

I Introduction au domaine de recherche

Structures géométriques sur les variétés de dimension 3

Table des matières

1	Introduction : les variétés de dimension 3	7
2	Structures géométriques	8
3	L'espace hyperbolique	9
3.1	Le modèle du demi-espace	9
3.2	Isométries	10
3.3	Le modèle projectif	11
4	Une structure hyperbolique sur le complémentaire du nœud de 8	12
5	Structures CR-sphériques	14
5.1	Le plan hyperbolique complexe	14
5.2	Isométries	15
5.3	Le bord à l'infini de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$	15
	Références	16



Introduction au domaine de recherche
2012-2013

Structures géométriques sur les variétés de dimension 3

Miguel ACOSTA

Octobre 2013

1 Introduction : les variétés de dimension 3

L'étude des variétés de dimension 3 est un domaine actif où il y a encore beaucoup de questions qui n'ont pas, à l'heure actuelle, de réponse satisfaisante. Plusieurs travaux, notamment ceux de Perelman, ont permis de démontrer dans les années 2000 le théorème de géométrisation de Thurston : il suffit de huit géométries pour décrire les variétés compactes en dimension 3 en les munissant de structures géométriques. Cette preuve et ses conséquences font encore l'objet de plusieurs travaux de recherche.

Une autre motivation pour étudier les variétés de dimension 3 est celle de l'étude des nœuds, et plus généralement celle des entrelacs. Un nœud peut être vu dans \mathbb{R}^3 mais, pour des questions pratiques et de compacité, il est plus souvent considéré dans le compactifié d'Alexandroff de \mathbb{R}^3 , à savoir la sphère \mathbb{S}^3 .

Définition 1.1. Un nœud est un plongement de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{S}^3 .

Définition 1.2. Un entrelacs est un plongement d'un nombre fini de cercles disjoints ($\sqcup_{i=1}^n \mathbb{S}^1$) dans \mathbb{S}^3 .

Exemple 1.3. Le nœud de 8, sur lequel nous nous attarderons un peu, est donné par le diagramme suivant :

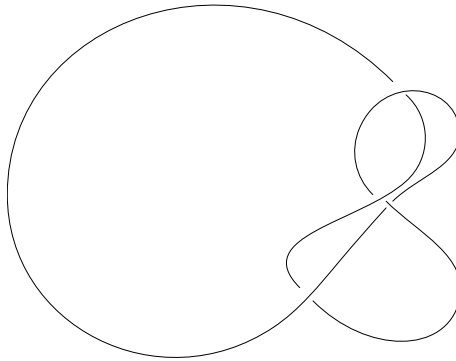


FIGURE 1 – Une représentation du nœud de 8

On dit que deux nœuds sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par un homéomorphisme (préservant l'orientation) de \mathbb{S}^3 . Il n'est pas facile de déterminer si deux nœuds sont équivalents : il existe de nombreux invariants, mais aucun qui permette de reconnaître efficacement les nœuds. Souvent, on étudie leur complémentaire dans \mathbb{S}^3 , qui est un invariant topologique qui permet de distinguer les nœuds :

Théorème 1.4 (Gordon–Luecke). *Deux nœuds sont équivalents si et seulement si leurs complémentaires dans \mathbb{S}^3 sont homéomorphes (en préservant l'orientation).*

Une façon d'étudier ces variétés de dimension 3 est de les munir de structures géométriques et d'étudier les invariants qui y sont associés. Dans les années 1980, Thurston a montré que beaucoup de complémentaires de nœuds et d'entrelacs (plongement de plusieurs cercles dans \mathbb{S}^3) admettent des structures hyperboliques. Un autre type de structure géométrique, issue d'une généralisation naturelle de la géométrie hyperbolique réelle est la géométrie CR-sphérique. À l'heure actuelle, Schwartz puis Falbel et Deraux ont montré qu'il existe des structures CR-sphériques sur les

complémentaires de l'entrelacs de Whitehead et le nœud de 8 respectivement dans [7] et [2]; on ne connaît pas d'autre exemple explicite de complémentaire d'entrelacs admettant une structure CR-sphérique.

