Développements Algèbre

Miguel Acosta

2017

Table des matières

0 Mode d'emploi

Présentation

Dans ce document, vous trouverez des versions courtes des développements que j'ai préparés en 2017 pour les leçons d'algèbre et géométrie des oraux de l'agrégation de mathématiques. Je remercie très chaleureusement Joël Gay et Gabriel Pallier, qui m'ont permis de travailler avec les plans et les développements qu'ils avaient préparés pour des sessions précédentes. Une bonne partie des développements présentés ici sont repris de leurs versions, ainsi que de versions disponibles sur internet.

La leçon d'algèbre et géométrie

Une des épreuves de l'oral de l'agrégation de mathématiques en 2017 est la leçon d'algèbre et géométrie. Une liste de leçons est disponible, et le candidat tire au hasard un couplage avec deux titres : il en choisit un. Il a alors trois heures pour préparer un plan de leçon en trois pages, qui comporte au moins deux développements. Lors du passage devant le jury, le candidat a six minutes pour présenter son plan et proposer ses développements. Le jury choisit alors un des développements et le candidat dispose de 15 minutes pour le mener à bien au tableau (sans notes !). Il suit alors une séquence de questions et d'entretien avec le jury qui dure 25 minutes environ. Tout est bien décrit dans le rapport du jury. J'encourage vivement sa lecture à tous les candidats et les préparateurs.

La préparation en amont

Pour être prêt pour l'épreuve orale, il faut beaucoup travailler en amont. La préparation d'une leçon ne s'improvise pas : il faut avoir réfléchi auparavant aux grandes lignes d'un plan, à des exemples pertinents, à l'adéquation des développements, aux oublis à ne pas faire...

En particulier, il faut préparer un jeu de développements et être prêt à les mobiliser le jour de l'oral. Il y a une partie de choix, suivant les goûts de chacun, et d'optimisation (un développement peut correspondre à plusieurs leçons, et trop de développements à préparer complique la tâche). Il est aussi important de s'approprier de ses développements : apporter des petites modifications pour le présenter chacun à sa sauce. En ce qui me concerne, le processus pour s'approprier un développement suit les étapes suivantes :

1. Trouver le développement avec une référence. (Un développement sans référence est un risque pris et une charge de plus pour la mémoire.)
2. Rédiger proprement sur une feuille le développement, en faisant attention aux détails et aux éventuels oublis des références
3. Découper le développement en 3 ou 4 étapes bien définies

4. S'entraîner plusieurs fois au tableau pour vérifier la durée, la longueur, la difficulté...
5. Ajuster le développement (contenu, vitesse de présentation, un dessin...)

Elles ne sont pas nécessairement à faire à la suite : notamment les répétitions au tableau peuvent se faire quand les oraux approchent si au moment de choisir on est à peu près sûr que la longueur du développement convient. Un développement devrait affiche un chrono d'entre 12 et 15 minutes ; le jour J il faut être à l'abri d'un trou de mémoire ou d'avoir une allure un peu différente à cause du stress.

Ces développements

Les développements présentés ici ne sont pas entièrement rédigés. On y trouve un titre (ou comment je l'ai retenu), l'énoncé, une référence (avec laquelle il faut travailler), les leçons de la session 2017 où je considère qu'il peut aller, des remarques et enfin les étapes dans lesquelles je l'ai découpé. Ce découpage en étapes est très important. Une bonne façon de présenter un développement est d'énoncer clairement les étapes au début puis les suivre pendant les 15 minutes. Grâce à ça, on a des accroches mentales pour se repérer dans les preuves et le jury sait où on va. En cas de trou de mémoire ou de vitesse trop lente, si on n'arrive pas à finir, au moins le jury sait comment conclure, et peut même demander de sauter une étape s'il n'y a pas assez de temps.

1 $\mathcal{A}_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60

Proposition 1.1. *À isomorphisme près, le groupe $\mathcal{A}_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60.*

Références [Per98], [ZR13]

Leçons possibles 101, 103, 104, 105, 108 ?

