

TP N.05

Signal dans un câble coaxial.

OBJECTIFS DU TP

Dans ce TP, nous effectuerons les mesures des deux principales caractéristiques du câble : la vitesse de propagation de l'information (**vitesse de groupe**) et le **coefficient d'atténuation**. Nous étudierons aussi les **phénomènes de réflexion** liés à un changement de nature du milieu de propagation réalisé par le branchement d'une résistance en bout de câble .

1 Introduction :

Le câble coaxial est très utilisé pour le câblage des antennes qu'elles soient émettrices ou réceptrices comme les antennes radio, télévision. Toutefois, la fibre optique est préférée pour des transmissions à longues distances lorsque les distances sont de l'ordre du kilomètre ou bien au-delà.

Un câble coaxial est constitué de deux conducteurs de même axe Ox : un cylindre plein (l'âme, de rayon $r_1 = 0,3mm$) et une tresse cylindrique d'épaisseur négligeable (de rayon $r_2 = 1,8mm$), séparés par un diélectrique (isolant). Le conducteur central sert à amener un courant électrique et la tresse extérieure en assure le retour (jouant le rôle de masse). **Le câble coaxial est caractérisé par une impédance caractéristique souvent de 75 ou de 50.** Son atténuation est exprimée en décibel par unité de longueur, elle est de l'ordre de 10 dB km^{-1} . La fibre optique possède une atténuation beaucoup plus faible de l'ordre de $0,1 \text{ dB km}^{-1}$.



Même s'il existe de grandes différences entre une fibre optique et un câble coaxial, l'étude du câble n'est pas sans intérêt car elle est, en partie, transposable à la fibre.

2 Matériel :

- Oscilloscope .
- GBF : Le G.B.F est ici utilisé en générateur d'impulsion, c'est-à-dire qu'il délivre une tension crête à crête avec un rapport cyclique faible, ce qui permettra d'identifier clairement le signal.
- Câble coaxial : d'impédance caractéristique $R_c = 75\Omega$ de longueur $L = 100m$.
- 2 connecteurs en T et de résistances de bout de câble,
- Petit câble coaxial de 50 cm d'impédance caractéristique de 50Ω .
- Boîte à décade de résistances .

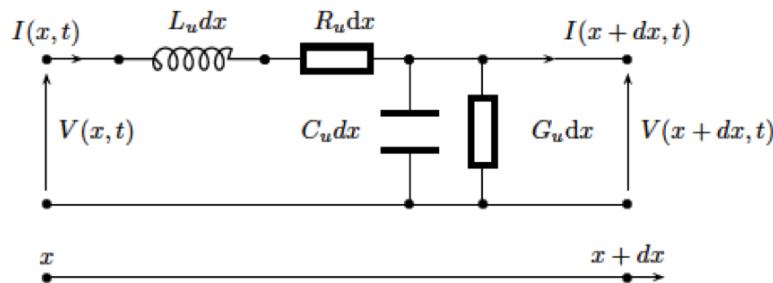
La question de l'adaptation d'impédance est une question centrale dans ce TP. On peut voir sur les photographies de la **figure 2** la réalisation de l'adaptation d'impédance réalisée pour chaque câble coaxial. Adapter l'impédance signifie placer en bout de câble une impédance égale à l'impédance caractéristique du câble.



3 Aspects théoriques :

3.1 Équation de propagation :

On considère une portion élémentaire de câble coaxial décrit par le modèle de la figure ci-dessous



