LP33 : Écoulements de fluides

Niveau PC - PC*

pré-requis : — écoulement de Couette et viscosité
— Statique des fluides
— Description Eulérienne et Lagrangienne
— Dérivée particulaire

Je place cette leçon après une réflexion / introduction sur la description Eulérienne d'un champ de vitesses, ainsi que l'établissement de la force de viscosité par le traitement de l'écoulement de Couette.

Cette leçon est à cheval entre la cinématique, déjà abordée, et la dynamique des fluides (La dérivée particulaire a donc été vue).

Introduction

L'étude des écoulements de fluide fait partie de cinématique et de la dynamique des fluides. Elle est indispensable pour comprendre leur comportement, et trouve des applications dans une multitude de domaines de l'ingénierie, comme l'énergie (éoliennes), le transport (aérodynamisme, portance des avions, etc) voir plus simplement en plomberie.

I) Généralités

1) Conservation de la masse

La masse contenue dans un volume V à un instant donné t est $M(t)$:

$$M(t) = \iiint_V \rho \, dV$$

La variation de cette quantité est $\frac{dM(t)}{dt}$ et d'après le théorème de Leibniz :

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V \rho \, dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oiint_S \rho \vec{v}\cdot\vec{n} \, dS$$

$\vec{v}$ = vitesse du contour S, puis égale à la vitesse du fluide

Ostrogradski $\longrightarrow$
$$\frac{dM(t)}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \iiint_V \mathrm{div}(\rho \vec{v}) \, dV$$

On pose $\frac{dM(t)}{dt} = 0$, sans puit ni source, et

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Équation de continuité de la masse.

Le terme $\frac{d\rho}{dt}$ est égal à 0 dans le cas de fluides incompressibles. ③

Dans les faits plus on s'approche de la vitesse du son dans le milieu considéré, plus ce terme est important.

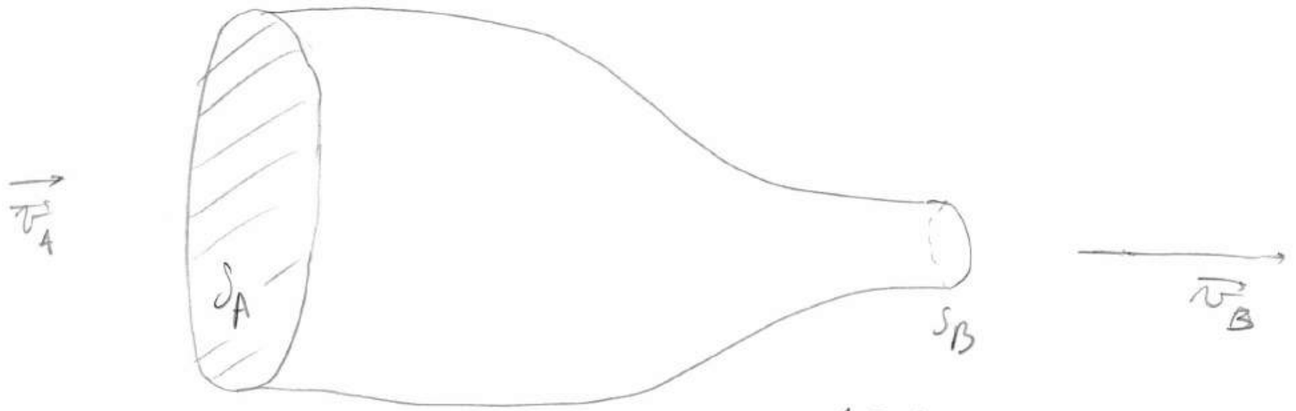
\+ dans le cas de fluides incompressibles,

$$\longrightarrow \quad div(\vec{v}) = 0$$

Ce qui s'interprète comme la conservation du débit en cinématique des fluides

en effet :

$$\iiint_V div(\vec{v})\,dV = \oiint_S \vec{v}\,\vec{dS} = \cancel{\text{Constante}}\ 0$$



$$v_A S_A = v_B S_B$$

2) Conservation de la quantité de mouvement

Démonstration très importante qui sert à décrire l'écoulement de tout fluide :

