

Plans courts leçons MG17

Miguel Acosta

2017

Table des matières

0	Mode d'emploi	3
101	Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.	4
102	Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.	5
103	Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.	6
104	Groupes finis. Exemples et applications.	7
105	Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.	7
106	Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.	8
107	Représentations et caractères d'un groupe fini sur un \mathbb{C} -espace vectoriel. Exemples.	9
108	Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.	10
110	Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.	11
120	Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.	11
121	Nombres premiers. Applications.	12
122	Anneaux principaux. Applications.	13
123	Corps finis. Applications.	14

125	Extensions de corps. Exemples et applications.	14
126	Exemples d'équations diophantiennes.	15
141	Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.	16
142	Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.	17
144	Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications	17
150	Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.	18
151	Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.	19
152	Déterminant. Exemples et applications.	20
153	Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.	21
154	Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.	21
155	Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.	22
156	Exponentielle de matrices. Applications.	23
157	Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.	23
158	Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.	24
159	Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.	25
160	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).	26
161	Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.	26
162	Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.	27

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.	28
171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.	29
181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.	30
182 Applications des nombres complexes à la géométrie.	30
183 Utilisation des groupes en géométrie.	31
190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.	32
Références	32

0 Mode d'emploi

Présentation

Dans ce document, vous trouverez des versions courtes des plans des leçons d'algèbre et géométrie que j'ai préparés en 2017 pour les oraux de l'agrégation de mathématiques. Je remercie très chaleureusement Joël Gay, Guillaume Roux et Gabriel Pallier, qui m'ont permis de travailler avec les plans et les développements qu'ils avaient préparés pour des sessions précédentes. Une bonne partie des plans présentés ici sont inspirés de ces derniers.

La leçon d'algèbre et géométrie

Une des épreuves de l'oral de l'agrégation de mathématiques en 2017 est la leçon d'algèbre et géométrie. Une liste de leçons est disponible, et le candidat tire au hasard un couplage avec deux titres : il en choisit un. Il a alors trois heures pour préparer un plan de leçon en trois pages, qui comporte au moins deux développements. Lors du passage devant le jury, le candidat a six minutes pour présenter son plan et proposer ses développements. Le jury choisit alors un des développements et le candidat dispose de 15 minutes pour le mener à bien au tableau (sans notes !). Il suit alors une séquence de questions et d'entretien avec le jury qui dure 25 minutes environ. Tout est bien décrit dans le rapport du jury. J'encourage vivement sa lecture à tous les candidats et les préparateurs.

La préparation en amont

Pour être prêt pour l'épreuve orale, il faut beaucoup travailler en amont. La préparation d'une leçon ne s'improvise pas : il faut avoir réfléchi auparavant aux grandes lignes d'un

plan, à des exemples pertinents, à l'adéquation des développements, aux oublis à ne pas faire...

Tout de même, il n'est pas raisonnable d'apprendre par cœur des plans entiers pour toutes les leçons. L'exercice consistant à produire un plan de leçon, le travail de mémorisation doit se concentrer sur *savoir faire un plan* plutôt que savoir les réciter. Il est crucial de savoir à quels livres faire appel pour travailler chaque leçon : en préparant sérieusement, la plupart des livres auxquels on fait appel viennent naturellement à l'esprit.

Ces plans

Ces plans courts sont le fruit de ma préparation à l'agrégation lors du premier semestre de 2017 à l'Université de Lorraine. C'est sur ces grandes lignes des plans qu'a porté mon travail de mémorisation pour les oraux. J'ai utilisé comme sources les plans de Joël Gay, Guillaume Roux et Gabriel Pallier, ainsi que des plans trouvés sur internet. Ils sont orientés selon mes goûts et mes points forts, ainsi que dans l'esprit du rapport du jury de l'année 2016 (en tout cas c'était l'idée). Pour chaque leçon, il y a des références bibliographiques, des développements que je trouve adaptés et un plan court.

J'encourage ceux qui voudraient prendre comme repère ces plans pour travailler à les adapter à leurs goûts et à la direction donnée par le rapport du jury. Une partie importante du travail de préparation consiste à s'approprier les plans !

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Oubli : actions de groupes sur des espaces de matrices (conjugaison, multiplication à gauche, congruence, équivalence...)