Le câble coaxial est caractérisé par les constantes réparties L_u , C_u , R_u et G_u supposées constantes sur toute la longueur du câble. R_u est la résistance linéique du câble en Ωm^{-1} , G_u est la conductance linéique de fuite en $\Omega^{-1} m^{-1}$. L'isolant entre le conducteur central et le conducteur cylindrique qui l'entoure n'est pas le vide mais du polyéthylène. La permittivité relative ϵ_r du polyéthylène est $\epsilon_r = 2,3$ lorsque le matériau est plein, il s'avère que dans des câbles bon marché, il présente des alvéoles, on parle alors de diélectrique cellulaire. Sa permittivité relative est alors nettement plus faible, elle se rapproche en quelque sorte de celle du vide ($\epsilon_r = 1$). On peut la situer vers $1,3 \lesssim \epsilon_r \lesssim 1,5$. Dans ces conditions, on peut montrer en Électromagnétisme que la capacité linéique C_u en $F.m^{-1}$ et l'inductance linéique L_u en $H.m^{-1}$ du câble sont données par :

$$C_u = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(b/a)} \quad \text{et} \quad L_u = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$$

La permittivité relative d'un milieu diélectrique (isolant) est liée à l'indice de réfraction n dans ce milieu par la relation $\epsilon_r = n^2$. On rappelle que $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$.

1. Écrire les relations différentielles entre $I(x, t)$ et $V(x, t)$.
2. En déduire l'équation de propagation vérifiée par $I(x, t)$ et $V(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (L_u G_u + R_u C_u) \frac{\partial V}{\partial t} + R_u G_u V$$

3. Expliquer pourquoi la forme de l'équation de propagation dans le cas où l'on considère le câble comme idéal est la suivante :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Dans le cas d'un câble coaxial idéal d'impédance caractéristique Z_c , les solutions de l'équation de propagation peuvent s'écrire sous la forme :

$$I(x, t) = I_0 \exp(i(\omega t - kx)) + I_1 \exp(i(\omega t + kx)) \quad \text{et} \quad V(x, t) = Z_c(I_0 \exp(i(\omega t - kx)) - I_1 \exp(i(\omega t + kx)))$$

4. Quelle est la relation vérifiée par k pour que ces formes de solutions soient bien adaptées au problème ?
5. On place à l'extrémité $x = L$ du câble une impédance $\underline{Z}$. Montrer que l'expression de la tension devient :

$$V(x, t) = Z_c I_0 \exp(i\omega t) \left(\exp(-ikx) - \frac{Z_c - Z}{Z_c + Z} \exp ik(x - 2L) \right)$$

On note r le coefficient de réflexion donné par :

$$r = \frac{Z_c - Z}{Z_c + Z}$$

6. Montrer que laisser le câble en sortie ouverte ou court-circuiter la sortie est favorable à l'obtention d'une onde réfléchie ou à la fabrication d'une onde stationnaire. Commenter.

3.2 Atténuation :

L'équation de propagation dans le cas du câble réel est :

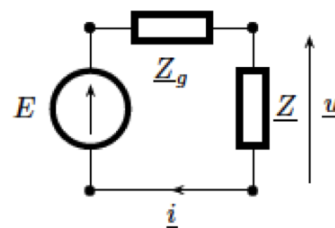
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + (L_u G_u + R_u C_u) \frac{\partial V}{\partial t} + R_u G_u V$$

7. Montrer qu'une solution de la forme $V(x, t) = V_0 \exp(i\omega t - kx)$ pourra convenir à condition que k soit un complexe noté $k = k' + ik''$. On ne cherchera pas établir les expressions de k' et de k'' mais on justifiera le fait que $k'' < 0$.
8. En déduire que la solution pour la tension est finalement : $V(x, t) = V_0 \exp(-|k''|x) \cdot \exp(i\omega t - k'x)$. On admettra que le facteur d'atténuation de l'onde reste de la forme $\exp(-|k''|x)$ pour un parcours de l'onde entre les abscisses $x = 0$ et x pour une forme d'onde non monochromatique comme, par exemple, une brève impulsion.

3.3 Adaptation d'impédance :

3.3.1 Point de vue électrocinétique :

On effectue, ici, une étude simplifiée de l'adaptation d'impédance avec uniquement des résistances. On considère un générateur décrit par son modèle de Thévenin équivalent (E, Z_g) où E est la valeur efficace de la fem du générateur branché sur une résistance d'utilisation Z comme sur la figure ci-contre.