Une dernière motivation pour insister sur les structures géométriques sur les compléments de nœuds pour l'étude des variétés de dimension 3 en général est le théorème suivant, qui fait intervenir la chirurgie de Dehn, un procédé topologique simple et assez bien compris :

Théorème 1.5 (Lickorish-Wallace). *Toute variété compacte de dimension 3 peut être obtenue à partir du complémentaire d'un entrelacs par des chirurgies de Dehn.*

2 Structures géométriques

Le langage pour énoncer des résultats sur les structures géométriques en général a été introduit par Felix Klein dans son programme d'Erlangen en 1872, dans le but d'unifier les différentes notions liées aux différentes géométries apparues au cours du XIX^e siècle. Son idée principale est de considérer une géométrie non pas par ses objets, mais par ses symétries. Plus précisément, on considère un espace modèle X , qui sera une variété, et un groupe G agissant transitivement sur X , qui sera son groupe de symétries. Il est possible alors de considérer des structures géométriques sur d'autres variétés, qui ressembleront localement à X . On aboutit alors à la définition suivante :

Définition 2.1. Une (G, X) -structure sur une variété M est un atlas de M à valeurs dans X , et dont les changements de cartes sont donnés par des éléments de G .

Avec cette définition, on peut mettre sur le même plan la géométrie euclidienne $((O(n) \times \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$, la géométrie sphérique $((O(n+1), \mathbb{S}^n))$, la géométrie affine $((GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n)$ et la géométrie projective $((PGL_{n+1}(\mathbb{R}), \mathbb{RP}^n)$. Nous verrons dans la suite de ce texte les définitions pour la géométrie hyperbolique et la géométrie CR-sphérique, qui viennent s'ajouter à cette liste.

Remarque 2.2. On fait souvent des hypothèses supplémentaires, qui sont souvent vérifiées dans les cadres où le langage des (G, X) -structures est utilisé, pour avoir des résultats plus précis. On fait les hypothèses suivantes :

- X est simplement connexe
- G agit transitivement sur X
- G agit analytiquement sur X . i.e. si l'action de deux éléments de G coïncide sur un ouvert non vide, alors ces éléments sont égaux.

Exemple 2.3 (Tores). On peut munir le tore de dimension n , $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ d'une structure euclidienne. On utilise comme cartes les réciproques des fonctions $]0, 1[^{n+v} \mapsto]0, 1[^{n+v} \bmod \mathbb{Z}^n$, où $v \in \mathbb{R}^n$. En effet, les changements de cartes sont donnés par des translations, qui préservent la structure euclidienne.

Définition 2.4 (Développante). Soit V une variété munie d'une (G, X) -structure. Soit \tilde{V} son revêtement universel et $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ la projection canonique. En composant par cette projection, \tilde{V} hérite d'une (G, X) -structure compatible avec celle de V .

Fixons des points $v_0 \in \tilde{V}$ et $x_0 \in X$, un ouvert connexe trivialisant U_0 autour de v_0 puis une carte $\varphi_0 : U_0 \rightarrow X$ de V au voisinage de v telle que $\varphi_0(v_0) = x_0$. On construit l'application développante $D : \tilde{V} \rightarrow X$ associée à φ_0 de la façon suivante :

- si $v \in U_0$, on pose $D(v) = \varphi_0 \circ \pi(v)$;
- sinon, on considère des cartes sur des ouverts connexes et trivialisants $(\varphi_1, U_1), \dots, (\varphi_n, U_n)$ de \tilde{V} de sorte que pour $1 \leq i \leq n$ on a $U_i \cap U_{i-1} \neq \emptyset$ et $v \in U_n$.

Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on sait que $\varphi_{i-1} \circ \varphi_i^{-1}$ est donné par un unique élément $g_i \in G$. On pose alors

$$D(v) = g_0 \cdots g_n \cdot \varphi_n(v).$$

Proposition 2.5. *La construction précédente ne dépend pas du choix des cartes $(\varphi_1, U_1), \dots, (\varphi_n, U_n)$ et définit une application $D : \tilde{V} \rightarrow X$ compatible avec les (G, X) -structures. De plus, toute application construite de cette façon, en changeant de carte φ_0 , est de la forme $g \cdot D$ où $g \in G$.*

Une fois que nous avons défini la développante, nous pouvons chercher à étudier des (G, X) -structures plus particulières, où l'information se lit sur un sous-groupe de G . Ce sont les structures *complètes* ou *uniformisables* :

Définition 2.6. On dit qu'une (G, X) -structure est *complète* ou *uniformisable* si sa développante est un revêtement.

