Plans courts leçons AP17

Miguel Acosta

2017

Table des matières

0 Mode d'emploi **3**

201 Espaces de fonctions ; exemples et applications. **4**

202 Exemples de parties denses et applications. **5**

203 Utilisation de la notion de compacité. **6**

204 Connexité. Exemples et applications. **7**

205 Espaces complets. Exemples et applications. **7**

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications. **8**

208 Espaces vectoriels normés, applications linaires continues. Exemples. **9**

209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications. **10**

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications. **10**

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie. **11**

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications. **12**

218 Applications des formules de Taylor. **12**

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications. **13**

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2. 14

221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications. 14

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires. 15

223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications 16

224 Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions. 17

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations. 17

228 Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications. 18

229 Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications. 19

230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples. 20

233 Méthodes itératives en analyse numérique matricielle. 20

234 Espaces L^p, $1 \leq p \leq \infty$. 21

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales 22

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables. 22

239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications. 23

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples. 24

243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications. 24

245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications. 25

246 Séries de Fourier. Exemples et applications. 26

250 Transformation de Fourier. Applications. **27**

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse. **28**

260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire. **29**

261 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications. **29**

262 Mode de convergence d'une suite de variables aléatoires. Exemples et applications. **30**

263 Variables aléatoires à densité. Exemples et applications. **31**

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications. **31**

Références **32**

0 Mode d'emploi

Présentation

Dans ce document, vous trouverez des versions courtes des plans des leçons d'analyse et probabilités que j'ai préparés en 2017 pour les oraux de l'agrégation de mathématiques. Je remercie très chaleureusement Joël Gay, Guillaume Roux et Gabriel Pallier, qui m'ont permis de travailler avec les plans et les développements qu'ils avaient préparés pour des sessions précédentes. Une bonne partie des plans présentés ici sont inspirés de ces derniers.

La leçon d'analyse et probabilités

Une des épreuves de l'oral de l'agrégation de mathématiques en 2017 est la leçon d'analyse et probabilités. Une liste de leçons est disponible, et le candidat tire au hasard un couplage avec deux titres : il en choisit un. Il a alors trois heures pour préparer un plan de leçon en trois pages, qui comporte au moins deux développements. Lors du passage devant le jury, le candidat a six minutes pour présenter son plan et proposer ses développements. Le jury choisit alors un des développements et le candidat dispose de 15 minutes pour le mener à bien au tableau (sans notes !). Il suit alors une séquence de questions et d'entretien avec le jury qui dure 25 minutes environ. Tout est bien décrit dans le rapport du jury. J'encourage vivement sa lecture à tous les candidats et les préparateurs.

La préparation en amont

Pour être prêt pour l'épreuve orale, il faut beaucoup travailler en amont. La préparation d'une leçon ne s'improvise pas : il faut avoir réfléchi auparavant aux grandes lignes d'un plan, à des exemples pertinents, à l'adéquation des développements, aux oublis à ne pas faire...

Tout de même, il n'est pas raisonnable d'apprendre par cœur des plans entiers pour toutes les leçons. L'exercice consistant à produire un plan de leçon, le travail de mémorisation doit se concentrer sur *savoir faire un plan* plutôt que savoir les réciter. Il est crucial de savoir à quels livres faire appel pour travailler chaque leçon : en préparant sérieusement, la plupart des livres auxquels on fait appel viennent naturellement à l'esprit.

Ces plans

Ces plans courts sont le fruit de ma préparation à l'agrégation lors du premier semestre de 2017 à l'Université de Lorraine. C'est sur ces grandes lignes des plans qu'a porté mon travail de mémorisation pour les oraux. J'ai utilisé comme sources les plans de Joël Gay, Guillaume Roux et Gabriel Pallier, ainsi que des plans trouvés sur internet. Ils sont orientés selon mes goûts et mes points forts, ainsi que dans l'esprit du rapport du jury de l'année 2016 (en tout cas c'était l'idée). Pour chaque leçon, il y a des références bibliographiques, des développements que je trouve adaptés et un plan court.