9. Déterminer l'expression de l'intensité électrique (amplitude complexe) qui parcourt l'impédance d'utilisation. En déduire l'expression de la puissance moyenne dissipée au niveau de l'utilisation.
10. On dit qu'il y a adaptation d'impédance lorsque la puissance transférée du générateur à l'utilisation est maximale. Dans le cas d'une impédance du générateur $Z_g = R_g + jX_g$ et de celle de l'utilisation $Z = R + jX$, montrer qu'il y a adaptation d'impédance lorsque $R_g = R$ et $X_g = -X$.
11. On étudie le cas où $X_g = X = 0$. Montrer qu'alors on a $u = E/2$.

3.3.2 Point de vue ondulatoire :

On adopte maintenant un point de vue ondulatoire de propagation de l'information dans le câble coaxial. On suppose que le milieu de propagation est idéal et donc qu'il **n'y a pas de pertes**.

Nous avons montré que la forme de la solution en ondes planes progressives pour la tension était de la forme suivante lorsque l'on plaçait en bout de câble une impédance Z :

$$V(x, t) = Z_c I_0 \exp(i\omega t) \left(\exp(-ikx) - \frac{Z_c - Z}{Z_c + Z} \exp ik(x - 2L) \right)$$

12. Que se passe-t-il si l'on met en bout de câble une impédance correspondant à son impédance caractéristique ? On dit qu'on a adapté l'impédance, pour traduire le fait que l'impédance du câble et du récepteur (utilisation) sont identiques. Qu'est devenue l'énergie associée au signal ?

3.4 Ondes stationnaires :

On envisage une situation où le signal délivré à l'entrée du câble peut être considéré comme monochromatique. On ne s'intéressera qu'à l'expression de la tension, celle de l'intensité étant de forme tout à fait équivalente. Dans un premier temps, on étudie la situation du câble en sortie ouverte. Cela correspond à $Z \rightarrow \infty$. La tension dans le câble coaxial s'exprime par :

$$V(x, t) = R_c I_0 \exp i(\omega t - kL) (\exp(-ik(x - L)) + \exp ik(x - L))$$

En notation réelle, on obtient : $V(x, t) = 2V_0 \cos(\omega t - kL) \cos k(x - L)$

13. Expliquer clairement en quoi l'expression de la tension précédente $V(x, t)$ relève d'une situation d'ondes stationnaires.
Afin d'étudier l'amplitude de la tension dans une situation d'ondes stationnaires, on place l'oscilloscope au début du câble à une position telle que $x = 0$. La tension visualisée est donc :

$$V(0, t) = 2V_0 \cos(kL) \cos(\omega t - kL)$$

Son amplitude est $2V_0 |\cos kL|$.

14. Montrer qu'on observe des ventres (maximum d'amplitude) ou des noeuds (amplitude nulle) de tension en $x = 0$ pour des fréquences données par les formules :

$$f_{pV} = p \frac{c}{n2L} \quad \text{et} \quad f_{pN} = (2p + 1) \frac{c}{n4L}$$

où p est un entier naturel, n l'indice du polyéthylène, c la vitesse de la lumière dans le vide et L la longueur du câble.

Dans un second temps, on envisage la situation où l'extrémité du câble coaxial est court-circuitée, c'est-à-dire $Z \rightarrow 0$. En reprenant les expressions vues avant, on peut montrer que la tension $V(x, t)$ s'exprime en notation réelle selon :

$$V(x, t) = 2V_0 \sin(\omega t - kL) \sin k(x - L)$$

On en déduit que l'oscilloscope visualise une tension en $x = 0$ de la forme :

$$V(x, t) = -2V_0 \sin(kL) \sin(\omega t - kL)$$

15. Comparer les noeuds et les ventres par rapport à la situation précédente.

3.5 Conclusion :

Le câble coaxial utilisé est constitué d'un conducteur intérieur, appelé **âme**, de rayon a et d'un conducteur extérieur, d'épaisseur négligeable, de rayon b . Entre ces deux conducteurs se trouve un matériau diélectrique de permittivité relative ϵ_r . On caractérise ce câble par deux grandeurs linéiques :