Références

[Ale99], [Com98], [Per98]

Développements

1. Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré [Ale99]
2. \mathcal{A}_5 est l'unique groupe simple d'ordre 60 [Per98]
3. Isométries du cube [CG13]
4. Réciprocité quadratique par les formes quadratiques [CG13]

- (c) Similitudes (définition comme sous-groupe du groupe affine, action 2-transitive. Pour $n = 2$, l'angle est un invariant total pour l'action sur les triplets)
 - (d) Stabilisateurs (triangle équilatéral, carré, DEV cube et tétraèdre)
3. Groupes et géométrie projective (définition de \mathbb{CP}^1 , action de $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ par homographies, action 3-transitive, birapport, invariant total pour les quadruplets. Alignés ou cocycliques ssi le birapport est réel. Action conforme, action sur les cercles et les droites. Application : 4 points de l'intersection de 4 cercles sont cocycliques. Définition de \mathbb{H} , stable par $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. DEV : Action du groupe modulaire) Distance sur \mathbb{H} et isométries ?

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Références

[GK11], [BLRA15], [Per98], [Ale99]

Développements

1. Dénombrement des polynômes irréductibles sur \mathbb{F}_q [FG94]
2. Réciprocité quadratique par les formes quadratiques [CG13]

Plan court

1. Dénombrement d'ensembles finis (bijections, combinaisons, principe des tiroirs, triangle de Pascal, formule du crible, identités combinatoires, "biyección de Emerson")
2. Autour des corps finis (dénombrement de GL_n , SL_n , sous-groupe de Sylow des matrices TS, DEV : polynômes irréductibles, \mathbb{F}_q^\times est cyclique ; la forme quadratique $ax^2 + by^2$ prend la valeur 1 ; classification des formes quadratiques)
3. Actions de groupes et dénombrement (rappels : définition, orbite, stabilisateur. Formules de Burnside, équation aux classes. Application : coloriage du cube. DEV : réciprocité quadratique)
4. Autres techniques
 - (a) Séries génératrices (définition, Fibonacci, Catalan)
 - (b) Probabilités (probabilités discrètes, méthode probabiliste, nombres de Ramsey)

Références

[Ale99] Michel ALESSANDRI : *Thèmes de géométrie : groupes en situation géométrique*. Agrégation de mathématiques. Dunod, Paris, 1999.

- [Aud98] Michèle AUDIN : *Géométrie*. Belin Espaces 34, Paris Montpellier, 1998.
- [BLRA15] Francette BORIES-LONGUET et Jorge L. RAMÍREZ ALFONSÍN : *Graphes et combinatoire : cours avec 210 exercices corrigés*. Ellipses, DL 2015, Paris, France, DL 2015, cop. 2015.
- [BMP05] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ : *Objectif agrégation*. H&K, Paris, deuxième édition édition, 2005.
- [Cal98] Josette CALAIS : *Éléments de théorie des groupes*. Presses universitaires de France, Paris, France, 1998.
- [Car89] Jean-Claude CARREGA : *Théorie des corps : la règle et le compas*. Hermann,, Paris, France, 1989.
- [CG13] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries*. Calvage & Mounet, Paris, 2013.
- [Col11] Pierre COLMEZ : *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Éd. de l'École polytechnique, Palaiseau, nouvelle édition édition, 2011.
- [Com98] François COMBES : *Algèbre et géométrie : agrégation, CAPES, licence, maîtrise*. CAPES - agrégation. Bréal, Rosny, 1998.
- [Dem97] Michel DEMAZURE : *Cours d'algèbre : primalité, divisibilité, codes*. Cassini, Paris, 1997.
- [Dum99] Laurent DUMAS : *Modélisation à l'oral de l'agrégation : calcul scientifique*. Ellipses, impr. 1999, Paris, France, 1999.
- [Eid09] Jean-Denis EIDEN : *Géométrie analytique classique*. Numéro 103 de Tableau noir. Calvage & Mounet, Paris, 2009.
- [FG94] Serge FRANCINOÛ et Hervé GIANELLA : *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : algèbre 1*. Agrégation de mathématiques. Masson, Paris Milan Barcelone, 1994.
- [FGN07] Serge FRANCINOÛ, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures. Algèbre. Tome I*. Cassini, Paris, France, DL 2007.
- [FGN09] Serge FRANCINOÛ, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures. Algèbre. Tome II*. Cassini, DL 2009, Paris, France, DL 2009, cop. 2009.
- [FGN13] Serge FRANCINOÛ, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures. Algèbre. Tome III*. Cassini, impr. 2013, Paris, France, impr. 2013, cop. 2013.
- [GK11] Olivier GARET et Aline KURTZMANN : *De l'intégration aux probabilités*. Références sciences. Ellipses, Paris, 2011.

