

Volumes de variétés hyperboliques de dimension 3

Miguel ACOSTA

Sous la direction de Antonin GUILLOUX



Un polyèdre idéal dans le modèle du disque

Remerciements

L'auteur voudrait remercier Antonin Guilloux pour le suivi donné tout au long du travail de lecture et de rédaction qui aboutit à ce mémoire. Il voudrait aussi remercier Nicolas Bergeron, Antonin Guilloux et Maxime Wolff pour l'introduction au monde de la géométrie hyperbolique dont l'auteur a pu profiter lors du cours de Géométrie hyperbolique et représentations de groupes de surfaces donné à l'UPMC en 2012-2013.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 3 |
| 1 Recollement de polyèdres | 4 |
| 1.1 Recollement topologique de polyèdres | 4 |
| 1.2 Structures hyperboliques sur des recollements de polyèdres | 6 |
| 2 Une structure hyperbolique sur le complémentaire du nœud de 8 | 8 |
| 2.1 Le nœud de 8 | 8 |
| 2.2 Triangulation | 8 |
| 2.3 Structure hyperbolique | 10 |
| 2.4 Complétude | 12 |
| 2.5 Arithméticité | 13 |
| 3 Recollement de structures hyperboliques sur des tétraèdres idéaux | 16 |
| 3.1 Paramétrisation de la structure hyperbolique d'un tétraèdre idéal | 16 |
| 3.2 Conditions de recollement | 18 |
| 3.3 Conditions de complétude | 19 |
| 3.4 Retour sur le complémentaire du nœud de 8 | 19 |
| 4 Chirurgie de Dehn | 23 |
| 4.1 Procédé topologique | 23 |
| 4.2 Complétés métriques de variétés hyperboliques | 24 |
| 4.3 Invariants de Dehn | 27 |
| 4.4 Réalisation des conditions | 28 |
| 5 Bons paramètres pour les déformations | 32 |
| 5.1 Dimension de l'espace des structures | 32 |
| 5.2 Choix des paramètres | 33 |
| 5.3 Ouverture des invariants de Dehn | 34 |
| 5.4 Longueurs | 35 |
| 5.5 Holomorphie | 36 |
| 6 Relations symplectiques de Neumann et Zagier | 38 |
| 6.1 Écriture matricielle des paramètres | 38 |
| 6.2 Produit symplectique | 39 |
| 6.3 Conséquences | 41 |
| 7 Calcul de volumes | 43 |
| 7.1 La fonction π de Lobachevski, le dilogarithme et la fonction D | 43 |
| 7.2 Calcul du volume d'un tétraèdre idéal | 44 |
| 7.3 Expression dans les paramètres u_i | 46 |
| 7.4 Asymptotique | 47 |
| Références | 49 |

Introduction

Dans ce mémoire nous allons nous intéresser aux volumes des variétés hyperboliques à pointes de dimension 3. Bien que ce soit un sujet fort intéressant à lui tout seul, ce sera pour nous un excellent prétexte pour étudier de près les variétés hyperboliques à pointe, qui englobent les variétés compactes. Les structures hyperboliques complètes sont assez rigides, ce qui mène à des résultats assez surprenants, comme le théorème suivant :

Théorème 0.1 (Théorème de rigidité de Mostow). *Soit M une variété topologique de dimension ≥ 3 . S'il existe une structure hyperbolique complète sur M , alors elle est unique.*

Ou bien celui-ci, démontré par Thurston :

Théorème 0.2 (Thurston). *L'ensemble des volumes des variétés hyperboliques complètes à pointes de dimension 3 est bien ordonné dans \mathbb{R} . De plus, il est de type ω^ω .*

Cependant, il y a des points d'accumulation dans l'ensemble des volumes. Dans la section 7 nous allons comprendre, grâce au travail fait dans les six premières sections, l'asymptotique de ces points d'accumulation. Pour faire une lecture profitable du mémoire, il est souhaitable de maîtriser les notions d'un premier cours de géométrie hyperbolique, et être à l'aise avec les concepts d'isométrie hyperbolique en dimension 3, développante et holonomie.