J'encourage ceux qui voudraient prendre comme repère ces plans pour travailler à les adapter à leurs goûts et à la direction donnée par le rapport du jury. Une partie importante du travail de préparation consiste à s'approprier les plans !

201 Espaces de fonctions ; exemples et applications.

Références

[QZ13], [Gou08], [Bré05], [Rud95], [Bon94]

Développements possibles

1. Densité des polynômes orthogonaux dans $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ [BMP05]
2. Théorème de Fischer-Riesz [Bré05]
3. Inversion de Fourier [GK11]
4. Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente [Gou08]

Plan court

1. Conditions de régularité

(a) Fonctions continues sur un compact (définition, norme sup, espace complet, $\mathcal{C}_b^0(\Omega)$, support, $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$, Ascoli, densité des polynômes et des polynômes trigonométriques)

(b) Fonctions lisses (espaces $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, topologie et métrique)

(c) Fonctions holomorphes (rappel et définition, convergence sur les compacts, Montel)

2. Applications linéaires continues (définition/proposition, norme subordonnée, cas des Banach, théorème de Baire, DEV : Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente ; les inclusions des espaces de la partie 1 sont continues)
3. Conditions d'intégrabilité

(a) Espaces L^p (définition de L^p, L^∞, $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense, inclusion si mesure finie, Hölder et Minkowski, DEV : Riesz-Fischer)

(b) L'espace $L^2(\Omega)$ (produit scalaire, c'est un espace de Hilbert, ex : séries de Fourier et base hilbertienne, DEV : Densité des polynômes orthogonaux)

4. L'espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^d)$ (Normes N_p, définition, inclusions et densité, transformée de Fourier sur L^1, DEV : inversion de Fourier, prolongement à L^1, Plancherel)

202 Exemples de parties denses et applications.

Références

[Gou08], [Pom94], [Bré05], [Bon94]

Développements possibles

1. Polynômes de Bernstein [GK11]+[QZ13]
2. Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente [Gou08]
3. Densité des polynômes orthogonaux dans $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ [BMP05]

Plan court

1. Rappels, premières propriétés (def densité, deux fonctions continues qui coïncident sur une partie dense sont égales, exemples, sous-groupes de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{U}$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est dense : application $\chi_{AB} = \chi_{BA}$; les diagonalisables sont denses sur $\mathbb{C}$ et pas sur $\mathbb{R}$; Dunford n'est pas continu)
2. Densité et complétude

(a) Prolongement, espaces de Banach (rappel complétude, prolongement de fonctions unif continues, ex : Intégrale de Riemann, thm de Baire et applications, DEV : Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente)

264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Références

[GK11], [Ouv07], [Ouv09], [CGCDM05], [Nou01] ?

Développements possibles

1. Processus de branchement [CGCDM05]
2. Polynômes de Bernstein [GK11]+[QZ13]

Plan court

1. Variables aléatoires discrètes usuelles (définition de v.a. discrète, espérance, variance, moments, exemples et modélisation : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson)
2. Sommes de variables aléatoires discrètes (Rappel : lois des grands nombres, Markov, Bienaymé-Tchebitchev, DEV : Polynômes de Bernstein, Borel-Cantelli, pas de loi sur $\mathbb{N}$ compatible avec la divisibilité, marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$ (biaisée et centrée))
3. Fonctions génératrices, applications (définition, caractérisation de la loi, dérivées et moments, exemples, fonction d'une somme de v.a. DEV : Processus de branchement)

Références

[AM04] Eric Amar et Etienne Matheron : *Analyse complexe.* Numéro 18 de Enseignement des mathématiques. Cassini, Paris, 2004.

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré : *Objectif agrégation.* H&K, Paris, deuxième édition édition, 2005.

[Bon94] Jean-Michel Bony : *Cours d'analyse : édition 1992.* Ecole polytechnique. Département de mathématiques, Palaiseau, 1994.