Remarques Pour montrer que G n'est pas distingué dans $\mathcal{A}_6$, il vaut mieux dire que si c'était le cas G contiendrait tous les 5-Sylow de $\mathcal{A}_6$, et qu'il y en a trop. Utiliser que $\mathcal{A}_6$ est simple est malvenu, étant donné qu'on montre que $\mathcal{A}_5$ est simple. (Remarque de Gabriel)

Étapes

1. $\mathcal{A}_5$ est simple
2. G s'injecte dans $\mathcal{A}_6$ (action sur les 5-Sylows)
3. $G \simeq \mathcal{A}_5$ (action sur $\mathcal{A}_6/G$)

2 Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème 2.1 (D'Alembert-Gauss)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors P admet une racine dans $\mathbb{C}$.*

Références [Sam71]

Leçons possibles 125, 141, 142

Remarques Un peu court. Pas préparé.

3 Théorème de l'élément primitif

Théorème 3.1. *Soit K un corps fini ou de caractéristique nulle. Soit L une extension finie de K. Alors il existe $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$.*

Proposition 3.2. *On a $\mathbb{Q}(i, j, \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i + j + \sqrt{2})$.*

Références [FGP94]

Leçons possibles 125, 141, (144)

Références

[Al100] AL1XENS : *Oraux X-ENS Algèbre 1.* 200.

[Al200] AL2XENS : *Oraux X-ENS Algèbre 2.* 200.

[Al300] AL3XENS : *Oraux X-ENS Algèbre 3.* 200.

[Ale99] Michel ALESSANDRI : *Thèmes de géométrie : groupes en situation géométrique.* Agrégation de mathématiques. Dunod, Paris, 1999.

[BMP05] Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ : *Objectif agrégation.* H&K, Paris, deuxième édition édition, 2005.

[Car89] Jean-Claude CARREGA : *Théorie des corps : la règle et le compas.* Hermann,, Paris, France, 1989.

[CG13] Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI : *Histoires hédonistes de groupes et de géométries.* Calvage & Mounet, Paris, 2013.

[Col11] Pierre COLMEZ : *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres).* Éd. de l'École polytechnique, Palaiseau, nouvelle édition édition, 2011.

[Dum99] Laurent DUMAS : *Modélisation à l'oral de l'agrégation : calcul scientifique.* Ellipses, impr. 1999, Paris, France, 1999.

[Eid09] Jean-Denis EIDEN : *Géométrie analytique classique.* Numéro 103 de Tableau noir. Calvage & Mounet, Paris, 2009.

[FGP94] Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Daniel PERRIN : *Exercices de mathématiques pour l'agrégation : algèbre 1.* Agrégation de mathématiques. Masson, Paris Milan Barcelone, 1994.

[Gou09] Xavier GOURDON : *Les maths en tête : Algèbre.* Ellipses Marketing, Paris, 2e édition édition, janvier 2009.

[MT86] Rached MNEIMNÉ et Frédéric TESTARD : *Introduction à La Théorie Des Groupes de Lie Classiques*, volume 41. Hermann, 1986.

[Per98] Daniel PERRIN : *Cours d'Algèbre Maths AGREG.* Ellipses Marketing, Paris, mai 1998.

[Rau00] Gérard RAUCH : *Les groupes finis et leurs représentations.* Ellipses, DL. 2000, Paris, France, 2000.

[Sam71] Pierre SAMUEL : *Théorie algébrique des nombres.* Collection Méthodes. Hermann, Paris, 2e édition revue et corrigée édition, 1971.

[Ser70] Jean-Pierre SERRE : *Cours d'arithmétique.* Numéro 2 de SUP. Le Mathématicien. Presses universitaires de France, Paris, 1970.

[ZR13] Maxime ZAVIDOVIQUE et Bernard RANDÉ : *Un max de maths : problèmes pour agrégatifs et mathématiciens en herbe ou confirmés.* Numéro 109 de Im-et-Ker. Calvage & Mounet, Paris, 2013.