Nous allons construire des variétés hyperboliques en recollant des tétraèdres, que nous munirons par la suite de structures hyperboliques compatibles. C'est l'objet des sections 1 et 3. Pour mieux comprendre ce procédé, nous allons traiter en détail et explicitement un exemple : le complémentaire du nœud de 8. Nous le verrons dans la section 2, et c'est l'exemple à avoir en tête tout au long d'une première lecture. Dans la section 4 nous étudierons la chirurgie de Dehn, un procédé topologique qui correspond, sous certaines conditions, à prendre le complété métrique d'une structure hyperbolique non complète. Ce point est d'autant plus intéressant qu'il nous fournit toutes les variétés hyperboliques complètes à pointes qui ont un volume inférieur à un volume fixé; c'est le théorème de Jørgensen :

Théorème 0.3 (Jørgensen). *Soit $C \in \mathbb{R}$. L'ensemble des variétés hyperboliques complètes à pointes de dimension 3 de volume inférieur à C est obtenu par chirurgie de Dehn à partir d'un nombre fini de variétés à pointes.*

Les sections 5 et 6 nous apportent les outils pour avoir une asymptotique des volumes : il faut d'abord faire un choix plus judicieux de paramètres que celui fait précédemment et établir des relations symplectiques entre les équations issues de la section 3. Finalement, dans la section 7, nous calculerons le volume d'un tétraèdre idéal, puis l'asymptotique pour les variétés obtenues par chirurgie de Dehn à partir d'un recollement topologique de tétraèdres.

La quasi-intégralité des résultats énoncés et des preuves faites se trouvent dans les références. Cependant les notations peuvent varier entre celles de ce texte et celles des références et quelques détails dans la façon d'énoncer et de rédiger ont été changés. Ainsi, les sections 1, 2, 3 et 4 se basent sur [7] et [5], et dans une moindre mesure sur [6]. Les sections 5, 6 et la deuxième moitié de la 7 reprennent les résultats de [3]. La première moitié de la section 7 correspond à une partie du chapitre 7 de [7].

1 Recollement de polyèdres

Nous allons nous intéresser à des variétés hyperboliques complètes à pointes de dimension 3. Quitte à considérer un revêtement fini il est possible de toutes les obtenir à partir d'un recollement de polyèdres munis d'une structure hyperbolique¹. Nous allons donc nous concentrer d'abord sur les recollements topologiques de polyèdres, que nous essaierons de munir d'une structure hyperbolique par la suite. Faisons quelques rappels pour fixer les notations :

Définition 1.1. Nous appellerons polyèdre l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points non tous coplanaires de \mathbb{R}^3 ou de \mathbb{H}^3 , où la convexité est donnée par la métrique correspondante.

Remarque 1.2. Un polyèdre a des sommets, des arêtes et des faces; son intérieur est homéomorphe à une boule ouverte. De plus, il est uniquement déterminé par ses sommets.

Remarque 1.3. Pour les questions topologiques, nous prendrons les polyèdres dans \mathbb{R}^3 . Cependant, si nous avons en plus une structure hyperbolique, nous considérerons les polyèdres plongés dans \mathbb{H}^3 , et nous les autoriserons à avoir des sommets sur le bord à l'infini, que nous identifierons à \mathbb{S}^2 ou $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Définition 1.4. Nous dirons qu'un sommet d'un polyèdre dans \mathbb{H}^3 qui se trouve dans $\partial\mathbb{H}^3$ est un sommet idéal. Un polyèdre ayant tous ses sommets idéaux est dit idéal.

1.1 Recollement topologique de polyèdres

Nous considérons un nombre fini de polyèdres disjoints P_1, \dots, P_n que nous cherchons à recoller de façon topologique. Nous supposons que le nombre total de faces de P_1, \dots, P_n est pair et nous les noterons F_1, \dots, F_{2k} .

Définition 1.5. Un appariement de faces pour P_1, \dots, P_n est une application

$$\Phi : \sqcup_{i=1}^k F_i \rightarrow \sqcup_{i=1}^k F_{i+k}$$

telle que :

- Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ $\Phi|_{F_i} : F_i \rightarrow F_{i+k}$ est un homéomorphisme.
- Φ envoie les sommets sur les sommets et les arêtes sur les arêtes.

Remarque 1.6. En particulier, F_i et F_{k+i} ont le même nombre de côtés. L'ordre de la numérotation sert uniquement à formaliser la définition : nous n'en ferons plus mention en parlant d'un recollement.

Nous nous donnons dorénavant un appariement de faces Φ pour P_1, \dots, P_n . Définissons maintenant un recollement :

Définition 1.7. Nous appellerons recollement de P_1, \dots, P_n par l'appariement Φ l'espace topologique $(\sqcup_{i=1}^n P_n) / \Phi$.

Remarque 1.8. Lors d'un recollement, nous obtenons un espace topologique M qui possède naturellement une structure de CW-complexe. Nous pouvons alors parler de sommets, arêtes et faces de M , qui correspondent aux images des sommets, arêtes et faces des P_j .