- [Gob01] Rémi GOBLOT : *Algèbre commutative : cours et exercices corrigés*. Dunod, impr. 2001.
- [Gou09] Xavier GOURDON : *Les maths en tête : Algèbre*. Ellipses Marketing, Paris, 2e édition édition, janvier 2009.
- [Goz09] Ivan GOZARD : *Théorie de Galois*. Ellipses, DL 2009.
- [Lav98] Guy LAVILLE : *Géométrie pour le CAPES et l'Agrégation*. Ellipses, impr. 1998, Paris, France, impr. 1998, cop. 1998.
- [Lir11] François LIRET : *Arithmétique*. Dunod, impr. 2011, Paris, France, impr. 2011, cop. 2011.
- [MM16] Roger MANSUY et Rached MNEIMNÉ : *Algèbre linéaire : réduction des endomorphismes : cours & exercices corrigés : licence mathématiques, classes préparatoires scientifiques*. Vuibert, Paris, France, 2016.
- [MT86] Rached MNEIMNÉ et Frédéric TESTARD : *Introduction à La Théorie Des Groupes de Lie Classiques*, volume 41. Hermann, 1986.
- [Nou01] Ivan NOURDIN : *Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie : agrégation de mathématiques*. Dunod, Paris, France, 2001.
- [Per98] Daniel PERRIN : *Cours d'Algèbre Maths AGREG*. Ellipses Marketing, Paris, mai 1998.
- [Pey04] Gabriel PEYRÉ : *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier : niveau M1*. Mathématiques à l'université. Ellipses, Paris, 2004.
- [Rau00] Gérard RAUCH : *Les groupes finis et leurs représentations*. Ellipses, DL. 2000, Paris, France, 2000.
- [RDOD89] Edmond RAMIS, Claude DESCHAMPS, Jacques ODOUX et Jean-Yves DUPONT : *Cours de mathématiques spéciales : classes préparatoires et enseignement supérieur (1er cycle)*. Masson, Paris Milan Barcelone [etc.], 1989.
- [Rou03] François ROUVIÈRE : *Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Numéro 4 de Enseignement des mathématiques. Cassini, Paris, 2e édition, revue et augmentée édition, 2003.
- [Sam71] Pierre SAMUEL : *Théorie algébrique des nombres*. Collection Méthodes. Hermann, Paris, 2e édition revue et corrigée édition, 1971.
- [Ser70] Jean-Pierre SERRE : *Cours d'arithmétique*. Numéro 2 de SUP. Le Mathématicien. Presses universitaires de France, Paris, 1970.
- [Ser98] Jean-Pierre SERRE : *Représentations linéaires des groupes finis*. Collection Méthodes. Hermann, Paris, 5ème édition, corrigée et augmentée de nouveaux exercices édition, 1998.

- [Ser01] Denis SERRE : *Les matrices : théorie et pratique*. Masson Sciences. Dunod, Paris, 2001.
- [Tau99] Patrice TAUVEL : *Agrégation de mathématiques. Cours d'algèbre*. CAPES-agrég. Dunod, Paris, 1999.
- [Tau01] Patrice TAUVEL : *Cours de géométrie : Agrégation de mathématiques*. Dunod, Paris, France, impr. 2001.
- [Zav13] Maxime ZAVIDOVIQUE : *Un max de maths : problèmes pour agrégatifs et mathématiciens en herbe ou confirmés*. Numéro 109 de Im-et-Ker. Calvage & Mounet, Paris, 2013.