Si on applique le PFD à un fluide :

$$\frac{d\,\vec{p}_{tot}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V \rho\vec{v}\,dV = \sum \vec{F_{ext}}$$

théorème de Liebniz :

$$\iiint_V \frac{d(\rho\vec{v})}{dt}dV + \oiint_S \rho\vec{v}(\vec{v}.\vec{n})dS = \sum\vec{F_{ext}}$$

$\downarrow$ Ostrogradski

$$\iiint_V \frac{d(\rho\vec{v})}{dt}\,dV + \iiint_V div(\rho\vec{v}.\vec{v})\,dV = \sum\vec{F_{ext}}$$

forme locale (avec f en unités volumiques)

$$\frac{d(\rho\vec{v})}{dt} + div(\rho\vec{v}\vec{v}) = \sum\vec{f_{ext}}$$

après un petit développement mathématique en utilisant la continuité de la masse :

$$\rho\left[\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}\right] = \sum\vec{f_{ext}}$$

On reconnait $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\vec{\text{grad}})\vec{v}$

* pour les forces : pesanteur + pression

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}}\, p \qquad \text{EQUATION DE EULER}}$$

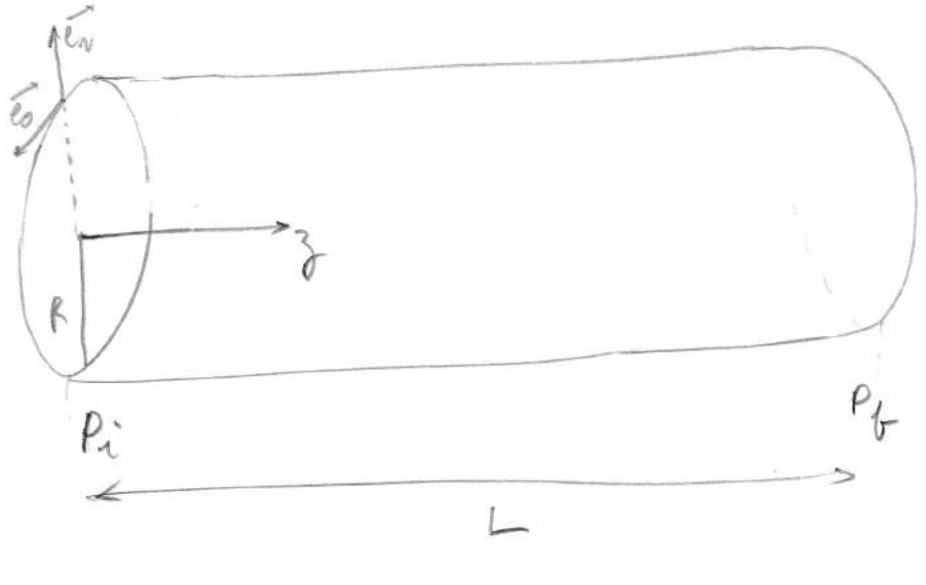
* en ajoutant le frottement visqueux

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}}\, p + \eta \Delta \vec{v} \qquad \text{EQUATION DE NAVIER-STOKES}}$$

II) Écoulement de Poiseuille

On considère l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique.

Je traite le problème en coordonnées cylindriques pour m'approcher du cas réel.



L'écoulement est assuré par un gradient de pression selon z constant.

$$\frac{\partial p}{\partial z}\vec{e_z} = \frac{\Delta p}{L}\vec{e_z} = \frac{P_f - P_i}{L}\vec{e_z} \quad \text{avec } P_f < P_i$$

$\frac{\partial p}{\partial z} < 0$ donc la force $-\frac{\partial p}{\partial z}$ est dans le sens de $\vec{e_z}$

écrivons l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{(\vec{v}.\vec{grad})\vec{v}}\right) = \cancel{\rho\vec{g}} - \vec{grad}\, p + \eta\Delta\vec{v}$$

