Développements Analyse

Miguel Acosta

2017

Table des matières

0 Mode d'emploi

Présentation

Dans ce document, vous trouverez des versions courtes des développements que j'ai préparés en 2017 pour les leçons d'algèbre et géométrie des oraux de l'agrégation de mathématiques. Je remercie très chaleureusement Joël Gay et Gabriel Pallier, qui m'ont permis de travailler avec les plans et les développements qu'ils avaient préparés pour des sessions précédentes. Une bonne partie des développements présentés ici sont repris de leurs versions, ainsi que de versions disponibles sur internet.

La leçon d'analyse et probabilités

Une des épreuves de l'oral de l'agrégation de mathématiques en 2017 est la leçon d'analyse et probabilités. Une liste de leçons est disponible, et le candidat tire au hasard un couplage avec deux titres : il en choisit un. Il a alors trois heures pour préparer un plan de leçon en trois pages, qui comporte au moins deux développements. Lors du passage devant le jury, le candidat a six minutes pour présenter son plan et proposer ses développements. Le jury choisit alors un des développements et le candidat dispose de 15 minutes pour le mener à bien au tableau (sans notes !). Il suit alors une séquence de questions et d'entretien avec le jury qui dure 25 minutes environ. Tout est bien décrit dans le rapport du jury. J'encourage vivement sa lecture à tous les candidats et les préparateurs.

La préparation en amont

Pour être prêt pour l'épreuve orale, il faut beaucoup travailler en amont. La préparation d'une leçon ne s'improvise pas : il faut avoir réfléchi auparavant aux grandes lignes d'un plan, à des exemples pertinents, à l'adéquation des développements, aux oublis à ne pas faire...

En particulier, il faut préparer un jeu de développements et être prêt à les mobiliser le jour de l'oral. Il y a une partie de choix, suivant les goûts de chacun, et d'optimisation (un développement peut correspondre à plusieurs leçons, et trop de développements à préparer complique la tâche). Il est aussi important de s'approprier de ses développements : apporter des petites modifications pour le présenter chacun à sa sauce. En ce qui me concerne, le processus pour s'approprier un développement suit les étapes suivantes :

1. Trouver le développement avec une référence. (Un développement sans référence est un risque pris et une charge de plus pour la mémoire.)
2. Rédiger proprement sur une feuille le développement, en faisant attention aux détails et aux éventuels oublis des références
3. Découper le développement en 3 ou 4 étapes bien définies

4. S'entraîner plusieurs fois au tableau pour vérifier la durée, la longueur, la difficulté...
5. Ajuster le développement (contenu, vitesse de présentation, un dessin...)

Elles ne sont pas nécessairement à faire à la suite : notamment les répétitions au tableau peuvent se faire quand les oraux approchent si au moment de choisir on est à peu près sûr que la longueur du développement convient. Un développement devrait affiche un chrono d'entre 12 et 15 minutes ; le jour J il faut être à l'abri d'un trou de mémoire ou d'avoir une allure un peu différente à cause du stress.

Ces développements

Les développements présentés ici ne sont pas entièrement rédigés. On y trouve un titre (ou comment je l'ai retenu), l'énoncé, une référence (avec laquelle il faut travailler), les leçons de la session 2017 où je considère qu'il peut aller, des remarques et enfin les étapes dans lesquelles je l'ai découpé. Ce découpage en étapes est très important. Une bonne façon de présenter un développement est d'énoncer clairement les étapes au début puis les suivre pendant les 15 minutes. Grâce à ça, on a des accroches mentales pour se repérer dans les preuves et le jury sait où on va. En cas de trou de mémoire ou de vitesse trop lente, si on n'arrive pas à finir, au moins le jury sait comment conclure, et peut même demander de sauter une étape s'il n'y a pas assez de temps.

1 Prolongement holomorphe de Γ à $\mathbb{C} - (-\mathbb{N})$

Notation 1.1. On note $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$

Proposition 1.2. *La fonction $\Gamma : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ définie par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ à pôles simples en $-\mathbb{N}$.*

Références [BMP05]

Leçons possibles 207, 235, 239, 241, 245

Remarques Définir Γ sur $\mathcal{P}$ dans le plan.