1. Ce résultat est prouvé dans [2] par Luo, Schleimer et Tillman. Le fait de savoir s'il est possible de se passer du revêtement reste un problème ouvert.

Comme nous le verrons plus loin dans cette section, en enlevant les sommets d'un recollement nous obtenons une variété topologique. En ce qui concerne les sommets, nous aurons besoin de la notion d'étoile dans recollement, qui sera aussi essentielle dans les raisonnements que nous ferons tout au long de ce texte.

Définition 1.9. Soit s un des sommets du recollement et soit s_1, \dots, s_m les sommets des polyèdres P_j qui s'identifient à s . Considérons, pour chaque s_i , un voisinage sphérique $\mathcal{V}(s_i)$ assez petit, de sorte que son bord intersecte l'intérieur du tétraèdre en un secteur sphérique homéomorphe à un polygone T_i . L'appariement de faces nous donne un appariement de côtés des polygones : nous obtenons alors une surface $L[s]$ découpée en polygones, appelée l'étoile² de s .

À propos de cette définition, il est pertinent de faire deux remarques avant de continuer :

Remarque 1.10. Pour un sommet s d'un recollement M , un voisinage assez petit est homéomorphe au cône sur $L[s]$.

Remarque 1.11. Cette définition est une définition combinatoire de l'étoile d'un sommet ; seules les relations d'inclusion entre les cellules sont nécessaires pour définir l'étoile. Cependant, comme chaque sommet de l'étoile est la trace d'une arête des P_j , chaque arête de $L[s]$ celle d'une face et chaque polygone celle d'un polyèdre, cette surface triangulée héritera en plus d'une structure géométrique si les P_j en ont une et qu'elle est compatible avec le recollement.

Maintenant que nous disposons de la notion d'étoile pour traiter le seul cas qui peut poser problème pour avoir une structure de variété, observons, en détail, les voisinages des points lors d'un recollement. Nous avons quatre types de points :

- Les points à l'intérieur d'un polyèdre : ils admettent une boule, à l'intérieur de ce tétraèdre, comme voisinage.
- Les points sur une face : ils admettent comme voisinage le recollement de deux demi-boules le long d'un disque, qui sera homéomorphe à une boule.
- Les points sur une arête : ils admettent comme voisinage un recollement de tranches de boules. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tétraèdres et que le recollement global est donné par un appariement de faces, ces tranches se recollent en un voisinage homéomorphe à une boule.

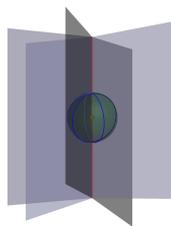


FIGURE 1 – Voisinage d'une arête lors d'un recollement

- Les points correspondant à un sommet : Après recollement, un sommet admet pour voisinage le cône sur son étoile, qui est une surface. Celui-ci ne peut être homéomorphe à une boule que si cette surface est une sphère. En effet, si l'étoile n'est pas une sphère, en enlevant le sommet du cône sur $L[s]$, nous obtenons un espace qui n'est pas simplement connexe, et donc pas une boule privée d'un point.

2. "Link" en anglais.

Remarque 1.12. Dans toute la suite nous supposerons que les recollements sont connexes et que les appariements de faces renversent, pour chaque paire de faces, l'orientation induite par les polyèdres P_j . Ainsi, en enlevant les sommets d'un recollement, nous obtenons une variété orientée.

Il suffit alors de considérer ce qui se passe autour des sommets pour savoir si un recollement est une variété. Voyons ceci avec un peu plus de détail. La proposition 1.14 nous donnera des informations supplémentaires et une façon simple de savoir si un recollement de polyèdres est une variété. Faisons d'abord la remarque suivante :

Remarque 1.13. L'étoile d'un sommet lors d'un recollement de tétraèdres est une surface compacte triangulée. Si les recollements sont choisis de sorte à renverser l'orientation, l'étoile du sommet sera orientée.

Proposition 1.14. *Soit M un recollement de polyèdres. Pour un sommet s de M , notons g_s le genre de son étoile. Alors la caractéristique d'Euler de M est $\chi(M) = \sum_s g_s$.*

Démonstration. Quitte à trianguler les polyèdres, nous pouvons supposer que M est obtenue comme recollement de tétraèdres. Pour chaque sommet recollé s , notons $L[s]$ son étoile et :

a_s le nombre d'arêtes issues de s (sommets de $L[s]$) comptées avec multiplicité.

f_s le nombre de faces contenant s (arêtes de $L[s]$) comptées avec multiplicité.

t_s le nombre de tétraèdres contenant s (faces de $L[s]$) comptés avec multiplicité.