Remarque 2.7. La structure géométrique est alors obtenue comme un quotient de X par un sous-groupe discret de G .

Avec la construction de la développante, on obtient une représentation du groupe fondamental de V à valeurs dans G , appelée holonomie. Considérons un point $v \in \tilde{V}$ et une développante D . Le groupe fondamental $\pi_1(V, \pi(v))$ agit alors sur \tilde{V} . Notons ce groupe Γ . On a la proposition suivante :

Proposition 2.8. *Il existe un unique morphisme de groupes $h : \Gamma \rightarrow G$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D$.*

Définition 2.9. Un tel morphisme h est appelé *morphisme d'holonomie*. Il fournit une représentation de $\pi_1(V)$ à valeurs dans G .

Remarque 2.10. Si la développante D est changée en $g \circ D$, l'holonomie change en $g \circ h \circ g^{-1}$. L'holonomie est donc bien définie à conjugaison près.

Remarque 2.11. Une stratégie pour tenter d'obtenir une (G, X) -structure complète sur une variété V consiste à chercher des représentations de $\pi_1(V)$ à valeurs dans G , puis essayer de vérifier qu'elles correspondent à un morphisme d'holonomie.

Regardons maintenant un type de structures géométriques essentiel pour l'étude des variétés de dimension 2 et 3. Il s'agit des structures hyperboliques.

3 L'espace hyperbolique

3.1 Le modèle du demi-espace

Nous introduisons maintenant l'espace hyperbolique en général. Nous allons cependant nous concentrer sur les cas des dimensions 2 et 3. Il existe plusieurs modèles de l'espace hyperbolique de dimension n , mais nous nous concentrerons ici sur celui du demi-espace, qui est conforme et où les isométries sont données par des homographies.

Définition 3.1. Le modèle du demi-espace de l'espace hyperbolique de dimension n est donné par $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ muni de la métrique riemannienne $\frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}$.

Ayant une métrique riemannienne, nous avons la notion d'angle et une façon de mesurer la longueur d'une courbe. Dans le cas du modèle du demi-espace, nous pouvons faire les remarques suivantes :

Remarque 3.2. La métrique est proportionnelle à la métrique euclidienne. On dit alors que le modèle est *conforme*. C'est-à-dire, les angles hyperboliques entre les courbes sont exactement les angles euclidiens.

Remarque 3.3. Si $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^n$ est une courbe \mathcal{C}^1 , sa longueur est alors $\int_0^1 \frac{\sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2}}{\gamma_n(t)} dt$.

Dans une variété riemannienne, les *géodésiques* sont les courbes qui minimisent localement la longueur. Elles jouent le rôle des droites en géométrie euclidienne. En général, les informations sur les géodésiques aident beaucoup à comprendre les variétés. Pour l'espace hyperbolique, nous avons une description explicite :

Proposition 3.4. Les géodésiques de \mathbb{H}^n , dans le modèle du demi-espace, sont les demi-droites et les demi-cercles orthogonaux à $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

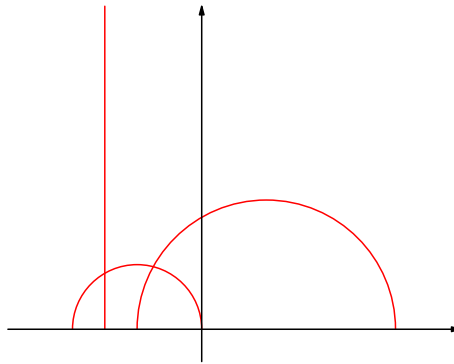


FIGURE 2 – Des géodésiques dans \mathbb{H}^2

L'espace hyperbolique est alors muni naturellement d'un "bord à l'infini", homéomorphe à une sphère. Intuitivement, il correspond aux "directions" des géodésiques. Une géodésique est déterminée par ses deux extrémités sur le bord; comprendre l'action d'une isométrie sur les géodésiques (et donc sur l'espace tout entier), revient alors à comprendre son action sur le bord.