Étapes

1. Écrire $\Gamma = f + h$; h se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$
2. Écrire g comme une série de fonctions méromorphes
3. Découper la série ; vérifier qu'elle définit une fonction méromorphe.

2 Théorème de Fischer-Riesz

Théorème 2.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Alors, pour $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(\Omega)$ est complet.*

Références [Bré05]

Leçons possibles 201, 205, 208, 234, 241

Remarques Il faut aller assez doucement.

Étapes

1. Cas $p = \infty$: un bon ensemble négligeable et complétude de $\mathbb{R}$
2. $p < \infty$: définition d'une suite de contrôle : série convergente pp
3. Convergence pp et L^p avec la série de contrôle

3 Densité des polynômes orthogonaux dans $L^2(I, \rho)$

Proposition 3.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\rho : I \to \mathbb{R}$ strictement positive et mesurable. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$. Alors les polynômes orthogonaux de $L^2(I, \rho)$ forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.*

Alors $e_N \to 0$ p.s. De plus, si $g \in L^\infty([0,1]^d)$, $||g||_\infty \leq A$ et $||g||_2^2 \leq B$, alors $\forall \beta \in [0, BA^{-2}]$, on a $\mathbb{P}(|e_N| > \beta A) \leq 2\exp(-N\frac{\beta^2 A^2}{4B})$.

Références [CLF95]

Leçons possibles 236, 261, 263

Remarques

Étapes

1. Lemme : $\forall t \in [-1,1] : 1 + t \leq e^t \leq 1 + t + t^2$
2. Majoration de $\mathbb{P}(e_N > \beta A)$: introduction d'un paramètre α
3. Optimisation de α et conclusion

Références

[BMP05] Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré : *Objectif agrégation.* H&K, Paris, deuxième édition édition, 2005.

[Bon94] Jean-Michel Bony : *Cours d'analyse : édition 1992.* Ecole polytechnique. Département de mathématiques, Palaiseau, 1994.

[Bré05] Haïm Brézis : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.* Sciences Sup. Dunod, Paris, nouvelle présentation 2005 édition, 2005.

[CGCDM05] Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre : *Exercices de probabilités : licence, master, écoles d'ingénieurs.* Cassini, Paris, 2005.

[CLF95] Antoine Chambert-Loir et Stéfane Fermigier : *Exercices de mathématiques pour l'agrégation.* Agrégation de mathématiques. Masson, Paris Milan, 1995.

[Dum99] Laurent Dumas : *Modélisation à l'oral de l'agrégation : calcul scientifique.* Ellipses, impr. 1999, Paris, France, 1999.

[Dur91] Richard Durrett : *Probability : theory and examples.* Wadsworth & Brooks-Cole advances books & software, Belmont, Calif., Etats-Unis d'Amérique, cop. 1991.

[FGN12] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures. Analyse. Tome IV.* Cassini, DL 2012, Paris, France, DL 2012, cop. 2012.

[FGN13] Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques des oraux de l'École polytechnique et des Écoles normales supérieures. Algèbre. Tome III.* Cassini, impr. 2013, Paris, France, impr. 2013, cop. 2013.

[GK11] Olivier Garet et Aline Kurtzmann : *De l'intégration aux probabilités.* Références sciences. Ellipses, Paris, 2011.

[Gou08] Xavier Gourdon : *Les maths en tête : Analyse.* Ellipses Marketing, Paris, 2e édition édition, février 2008.

[GT98] Stéphane Gonnord et Nicolas Tosel : *Calcul différentiel : thèmes d'analyse pour l'agrégation.* CAPES/Agreg mathématiques. Ellipses, Paris, 1998.

[Nou01] Ivan Nourdin : *Leçons d'analyse, probabilités, algèbre et géométrie : agrégation de mathématiques.* Dunod, Paris, France, 2001.

[QZ13] Hervé Queffélec et Claude Zuily : *Analyse pour l'agrégation : cours et exercices corrigés.* Dunod, DL 2013, cop. 2013.

[Rou03] François Rouvière : *Petit guide de calcul différentiel : à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Numéro 4 de Enseignement des mathématiques. Cassini, Paris, 2e édition, revue et augmentée édition, 2003.

[Ser01] Denis Serre : *Les matrices : théorie et pratique.* Masson Sciences. Dunod, Paris, 2001.