TP N.07

Oscillations propres de deux circuits oscillants LC couplés

Objectifs du TP :

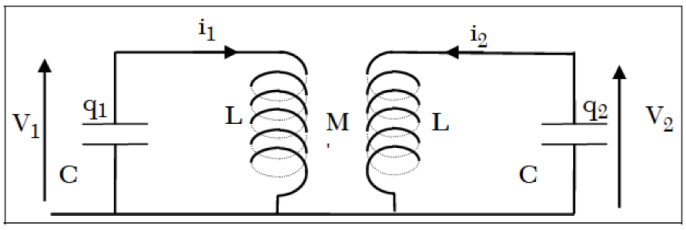
- Déterminer le facteur de couplage d'oscillateurs électriques par **inductance mutuelle**.
- Visualiser sur un oscilloscope la réponse fréquentielle en **régime forcé sinusoïdal**.
- Visualiser pour un couplage faible (ou lâche) le phénomène de **battements**

1 La théorie :

1.1 Oscillations libres ; modes propres :

1.1.1 Couplage inductif d'oscillateurs électriques :

Le couplage est cette fois réalisé par inductance mutuelle entre deux bobines de même auto-inductance L. Du fait de la présence de la mutuelle M,Le système différentiel couplé s'écrit ici :



$$\begin{cases} 0 &= \dfrac{q_1}{C} + L\dfrac{d^2q_1}{dt^2} + M\dfrac{d^2q_2}{dt^2} \\ 0 &= \dfrac{q_2}{C} + L\dfrac{d^2q_2}{dt^2} + M\dfrac{d^2q_1}{dt^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 + k\dfrac{d^2q_2}{dt^2} &= 0 \\ \dfrac{d^2q_2}{dt^2} + \omega_0^2 q_2 + k\dfrac{d^2q_1}{dt^2} &= 0 \end{cases} \qquad Avec \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} = \frac{M}{L}$$

1.1.2 Découplage du système linéaire différentiel :

On cherche des solutions sinusoïdales en $q_1(t)$ et $q_2(t)$. Pour cela, on cherche à découpler le système différentiel initial.

La simplicité et la symétrie du système suggère de poser : $\begin{cases} S(t) &= q_1(t) + q_2(t) \\ D(t) &= q_2(t) + q_1(t) \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2S}{dt^2} + \omega_s^2 S &= 0 \\ \dfrac{d^2D}{dt^2} + \omega_d^2 D &= 0 \end{cases} \qquad avec \quad \omega_s = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \quad et \quad \omega_d = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}$$

Les pulsations ω_s et ω_d sont appelées **pulsations propres** du système.

1.1.3 Modes propres :

D'après les conditions initiales : $q_1(t=0) = q_0$; $q_2(t=0) = 0$ et $\dot{q}_1(t=0) = 0$; $\dot{q}_2(t=0) = 0$.

Les solutions sinusoïdales en S(t) et D(t) s'écrivent : $\begin{cases} S(t) &= q_0\cos(\omega_s t) \\ D(t) &= q_0\cos(\omega_d t) \end{cases}$

En revenant aux variables initiales : $q_1(t) = \dfrac{S(t)+D(t)}{2}$ $\quad et \quad$ $q_2(t) = \dfrac{S(t)-D(t)}{2}$

$$\begin{cases} q_1(t) &= \dfrac{q_0}{2}(\cos(\omega_s t) + \cos(\omega_d t)) \\ q_2(t) &= \dfrac{q_0}{2}(\cos(\omega_s t) - \cos(\omega_d t)) \end{cases}$$

La solution générale du système différentiel couplé linéaire est une combi-naison linéaire des deux modes propres d'oscillations.

Si de plus, le système est excité initialement suivant l'un de ses modes pro-pres, il y reste par la suite.