Définition 3.5. On note $\partial\mathbb{H}^n$ le bord à l'infini de \mathbb{H}^n , correspondant à $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup \{\infty\}$ dans le modèle du demi-espace.

Dans les cas de dimension 2 et 3, on identifie généralement ce bord à l'infini à des objets plus simples à manipuler algébriquement :

Remarque 3.6. On identifie généralement $\partial\mathbb{H}^2$ à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $\partial\mathbb{H}^3$ à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

3.2 Isométries

Maintenant que nous avons un espace modèle pour la géométrie hyperbolique, il est temps de nous intéresser à son groupe d'isométries (directes). Il est possible, en effet, de les classifier en utilisant un modèle où les isométries sont exactement les applications linéaires préservant une forme quadratique de signature $(n, 1)$. À l'aide de la décomposition de Jordan, on aboutit à la classification suivante :

Théorème 3.7 (Classification des isométries de \mathbb{H}^n). *Une isométrie g de \mathbb{H}^n est de l'un des trois types suivants :*

Elliptique : g admet au moins un point fixe dans \mathbb{H}^n . Ces transformations sont analogues aux rotations euclidiennes.

Parabolique : g admet exactement un point fixe dans $\partial\mathbb{H}^n$. Dans ce cas, $\inf_{x \in \mathbb{H}^n} d(x, g \cdot x) = 0$.

Loxodromique : g admet deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}^n$. Dans ce cas, $\inf_{x \in \mathbb{H}^n} d(x, g \cdot x) > 0$. La géodésique reliant les deux points fixes de g est alors stable par g et ses points sont exactement les points où l'inf est atteint. g réalise alors un vissage autour de cette géodésique.

Concentrons nous maintenant sur les cas de dimension 2 et 3, où les isométries peuvent s'exprimer en termes d'homographies.

Définition 3.8. Une *homographie* est une application du type $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc \neq 0$ définie sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. C'est une application conforme représentée par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La composition d'homographies correspond au produit matriciel.

Nous pouvons expliciter les groupes d'isométries de \mathbb{H}^2 et \mathbb{H}^3 :

Théorème 3.9. *Le groupe d'isométries de \mathbb{H}^2 est $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, agissant par homographies.*

Démonstration. (idée) On montre d'abord que les homographies représentées par des matrices réelles sont bien des isométries de \mathbb{H}^2 , en vérifiant qu'elles préservent la métrique. Ensuite, il suffit de se concentrer sur le bord. En effet, une isométrie qui fixe tous les points du bord fixe toutes les géodésiques et doit être l'identité.

On démontre ensuite que $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit simplement 3*-transitivement sur $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, c'est à dire qu'une homographie donnée par un élément de $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ est uniquement déterminée par l'image de trois points du bord ordonnés cycliquement.

Soit g une isométrie de \mathbb{H}^2 . Quitte à composer par une homographie, on peut supposer que 0, 1 et ∞ sont des points fixes de g . Comme g préserve les géodésiques et l'orthogonalité, elle préserve aussi la géodésique l d'extrémité 1 et orthogonale à $(0, \infty)$: le demi-cercle de centre 0 et rayon 1. En considérant les géodésiques orthogonales à $(0, \infty)$ et leur distance à l , on montre que tous les points du bord sont fixés par g : il s'agit donc de l'identité. \square

Pour le cas de la dimension 3, on se concentre aussi sur l'action sur le bord $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. En effet, si une application préserve les cercles de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, elle s'étend de manière unique en une isométrie de \mathbb{H}^3 . Puisque les applications préservant les cercles de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sont exactement les homographies représentées par des matrices à coefficients complexes, on a le résultat suivant :

Théorème 3.10. *Le groupe d'isométries de \mathbb{H}^3 est $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$, agissant par homographies sur le bord à l'infini $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

3.3 Le modèle projectif

Nous verrons, très succinctement, un autre modèle pour la géométrie hyperbolique réelle : le modèle projectif. Il nous servira par la suite pour définir par analogie une géométrie hyperbolique complexe.

Considérons $V = \mathbb{R}^{n+1}$ muni de la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_{n+1}^2$. Notons $V^- = \{x \in V \mid q(x) < 0\}$ l'ensemble des vecteurs négatifs.