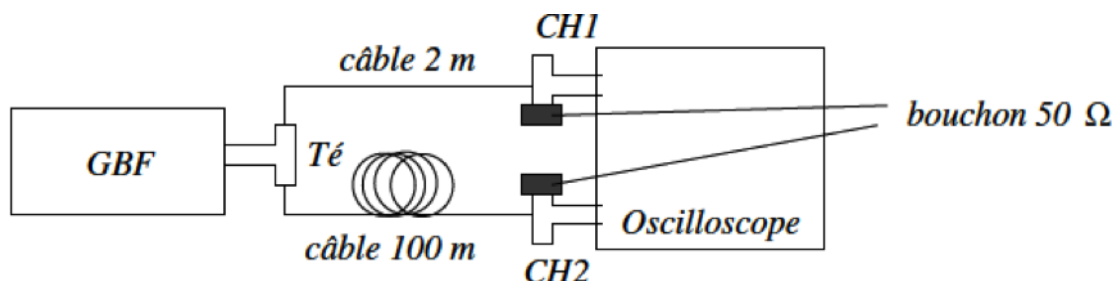
- sa capacité par unité de longueur : $C_u = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(b/a)}$

- son inductance par unité de longueur : $L_u = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$
- la célérité de l'onde dans ce milieu est $c = \sqrt{\frac{1}{L_u C_u}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$ avec c_0 la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide ;
- la résistance caractéristique de la ligne est $R_C = \sqrt{\frac{L_u}{C_u}} = 50\Omega$
- Le coefficient de réflexion en bout de ligne (rapport des amplitudes des ondes incidente et réfléchie, en $z = L$, le câble étant fermé par une résistance R) s'écrit $r = \frac{Z_c - Z}{Z_c + Z}$

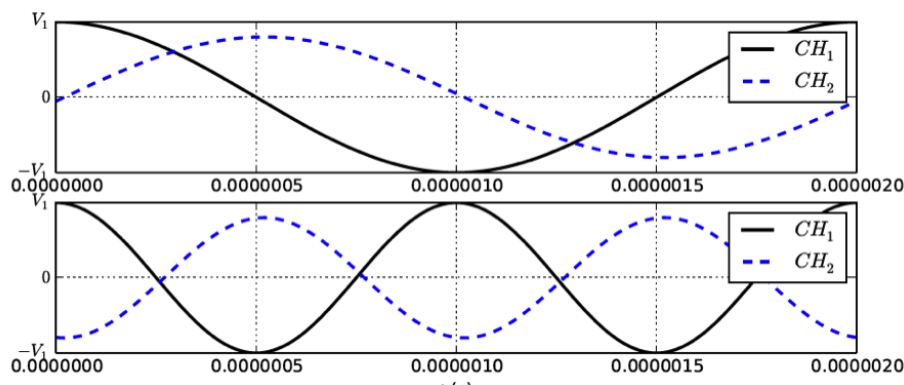
4 Expériences :

4.1 Vitesse de propagation dans le câble :

Le GBF fournit un signal sinusoïdal. On recueille sur l'oscilloscope le signal délivré par le GBF (câble de 2 m) et le signal après propagation dans le câble coaxial de 100 m. Chaque câble coaxial est branché à l'oscilloscope par l'intermédiaire d'un Té muni d'un bouchon 50Ω .