écoulement stationnaire

écoulement horizontal

$\vec{v} = v_z\vec{e_z}$ et $\vec{v}$ ne de dépend que de r

$$\left(v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \vec{0}\right)$$

$$\vec{0} = \vec{grad}\, p + \eta\Delta\vec{v}$$

$$\vec{grad}\, p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e_z} = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{\Delta p}{L}\vec{e_z}$$

$$\eta\Delta\vec{v} = \frac{\eta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right)\vec{e_z}$$

$$\frac{\eta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right) - \frac{\Delta p}{L} = 0$$

$$\frac{\Delta p}{L\eta} r\,dr = d\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) \xrightarrow{\text{en intégrant}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Delta p}{L\eta} r^2 + A = r\frac{dv_z}{dr},$$

en remarquant que $\frac{dv_z}{dr} = 0$ quand $r = 0$

$\rightarrow A = 0$

$$\frac{\Delta p}{2L\eta} r\,dr = dv_z$$

en intégrant

$$\frac{\Delta p\, r^2}{4L\eta} + B = v_z$$

quand $r = R$, $v_z = 0$

$\rightarrow B = -\frac{\Delta p R^2}{4L\eta}$

$$\frac{\Delta p (r^2 - R^2)}{4L\eta} = v_z$$

Tracé :

On pose $k = -\frac{\Delta p}{L}$, et on détermine le débit,

$$\Phi = \int_0^R v_z(r) \cdot 2\pi r\,dr$$

après calculs : $\Phi = \frac{\pi k R^4}{8\eta} = \frac{\pi}{128\eta}\frac{\Delta p}{L} d^4$

= Loi de Poiseuille

On remarque qu'elle ressemble à $U = RI$

avec $U = \Delta p$

$I = \varphi$

et $R = \frac{128\eta L}{\pi d^4}$

III) Nombre de Reynolds

En fait, on a supposé que $\vec{v} = v_z(r)\vec{e_z}$ ce qui correspond à un écoulement laminaire. qui donne cet écoulement de Poiseuille.

Dans un cas réel, le régime peut devenir turbulent dans certains cas, ce qui fait apparaître des tourbillons et $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}})\vec{v} \neq 0$

Le nombre de Reynolds nous permet d'estimer la qualité de cette approximation.

$$Re = \frac{\rho v^2}{\eta \frac{v}{L}}$$

ρv^2 : flux convectif de la quantité de mvt

$\eta \frac{v}{L}$: flux diffusif de la quantité de mvt

$$Re = \frac{vL}{\nu}$$

ν : viscosité cinématique

Si Re faible : laminaire
Si Re grand : turbulent

<u>Exemple</u> : * eau dans une conduite de 1ocm
On considère que si Re > 2000
⟶ turbulent

$D = 4.10^{-3}$ m
$\nu = 10^{-6}$ m^2.s^{-1}

$$\frac{2000 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-3}} = v = 0{,}5 \text{ m.s}^{-1}$$

au-delà de cette valeur le régime n'est plus laminaire, des tourbillons se forment

Encore actuellement, c'est une branche de la physique très étudiée,
Récemment dans "<u>Science</u>", en 2011, une équipe a pu déterminer précisément le nb de Reynolds critique lors de l'écoulement dans une conduite par mesures très précises et simulations numériques à $Re \simeq 2040$

Montrer exemples : <u>laminaires</u> vs <u>turbulent</u>

<u>ex</u> : – bougie en strioscopie
– images satellites tempête

Donner d'autres exemples d'écoulement ?

Conclusion : on a caractérisé un écoulement laminaire et montré que d'autres types d'écoulements peuvent exister.

Il est nécessaire d'introduire la notion de traînée, et de couche limite pour caractériser des systèmes plus complexes.
Cela pourra être fait en revenant sur le viscosimètre à bille.

+ vecteur tourbillon

+ traiter un cas instationnel

Commentaires

* symétrie
* Référentiel
* décroissance linéaire de la pression
à démontrer
* fluide parfait, pas d'adhérence à l'obstacle
* Navier Stokes vrai que pour un fluide
Newtonien
incompressible donc
* exemple des glaciers
* L du Re = longueur où il y a le gradient
de vitesse