Puisque chaque arête contient deux sommets, chaque face trois et chaque tétraèdre quatre, nous avons : $\chi(M) = \sum_s 1 - \frac{a_s}{2} + \frac{f_s}{3} - \frac{t_s}{4}$. Or l'étoile de s est une surface compacte triangulée, d'où :

- $2f_s = 3t_s$ et ces quantités valent la somme des degrés des sommets de $L[s]$, qui proviennent des arêtes issues de s .

- $\chi(L[s]) = 2 - 2g_s = a_s - f_s + t_s$

D'où $1 - \frac{a_s}{2} + \frac{f_s}{3} - \frac{t_s}{4} = 1 - \frac{1}{2}(a_s - \frac{2}{3}f_s + \frac{1}{2}t_s) = 1 - \frac{1}{2}(a_s - \frac{2}{3}f_s + \frac{1}{2}t_s + (\frac{1}{2}t_s - \frac{1}{3}f_s)) = 1 - \frac{1}{2}(a_s - f_s + t_s) = 1 - (1 - g_s) = g_s$, et $\chi(M) = \sum_s g_s$. \square

Corollaire 1.15. *Un recollement de polyèdres est une variété si et seulement si sa caractéristique d'Euler est nulle.*

1.2 Structures hyperboliques sur des recollements de polyèdres

Nous allons surtout nous intéresser aux structures hyperboliques que l'on peut mettre sur un recollement de polyèdres. Puisqu'en général autour d'un sommet un recollement ne donne pas une variété, nous allons considérer des tétraèdres époinçés, et pour les munir d'une structure hyperbolique nous les identifierons à des tétraèdres idéaux dans \mathbb{H}^3 , qui sont des objets assez bien compris. Puisque le groupe d'isométries de \mathbb{H}^3 agit simplement transitivement sur les triangles idéaux, une identification des faces renversant l'orientation suffit pour que la structure hyperbolique se prolonge aux points des intérieurs des faces ; nous verrons plus loin (3.2) les conditions pour qu'il en soit de même pour les arêtes. Pour l'instant, voyons quelques conséquences du fait de pouvoir munir une variété d'une structure hyperbolique de cette façon.

Définition 1.16. Nous appelons structure de similitude une $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$ -structure, pour l'action

$$(\alpha, \beta) \cdot z \mapsto \alpha z + \beta$$

Proposition 1.17. *Soit M une variété hyperbolique réalisée comme recollement de tétraèdres idéaux de \mathbb{H}^3 . Alors l'étoile $L[s]$ d'un sommet idéal s hérite d'une structure de similitude : chaque triangle de l'étoile est déterminé à similitude près et les recollements sont donnés par des similitudes.*

Démonstration. Soit a, b, c, d les sommets d'un des tétraèdres idéaux de M . Nous allons le considérer dans le modèle du demi-espace. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $d = \infty$. Dans une horoboule centrée en ∞ , l'enveloppe convexe de la coupe du tétraèdre idéal est un triangle euclidien. La classe de similitude ne dépend pas de l'horoboule choisie ; et nous pouvons même, en passant à la limite, considérer la trace dans $\mathbb{C} \in \partial\mathbb{H}^3$.

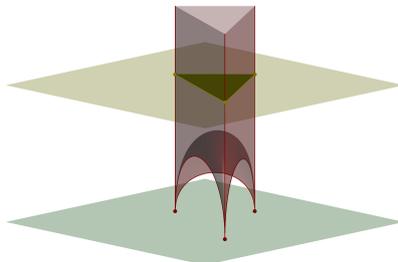


FIGURE 2 – Coupe d'un tétraèdre idéal par une horoboule

Pour construire l'étoile de s , nous pouvons donc considérer des voisinages bornés par des horoboules. Les identifications de côtés se font alors par des similitudes, ce qui munit $L[s]$ privé des traces des arêtes d'une structure de similitude. Comme la structure hyperbolique s'étend aux arêtes, la somme des angles dièdres autour de chaque arête du recollement vaut 2π , et la structure de similitude s'étend à tout $L[s]$. \square

Proposition 1.18. *Soit M une variété réalisée comme recollement de tétraèdres idéaux de \mathbb{H}^3 . Alors l'étoile d'un sommet idéal est un tore.*

Démonstration. Soit s un sommet idéal après le recollement. Nous savons que $\chi(L[s]) = a_s - f_s + t_s$. Mais la somme des degrés des sommets vaut $2f_s = 3t_s$, d'où $f_s = \frac{3}{2}a_s$. D'autre part, grâce à la structure de similitude, nous avons une notion d'angle, et la somme des angles autour des sommets vaut $2\pi a_s = \pi t_s$, d'où $a_s = \frac{1}{2}t_s$. Nous en déduisons que $\chi(L[s]) = 0$. Comme nous considérons un recollement orienté, $L[s]$ l'est aussi, et donc il s'agit d'un tore. \square