Les résultats des enregistrements sont reproduits ci-dessous pour une fréquence de 500 kHz puis 1 MHz :



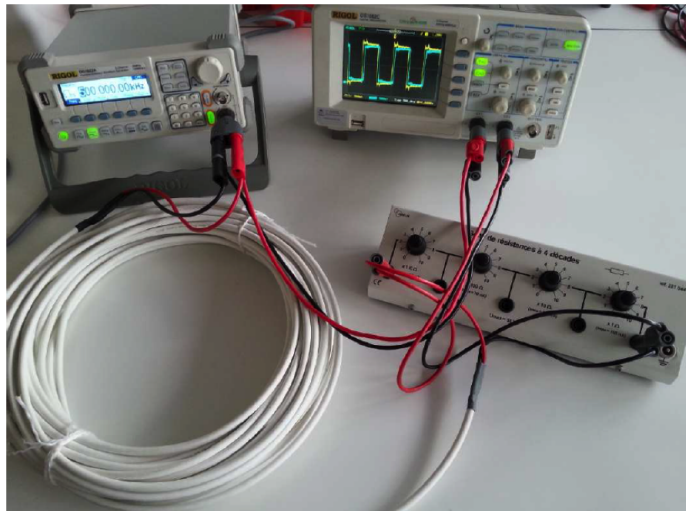
1. Déterminer v_{exp} la célérité des ondes électromagnétiques dans le câble.
2. La célérité dépend-elle de la fréquence ? Conclusion.
3. Déterminer la longueur d'onde des ondes dans le câble. Conclusion.
4. Théoriquement, on a montré que l'onde se propage à la célérité $c_{th} = \frac{1}{\sqrt{L_u C_u}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$.
Comparer les valeurs théorique et expérimentale.

4.2 Réflexion sur une impédance :

4.2.1 Choix du signal et montage :

Le G.B.F. est ici utilisé en générateur d'impulsion, c'est-à-dire qu'il délivre une tension crête à crête avec un rapport cyclique faible, ce qui permettra d'identifier clairement le signal. Pour générer ce signal, nous allons utiliser un GBF qui délivre une tension en crête à crête.

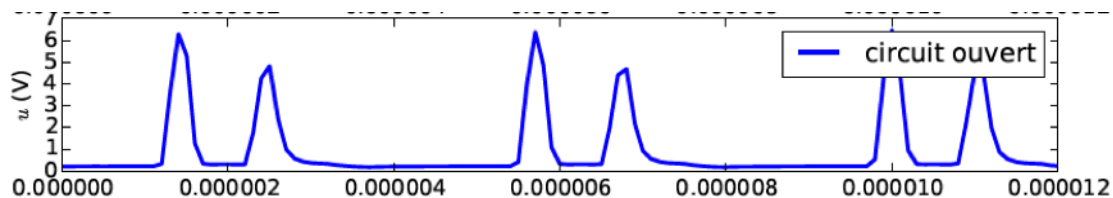
- Régler le GBF pour qu'il délivre une tension en crête de valeur minimale 0V de fréquence 500 kHz, avec $U_{cc} = 4V$ et une tension de décalage (Offset) de +2 V.
- Brancher une extrémité du câble coaxial à la sortie du GBF.
- Brancher la boîte à décade de résistances à l'autre extrémité du câble coaxial.
- Brancher la voie 1 de l'oscilloscope à la sortie du GBF et la voie 2 sur la boîte à décade.



Les figures ci-après représentent la tension en entrée d'un câble de 100 m de long soumis à des impulsions pour différentes valeurs de l'impédance terminale.

4.2.2 Circuit ouvert :

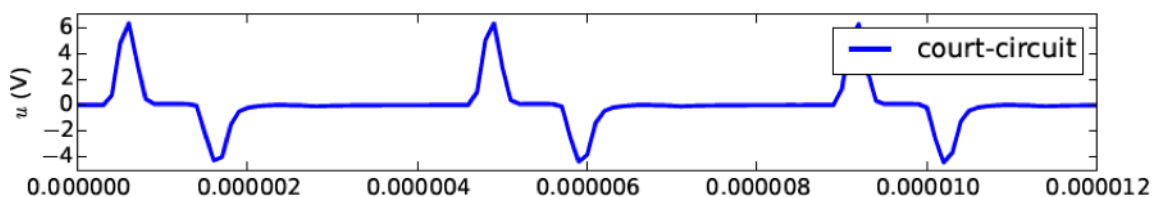
Régler $R \rightarrow \infty$ (circuit ouvert). Représenter ce qui est vu sur l'écran (indiquer les calibres!).