Définition 3.11. Le modèle projectif de l'espace hyperbolique de dimension n est $\mathbb{P}V^-$ muni de la métrique induite par la forme quadratique q .

Proposition 3.12. *Le modèle du demi-espace et le modèle projectif sont isométriques.*

4 Une structure hyperbolique sur le complémentaire du nœud de 8

Nous allons nous intéresser à présent à un exemple de structure hyperbolique en dimension 3 : la structure complète sur le complémentaire du nœud de 8. Nous l'aborderons très rapidement en suivant les lignes données par Thurston dans [9], et qui peuvent s'appliquer à d'autres complémentaires de nœuds.

Tout d'abord, revenons sur la variété. Nous la noterons \mathbb{M}_8 . Il est possible de la trianguler en recollant deux tétraèdres époinés. Pour le faire, considérons les deux tétraèdres comme dans la figure 3, avec deux types d'arêtes orientées.

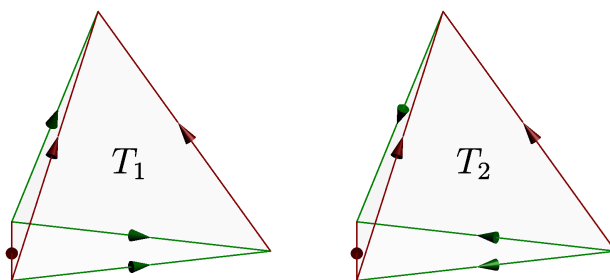


FIGURE 3 – Combinatoire du recollement

Les choix sont faits de sorte que :

- Dans chaque face il y a exactement deux arêtes de la même couleur.
- Deux arêtes de la même couleur ne se suivent pas.

À symétrie près, il n'y a que deux façons de faire ceci, à savoir celles données par T_1 et T_2 . De plus, il y a quatre combinatoires possibles pour les faces, qui changent d'orientation suivant que nous les regardons dans T_1 ou dans T_2 . Le recollement donné par l'identification de faces de même combinatoire (suivant les arêtes) est alors orienté.

Regardons-le d'un peu plus près. Il a deux arêtes : une rouge et une verte. En les suivant, nous pouvons voir que chaque sommet est le début d'une arête verte, et donc que les huit sommets des tétraèdres seront confondus, lors du recollement, en un seul sommet. Comme nous avons identifié deux tétraèdres selon leurs quatre faces, nous avons deux tétraèdres et quatre faces dans le complexe.

En époinçant les tétraèdres, nous obtenons une variété de dimension 3. Il s'avère qu'il s'agit du complémentaire du nœud de 8, que nous pouvons déformer dans \mathbb{S}^3 de la façon suivante :

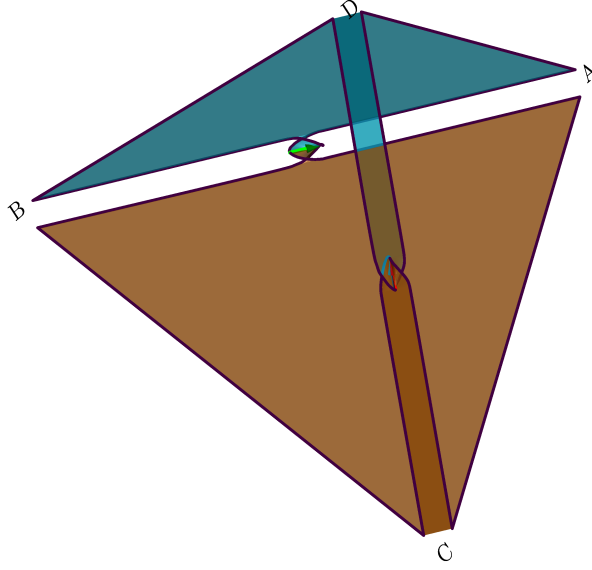


FIGURE 4 – Réarrangement du nœud de 8

En traçant l'arête rouge et la verte comme dans la figure 4, nous obtenons topologiquement deux tétraèdres épointés qui triangulent M_8 . Pour munir M_8 d'une structure hyperbolique, nous essayons de munir chacun des tétraèdres d'une structure de tétraèdre idéal. Voyons d'abord les configurations de quatre sommets idéaux de \mathbb{H}^3 , qui nous donneront des tétraèdres idéaux en considérant le domaine convexe délimité par les géodésiques entre les points. Ceci se résume dans la proposition suivante :