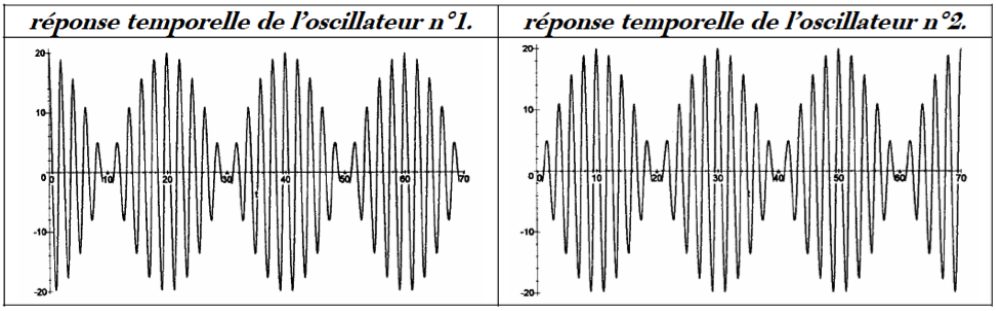
1.2 Cas d'un couplage faible (ou lâche) : battements.

Dans le cas où le couplage entre les deux oscillateurs est faible, les deux pulsations propres sont voisines.

$$\omega_s = \omega_0(1 - \frac{k}{2}) \quad et \quad \omega_d = \omega_0(1 + \frac{k}{2})$$

La réponse temporelle est alors : $\begin{cases} q_1(t) &= q_0 \cos(\frac{\omega_s + \omega_d}{2}t).\cos(\frac{\omega_s - \omega_d}{2}t) \\ q_2(t) &= q_0 \sin(\frac{\omega_s + \omega_d}{2}t).\sin(\frac{\omega_s - \omega_d}{2}t) \end{cases}$ Il apparaît ainsi deux pulsations, de valeurs très différentes : $\begin{cases} \frac{\omega_s + \omega_d}{2} &= \omega_0 \\ \frac{\omega_s - \omega_d}{2} &= \frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1(t) &= \underbrace{q_0 \cos(\frac{\Delta\omega}{2}t)}_{enveloppe}.\cos(\omega_0 t) \\ q_2(t) &= \underbrace{q_0 \sin(\frac{\Delta\omega}{2}t)}_{enveloppe}.\sin(\omega_0 t) \end{cases}$$



On a obtenu ce qu'on nomme des battements, la pulsation ω_B étant appelée pulsation de battements de période :

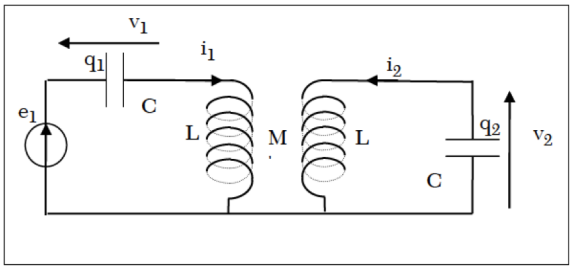
$$\boxed{T_B = \frac{2\pi}{\omega_B} = \frac{2\pi}{\omega_s - \omega_d} = \frac{2\pi}{k\omega_0} \backsimeq \frac{T_0}{k}}$$

1.3 Oscillations forcées en régime harmonique :

1.3.1 Cas du couplage d'oscillateurs électriques par inductance mutuelle :

On considère le montage de la figure ci-contre. Les chargess $q_1(t)$ et $q_2(t)$ vérifient le système différentiel couplé :

$$\begin{cases} e_1(t) &= \frac{q_1}{C} + L\frac{d^2q_1}{dt^2} + M\frac{d^2q_2}{dt^2} \\ 0 &= \frac{q_2}{C} + L\frac{d^2q_2}{dt^2} + M\frac{d^2q_1}{dt^2} \end{cases}$$



On étudie la réponse de ce système en régime harmonique forcé, quand la tension $e_1(t)$ délivrée par le GBF est sinusoïdale de pulsation ω, qu'on écrit : $e_1(t) = E.cos(\omega t)$

1.4 Réponse fréquentielle en régime forcé sinusoïdal :

On cherche les charges q_1 et q_2 comme des fonctions sinusoïdales de pulsation ω. Le système différentiel étant linéaire, on peut utiliser la méthode complexe pour le résoudre, en associant aux

tensions les nombres complexes.
La résolution du système différentiel revient alors à la résolution algébrique dans le corps des complexes du système :