Calculer $r = \left| \frac{Z_c - Z}{Z_c + Z} \right|$. Interpréter le signal sur la voie 1 : pourquoi voit-on plusieurs impulsions ? Interpréter l'existence du signal détecté par la voie 2. On pourra repérer les signaux en légendant les courbes ci-dessus.

4.2.3 Court-circuit :

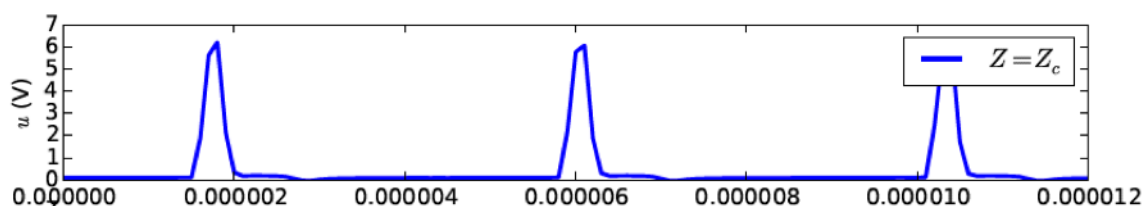
Régler $R = 0$ (court-circuit). Représenter ce qui est vu sur l'écran.



Calculer $r = \left| \frac{Z_c - Z}{Z_c + Z} \right|$. Que voit-on sur la voie 2 ? Interpréter le deuxième signal qui apparaît sur la voie 1, quelle est son amplitude ? On pourra repérer les signaux en légendant les courbes ci-dessus.

4.2.4 Adaptation d'impédance :

Augmenter progressivement la valeur de R à partir de 0. Observer le premier écho : noter la valeur de R lorsque le premier écho disparaît.



En déduire une valeur expérimentale de Z_c , avec son incertitude.

4.3 Comparaison aux données constructeur :

4.3.1 Résultats expérimentaux :

- Déterminer, à partir des mesures précédentes, la valeur de la permittivité $\varepsilon = n^2$ de l'isolant du câble coaxial.
- À partir des valeurs expérimentales, obtenues de la célérité de propagation et de l'impédance caractéristique, constater les valeurs de C_{exp} et L_{exp} du câble coaxiale.
- Calculer les incertitudes.

4.3.2 Résultats théoriques :

Dans le cas d'un câble coaxial cylindrique de longueur infinie, on montre que la capacité linéique et l'inductance linéique sont données par :

$$C_u = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln(b/a)} \quad \text{et} \quad L_u = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$$

Avec $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$, $\varepsilon_r = 2,25$ la permittivité relative du polyéthylène et $b/a = 3,6$; a et b étant les rayons des deux cylindres de cuivre constituant le câble.

- Déterminer les valeurs théoriques de C_u et L_u et comparer aux mesures.

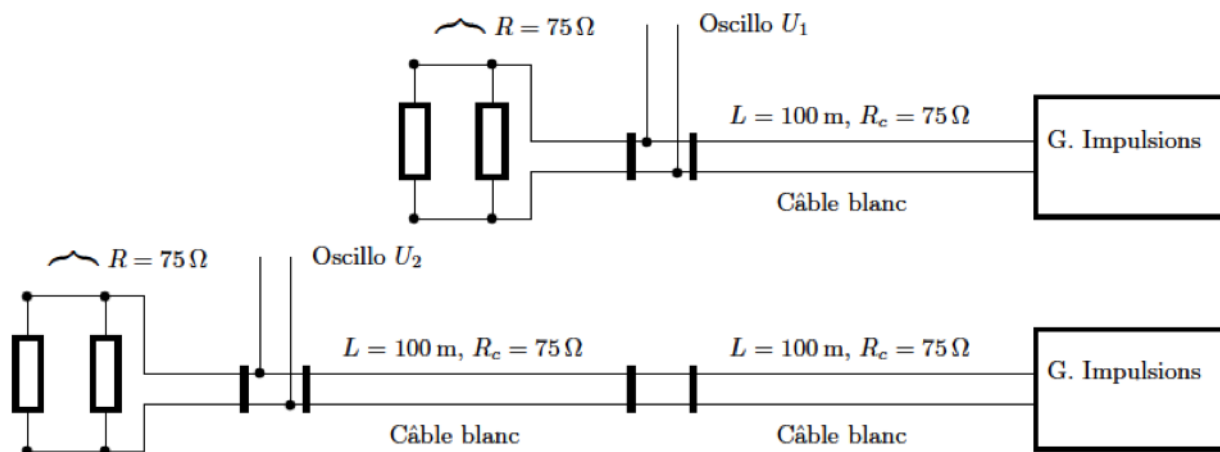
4.4 Atténuation :