Proposition 4.1. *Le groupe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit simplement 3-transitivement sur $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Cette action préserve le birapport $[a, b, c, d] = \frac{a-c}{a-d} \frac{b-d}{b-c}$ des quadruplets ordonnés de points de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Les tétraèdres idéaux (orientés) sont donnés par des quadruplets de points distincts sur $\partial\mathbb{H}^3$, et donc paramétrés, à isométrie et permutation paire des sommets près, par leur birapport. Pour le complémentaire du nœud de 8, nous allons faire un choix de structure symétrique : nous allons munir les deux tétraèdres de la structure d'un tétraèdre idéal régulier dans \mathbb{H}^3 . Considérons donc les tétraèdres idéaux T_1 et T_2 de \mathbb{H}^3 de sommets idéaux $(\infty, 0, 1, -\omega^2)$ et $(0, 1, -\omega, \infty)$, tous deux de birapport $-\omega^2$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 4.2. *Les tétraèdres idéaux T_1 et T_2 de sommets idéaux $(\infty, 0, 1, -\omega^2)$ et $(0, 1, -\omega, \infty)$ respectivement sont des tétraèdres idéaux réguliers avec des angles dièdres de $\frac{\pi}{3}$.*

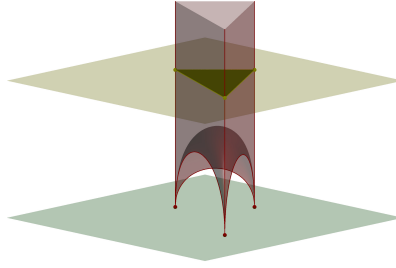


FIGURE 5 – Un tétraèdre idéal dans \mathbb{H}^3

Le recollement des faces se fait par des isométries et il y a six tétraèdres autour de chaque arête : la structure hyperbolique se recolle alors et donne lieu à une structure sur \mathbb{M}_8 .

Remarque 4.3. Pour des tétraèdres idéaux de paramètres arbitraires z et w , les conditions de recollement s'écrivent comme des équations polynomiales en z , w , $\frac{-1}{z}$, $\frac{-1}{w}$, $\frac{z}{1-z}$ et $\frac{w}{1-w}$.

De plus, on peut montrer, à l'aide de critères topologiques, que la structure donnée par T_1 et T_2 sur \mathbb{M}_8 est complète. Grâce au théorème de rigidité de Mostow, nous savons alors qu'il s'agit de l'unique structure hyperbolique complète sur \mathbb{M}_8 . En général, il est aussi possible de vérifier la complétude pour un recollement de tétraèdres idéaux avec des équations polynomiales en les z_i , $\frac{-1}{z_i}$ et $\frac{z_i}{1-z_i}$ liées aux cusps (ou pointes) de la variété, où les z_i sont les paramètres des tétraèdres.

5 Structures CR-sphériques

Nous allons voir maintenant un autre type de structure géométrique : les structures CR-sphériques, qui apparaissent en considérant le bord du plan hyperbolique complexe.

5.1 Le plan hyperbolique complexe

Le plan hyperbolique complexe est une généralisation naturelle du plan hyperbolique réel lorsqu'on considère le modèle projectif. Considérons la forme hermitienne $h(z) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2$ sur \mathbb{C}^3 , donnée par le produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Le groupe préservant cette forme est noté $U(2, 1)$. Notons $V^- = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid h(z) < 0\}$ l'ensemble des vecteurs négatifs, puis $\mathbb{P}V^-$ son projectivisé.

Définition 5.1. On munit $\mathbb{P}V^-$ de la *métrique de Bergman*, induite par le produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 5.2. Le modèle projectif du plan hyperbolique complexe est $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}V^-$ muni de la métrique de Bergman.