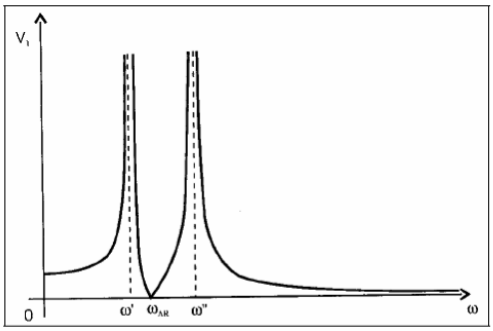
$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{E_1}{L}\exp(j\omega t) & = & \omega_0^2 q_1 - \omega^2 q_1 - k\omega^2 q_2 \\ 0 & = & \omega_0^2 q_2 - \omega^2 q_2 - k\omega^2 q_1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{E_1}{L}\exp(j\omega t) & = & (\omega_0^2 - \omega^2) q_1 - k\omega^2 q_2 \\ q_2 & = & \dfrac{k\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} q_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} q_1(t) & = & \dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - k^2\omega^4}\dfrac{E_1}{L}\exp(j\omega t) \\ q_2(t) & = & \dfrac{k\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - k^2\omega^4}\dfrac{E_1}{L}\exp(j\omega t) \end{array}\right.$$

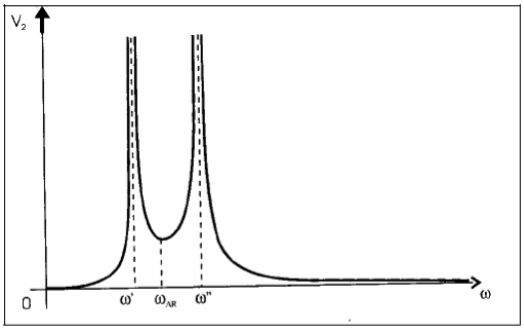
D'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} q_1(t) & = & Q_1(\omega)\exp(j\omega t) \\ q_2(t) & = & Q_2(\omega)\exp(j\omega t) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} Q_1(\omega) & = & \dfrac{\dfrac{E_1}{L}(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - k^2\omega^4} \\ Q_2(\omega) & = & \dfrac{\dfrac{E_1}{L}\ k\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - k^2\omega^4} \end{array}\right.$$

- Le dénominateur s'annule pour les pulsations ω vérifiant : $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - k^2\omega^4 = 0$
  qui donne : $\omega = \omega_s \quad ou \quad \omega = \omega_d$.
  Quand la pulsation de l'excitateur est égale à l'une des pulsations propres du système couplé, celui-ci entre en résonance, avec une amplitude des répon-ses de chaque oscillateur tendant vers l'infini, dans le cas où l'on a négligé tou-te cause d'amortissement.
- Il existe entre les deux résonances une pulsation, notée ω_0 appelée pulsation d'anti-résonance , donnant une réponse minimale au système : $Q_1(\omega) = 0$ et $Q_2(\omega)$ est minimale .



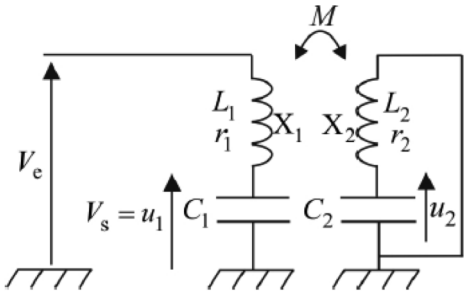
Réponse fréquentielle $V_1(\omega)$ de l'oscillateur 1



Réponse fréquentielle $V_2(\omega)$ de l'oscillateur 2

2 Manipulation :

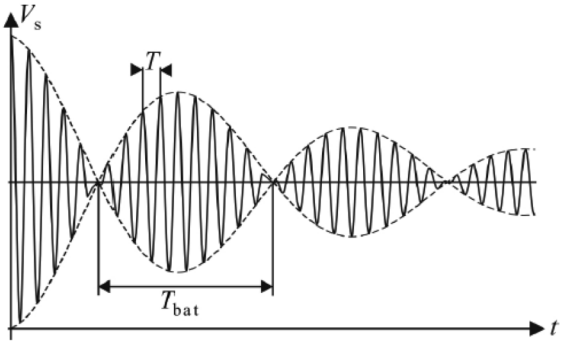
2.1 Manipulation 1 :



- Réaliser le montage ci-contre avec $C_1 = C_2 = 10\ nF$ et les bobines de 1000 spires X_1 et X_2 accolées.
- Le signal V_e fourni par le G.B.F est rectangulaire de fréquence 100 Hz très inférieure à la fréquence propre $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ des

oscillations non amorties de chaque oscillateur (de l'ordre de 8 kHz), afin de pouvoir observer les oscillations propres du système.