[Bré05] Haïm Brézis : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.* Sciences Sup. Dunod, Paris, nouvelle présentation 2005 édition, 2005.

[CGCDM05] Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre : *Exercices de probabilités : licence, master, écoles d'ingénieurs.* Cassini, Paris, 2005.

[CLF95] Antoine Chambert-Loir et Stéfane Fermigier : *Exercices de mathématiques pour l'agrégation.* Agrégation de mathématiques. Masson, Paris Milan, 1995.

[DG15] Claire DAVID et Pierre GOSSELET : *Équations aux dérivées partielles : cours et exercices corrigés.* Dunod, Paris, France, 2015.

[Dum99] Laurent DUMAS : *Modélisation à l'oral de l'agrégation : calcul scientifique.* Ellipses, impr. 1999, Paris, France, 1999.

[FGN07] Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS : *Exercices de mathématiques des oraux de l'Ecole polytechnique et des Ecoles normales supérieures. Algèbre. Tome I.* Cassini, Paris, France, DL 2007.

[FGN12] Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures. Analyse. Tome IV.* Cassini, DL 2012, Paris, France, DL 2012, cop. 2012.

[FGN13] Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures. Algèbre. Tome III.* Cassini, impr. 2013, Paris, France, impr. 2013, cop. 2013.

[GK11] Olivier GARET et Aline KURTZMANN : *De l'intégration aux probabilités.* Références sciences. Ellipses, Paris, 2011.

[Gou08] Xavier GOURDON : *Les maths en tête : Analyse.* Ellipses Marketing, Paris, 2e édition édition, février 2008.

[Gou09] Xavier GOURDON : *Les maths en tête : Algèbre.* Ellipses Marketing, Paris, 2e édition édition, janvier 2009.

[GT98] Stéphane GONNORD et Nicolas TOSEL : *Calcul différentiel : thèmes d'analyse pour l'agrégation.* CAPES/Agreg mathématiques. Ellipses, Paris, 1998.

[HL97] Francis HIRSCH et Gilles LACOMBE : *Éléments d'analyse fonctionnelle : cours et exercices.* Masson, Paris Milan Barcelone, 1997.

[HW99] John Hamal HUBBARD et Beverly Henderson WEST : *Équations différentielles et systèmes dynamiques.* Cassini, DL 1999, Paris, France, 1999.

[MT86] Rached MNEIMNÉ et Frédéric TESTARD : *Introduction à La Théorie Des Groupes de Lie Classiques*, volume 41. Hermann, 1986.

[Nou01] Ivan NOURDIN : *Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie : agrégation de mathématiques.* Dunod, Paris, France, 2001.

[Ouv07] Jean-Yves OUVRARD : *Probabilités Tome I, Licence-CAPES.* Cassini, DL 2007, Paris, France, 2007.

[Ouv09] Jean-Yves OUVRARD : *Probabilités Tome II, Master-Agrégation.* Cassini, Paris, France, 2009.

[Pom94] Alain POMMELLET : *Agrégation de mathématiques : cours d'analyse.* Ellipses, Paris, 1994.

[QZ13] Hervé Queffélec et Claude Zuily : *Analyse pour l'agrégation : cours et exercices corrigés.* Dunod, DL 2013, cop. 2013.

[Rou03] François Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Numéro 4 de Enseignement des mathématiques. Cassini, Paris, 2e édition, revue et augmentée édition, 2003.

[Rud95] Walter Rudin : *Analyse fonctionnelle.* Ediscience international, 1995, Paris, France, 1995.

[Rud98] Walter Rudin : *Analyse réelle et complexe : cours et exercices.* Dunod, DL 2009, Paris, France, 1998.

[Ser01] Denis Serre : *Les matrices : théorie et pratique.* Masson Sciences. Dunod, Paris, 2001.

[Tau06] Patrice Tauvel : *Analyse complexe pour la licence 3 : cours et exercices corrigés.* Dunod, DL 2006, Paris, France, 2006.