Remarquons maintenant le fait suivant : si $(z_1, z_2, z_3) \in V^-$, alors $z_3 \neq 0$. Nous déduisons alors que $\mathbb{P}V^-$ est contenu entièrement dans la carte affine $z_3 = 1$ et que, dans cette carte, $\mathbb{P}V^-$ correspond à $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$, c'est à dire la boule $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{C}^2$. Nous disposons alors d'un autre modèle :

Définition 5.3. Le *modèle de la boule* de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ est \mathbb{B}^2 muni de la métrique induite par la métrique de Bergman.

5.2 Isométries

En ce qui concerne les isométries, toute application qui préserve la forme hermitienne h induit une isométrie sur $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. De plus, nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.4. *Le groupe unitaire $U(2, 1)$ stabilise V^- et agit transitivement sur $\mathbb{P}V^-$.*

Le groupe à considérer est alors le projectivisé de $U(2, 1)$, noté $PU(2, 1)$. Il s'agit, en effet, du groupe d'isométries de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Le stabilisateur d'un point est alors isomorphe à $U(2)$. Il existe, de façon analogue au cas réel, une classification des isométries de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ en fonction de ses points fixes sur $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, dont l'existence est assurée par le théorème de Brower :

Théorème 5.5 (Classification des isométries de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$). *Une isométrie g de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ est de l'un des trois types suivants :*

Elliptique : *g admet au moins un point fixe dans $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.*

Parabolique : *g admet exactement un point fixe dans $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Si les valeurs propres d'un relevé de g sont toutes égales, on dit que g est unipotente.*

Loxodromique : *g admet deux points fixes dans $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. La géodésique reliant les deux points fixes de g est alors stable par g . Elle réalise alors un vissage autour de cette géodésique.*

5.3 Le bord à l'infini de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Dans le modèle de la boule, nous avons naturellement un bord à l'infini en considérant $\partial\mathbb{B}^2 = \mathbb{S}^3$.

Remarque 5.6. On note $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ le bord à l'infini de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Il correspond, dans le modèle projectif, à $\mathbb{P}V^0$, où $V^0 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid h(z) = 0\}$.

Proposition 5.7. *L'action de $PU(2, 1)$ sur $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ s'étend de façon continue à $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. L'action est alors transitive.*

Nous avons donc un espace modèle et un groupe de symétries. Nous sommes en mesure de définir une structure géométrique :

Définition 5.8. Une structure CR-sphérique est une $(PU(2, 1), \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2)$ -structure.

À l'heure actuelle, on connaît des exemples de structures CR-sphériques sur des fibrés en cercles sur des surfaces hyperboliques, en plongeant $\pi_1(S)$ dans $\text{Isom}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$, que l'on identifie à un sous-espace totalement géodésique, de dimension complexe 1, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. D'autre part, on connaît les deux constructions explicites sur des complémentaires d'entrelacs : l'entrelacs de Whitehead, montré par Schwartz dans [7] et le nœud de 8 montré par Falbel et Deraux dans [2]. Ceci encourage la recherche d'autres structures CR-sphériques pour mieux comprendre les variétés de dimension 3.

Les techniques utilisées correspondent à chercher une représentation du groupe fondamental d'une variété à valeurs dans $PU(2, 1)$, de sorte que le quotient de \mathbb{S}^3 par l'image de cette représentation donne une structure CR-sphérique sur la variété en construisant un domaine fondamental.

Références

- [1] Nicolas Bergeron and Antonin Guilloux. Géométrie hyperbolique et représentations de groupes de surface. Notes de cours, 2013, <http://www.math.jussieu.fr/~aguillou/GeomHyp/GeomHyp.pdf>.
- [2] Martin Deraux, Elisha Falbel, et al. Complex hyperbolic geometry of the figure eight knot. 2013.
- [3] Juliette Genzmer. *Sur les triangulations des structures CR-sphériques*. PhD thesis, UPMC, 2010.
- [4] William Mark Goldman. *Complex hyperbolic geometry*. Oxford University Press, 1999.
- [5] Walter D. Neumann and Don Zagier. Volumes of hyperbolic three-manifolds. *Topology*, 24(3) :307–332, 1985.
- [6] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [7] Richard Evan Schwartz. *Spherical CR Geometry and Dehn Surgery (AM-165)*. Number 165. Princeton University Press, 2007.
- [8] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [9] William P Thurston and John Willard Milnor. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University Princeton, 1979.