En réalité le câble coaxial est un peu résistif. Cela entraîne des pertes et une atténuation progressive du signal. On rappelle que le vecteur d'onde s'écrit dans le cas général $k = k' + ik''$ où k' et k'' sont des réels. On étudie, ici, l'atténuation sur le signal de type impulsion utilisé précédemment. Le coefficient d'atténuation $|k''|$ est exprimé ci-dessous ainsi que l'atténuation A_{tt} en décibel par kilomètre :

$$|k''| = \frac{1}{L} \ln \frac{U_1}{U_2} \quad \text{et} \quad A_{tt} = 10 \times 20 \log \frac{U_1}{U_2}$$

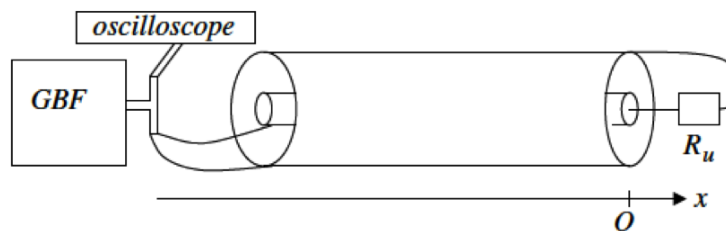
où U_1 est l'amplitude du signal une fois qu'il a parcouru 100m de câble et U_2 celle obtenue une fois qu'il a parcouru 200m de câble. Afin de pouvoir faire cette mesure, on procédera en reliant deux câbles de 100m à la suite l'un de l'autre comme sur le schéma de la figure 9. On travaillera toujours en envoyant une impulsion courte dans le câble.

- Mesurer les amplitudes U_1 et U_2 .
- Mesurer le coefficient d'atténuation $|k''|$. En déduire sa valeur A_{tt} en décibel par kilomètre.
- Commenter le résultat obtenu pour l'atténuation A_{tt} .



4.5 Ondes stationnaires :

Dans cette partie, à l'aide d'un Té, on branche le GBF au câble et à l'oscilloscope et on cherche à observer des ondes stationnaires au sein du câble pour des valeurs bien choisies de la fréquence du GBF.



4.5.1 Extrémité libre, $R_u \rightarrow +\infty$

Expérimentalement, au niveau du GBF, on observe :

fréquence (MHz)	0,5	1	1,5	2
état	noeud	ventre	noeud	ventre

1. La théorie donne :

$$f_{p;\text{noeud}} = (2p + 1) \frac{v}{4L} \quad \text{avec } p \in N \quad \text{et} \quad f_{p;\text{ventre}} = p \frac{v}{2L} \quad \text{avec } p \in N^*$$

Comparer aux valeurs expérimentales.

2. Retrouver par le raisonnement les valeurs théoriques.

4.5.2 Extrémité en court-circuit, $R_u = 0$

Expérimentalement, au niveau du GBF, on observe :

fréquence (MHz)	0,5	1	1,5	2
état	ventre	noeud	ventre	noeud

Interpréter.