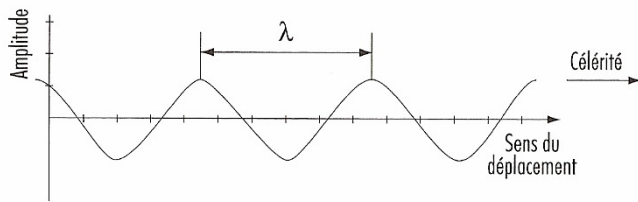


Figure 3 : La forme instantanée d'une onde

Certains milieux de propagation, dits *dispersifs*, imposent une célérité qui dépend de la fréquence des ondes. C'est le cas du verre, où des rayons rouges et violets ont des vitesses différentes, ce qui leur donne des trajets distincts dans un prisme. Lorsque plusieurs ondes de phases voisines se propagent dans un tel milieu, l'amplitude résultante est modulée par une onde-enveloppe qui se déplace à la *vitesse de groupe*, différente de la célérité moyenne de l'ensemble. La vitesse de groupe est en général la vitesse de propagation de l'énergie, nécessairement inférieure à la constante c de la Mécanique relativiste (300 000 km/s, environ). La célérité, qui ne véhicule pas de matière ou d'énergie, n'est pas soumise à cette contrainte.

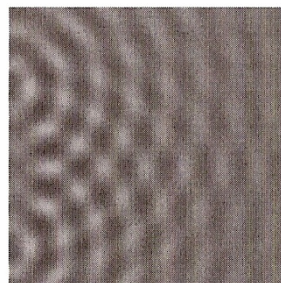
Les interférences

Une propriété des ondes est leur capacité à interférer, c'est-à-dire à se combiner pour donner une nouvelle onde ou, dans certains cas, une vibration stationnaire. La résultante est généralement aléatoire sauf si les ondes sont *cohérentes*, c'est-à-dire dans une relation de phase bien définie, ce qui est notamment le cas lorsque leur source est commune. Le *déphasage* est la différence entre les phases de telles ondes cohérentes.

Deux cas particuliers d'interférence sont importants : lorsque le déphasage est nul ou égal à un nombre *pair* de fois π radians, l'onde résultante a pour amplitude la *somme* des amplitudes des composantes. L'interférence est dite *constructive*. Au contraire, lorsque le déphasage vaut un nombre *impair* de fois π radians, l'amplitude de l'onde résultante est la *différence* des amplitudes des composantes : l'interférence est *destructive*. Dans ce cas, avec des composantes d'égale amplitude, il n'y a plus d'onde résultante, chaque onde annulant l'autre à chaque instant.

Le phénomène d'interférence est capital. Il explique en particulier la *diffraction* d'une onde incidente par un obstacle de dimensions comparables à la longueur d'onde : l'onde incidente « éclate » en ondes secondaires qui interfèrent entre elles et avec elle-même pour donner une résultante généralement très complexe. La diffraction permet aux ondes de contourner des obstacles. Elle explique, par exemple, que l'on puisse se parler sans se voir d'une pièce à l'autre ou qu'il existe des points privilégiés pour la réception en téléphonie mobile.

Figure 4 : Interférences entre les ondes issues de deux sources cohérentes



L'onde résultante a une amplitude maximale dans les régions claires et minimale dans les régions sombres.

L'interférence permet aussi de concentrer en un point précis, le *foyer*, l'énergie transportée par plusieurs ondes, en faisant en sorte qu'elles s'y retrouvent avec un déphasage nul. Ceci est mis à profit dans les lentilles ou les miroirs optiques convergents, mais aussi dans la *lithotritie* ultrasonore, un procédé de destruction des calculs rénaux ou vésicaux. À l'inverse, l'interférence destructive est à la base de diverses techniques, comme l'atténuation *active* d'un bruit ambiant (celui-ci y est combiné avec sa réplique, convenablement déphasée).

Les calculs sur la diffraction sont en général très compliqués. Ils ont toutefois beaucoup bénéficié de l'informatique. Ainsi, il est devenu assez facile d'obtenir l'image d'un objet dont on ne connaît que la figure de diffraction donnée par une certaine onde. L'inversion des figures de diffraction a de nombreuses applications scientifiques : elle est utilisée dans l'analyse des cristaux par rayons X ou dans le traitement des images (recherche d'une forme ou atténuation du flou, par exemple).

L'effet Doppler

Lorsqu'une source d'ondes se déplace par rapport à un observateur, celui-ci constate deux phénomènes : d'une part une modification de la fréquence de l'onde, c'est *l'effet Doppler* (cf. Annexe 1), d'autre part un changement de la direction apparente de la propagation, c'est *l'aberration*. L'effet Doppler explique que le son émis par un véhicule en mouvement passe de l'aigu au grave à la hauteur d'un observateur.

L'aberration est un peu plus difficile à constater avec le son ou la lumière. Elle est néanmoins comparable au changement de direction de la pluie observée depuis une voiture ou un train roulant à bonne allure : les gouttes semblent arriver de biais alors qu'en réalité leur chute est verticale.

On constate aussi ces deux effets lorsqu'un observateur est en mouvement par rapport à une source d'ondes fixe.

Bang sonore et effet Tcherenkov

Que se passe-t-il lorsqu'une source d'ondes se déplace avec une vitesse supérieure à la célérité dans le milieu ? Pour le son, le résultat est bien connu : c'est le *bang* émis par un avion volant à plus de 330 m/s (soit 1 200 km/h environ, ou mach 1). Pour la lumière, l'homologue du bang supersonique est *l'effet Tcherenkov*. On l'observe sous la forme d'un éclair bleuâtre lorsqu'une particule atomique rapide (à 250 000 km/s ou plus) pénètre dans un milieu où la célérité de la lumière est moindre (par exemple, l'eau : 200 000 km/s). C'est l'effet Tcherenkov qui crée un halo lumineux autour des corps radioactifs immergés en piscine. Des astronautes en mission hors de l'atmosphère terrestre disent avoir observé des éclairs fugaces qui pourraient correspondre au rayonnement Tcherenkov émis par des particules rapides traversant l'humeur vitrée de leurs yeux...