- Observer le signal $V_s(t)$ à l'oscilloscope et l'amortissement des oscillations dû aux résistances des bobines.
- Si on considère $L = L_1 = L_2$ et $r_1 = r_2 \simeq 0$, on est en présence de deux circuits LC identiques couplés par mutuelle inductance.Déterminer expérimentalement la fréquence f_0, la comparer à la valeur théorique.
- Le facteur de couplage étant assez faible,on observe des battements.



La période des oscillations est donnée par $T \simeq T_0$.Déterminer la période de battements T_{bat}.

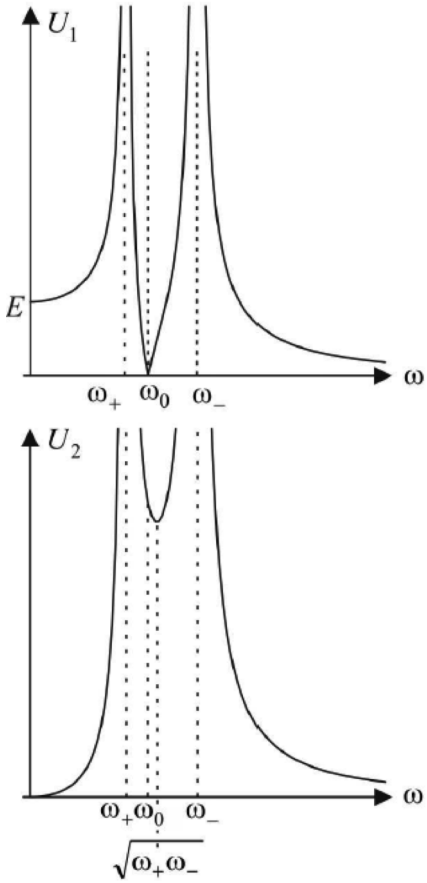
- En déduire la valeur approchée de k.
- Calculer le coefficient d'inductance mutuelle M .

2.2 Manipulation 2 :

- On reprend le montage précédent, mais le G.B.F délivre maintenant un signal sinusoïdal de pulsation réglable et de faible amplitude E (les résonance sont aiguës).
- Visualiser U_1 et de U_2 à l'oscilloscope.
- Vérifier qu'il y a deux résonances et une anti-résonance .
- Avec toujours $C_1 = C_2 = C$, $L_1 = L_2 = L$ et $r_1 = r_2 \simeq 0$, on a en régime sinusoïdal forcé :

$$\begin{cases} U_1(\omega) &= \dfrac{\dfrac{E_1}{LC}(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - k^2\omega^4} \\ U_2(\omega) &= \dfrac{\dfrac{E_1}{LC}\ k\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - k^2\omega^4} \end{cases}$$

Les amplitudes de U_1 et de U_2 sont donc infinies pour $\omega_+ = \omega_d$ et pour $\omega_- = \omega_s$, U_1 passe par un minimum nul pour ω_0 , U_2 passe par un minimum non nul pour $\sqrt{\omega_-\omega_+} \simeq \omega_0$ (le facteur de couplage étant assez faible).



- La présence de résistances r_1 et r_2 faibles mais non nulles fait que les amplitudes de U_1 et de U_2 sont finies lors des résonances.Montrer qu'elles sont pratiquement égales à $\dfrac{E}{(r_1 + r_2)C\omega}$ pour des pulsations très proches de ω_+ *et* ω_-
- mesurer les fréquences correspondantes : $f_-; f_+$ et f_0. En déduire $k \simeq \dfrac{f_+ - f_-}{f_0}$
- Réaliser l'analyse spectrale des réponses impulsionnelles U_1 et U_2 afin de retrouver les valeurs de f_+, f_- et f_0 .