Proposition 1.19. *Soit M une variété réalisée comme recollement de t tétraèdres idéaux de \mathbb{H}^3 . Alors le nombre d'arêtes de M est égal au nombre de tétraèdres de M .*

Démonstration. Notons $L[M] = \sqcup_s L[s]$. On a $\chi(L[M]) = \sum_s \chi(L[s]) = 0$. Or $L[M]$ est une surface (non nécessairement connexe) triangulée, avec :

- $4t$ triangles.
- $\frac{3}{2} \times 4t = 6t$ arêtes, puisque $2f_s = 3t_s$.
- $2a$ sommets, où a est le nombre d'arêtes après le recollement ; chacune intersecte exactement deux fois $L[M]$.

D'où $0 = \chi(L[M]) = 2a - 6t + 4t = 2(a - t)$ et donc $t = a$. \square

2 Une structure hyperbolique sur le complémentaire du nœud de 8

Nous allons prendre comme exemple le complémentaire du nœud de 8. Il s'agit du cas le plus simple ; il est possible de le trianguler avec deux tétraèdres et de les munir de structures hyperboliques compatibles.

2.1 Le nœud de 8

Un nœud est un plongement du cercle dans \mathbb{R}^3 , ou dans son compactifié d'Alexandroff qui est la sphère \mathbb{S}^3 . Pour avoir des espaces compacts, on choisit plus souvent cette dernière représentation. Pour étudier les nœuds, on étudie leur complémentaire dans \mathbb{S}^3 : il apporte autant d'information que le plongement lui-même et c'est un espace topologique plus facile à manipuler. Nous allons nous intéresser à un nœud très particulier, qui est un des plus simples et dont le complémentaire possède une structure hyperbolique complète. Il s'agit du nœud de 8, dont une représentation sur le plan est donnée dans la figure 3.

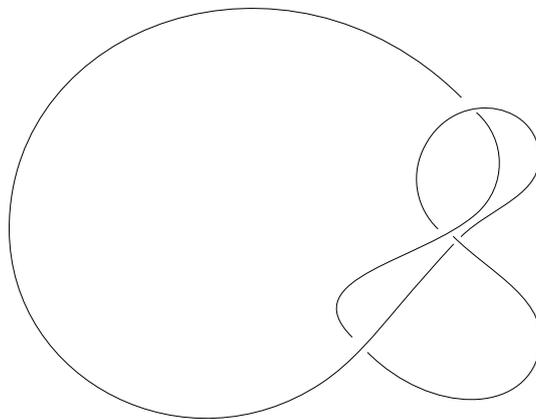


FIGURE 3 – Une représentation du nœud de 8

Nous allons utiliser le complémentaire de ce nœud dans \mathbb{S}^3 pour faire une entrée dans le sujet puis nous le prendrons systématiquement comme exemple, c'est pourquoi nous lui donnons un nom :

Notation 2.1. Nous noterons \mathbb{M}_8 l'espace topologique correspondant au complémentaire du nœud de 8 dans \mathbb{S}^3 .

2.2 Triangulation

Nous allons commencer par donner une triangulation abstraite et l'étudier. Nous vérifierons par la suite qu'elle correspond à une triangulation de \mathbb{M}_8 , à l'aide de laquelle nous pourrions le munir d'une structure hyperbolique.

Considérons les deux tétraèdres comme dans la figure 4, avec deux types d'arêtes orientées.

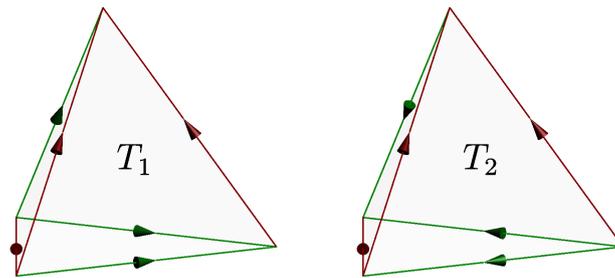


FIGURE 4 – Combinatoire du recollement

Les choix sont faits de sorte que :

- Dans chaque face il y a exactement deux arêtes de la même couleur.
- Deux arêtes de la même couleur ne se suivent pas.

À symétrie près, il n'y a que deux façons de faire ceci, à savoir celles données par T_1 et T_2 . De plus, il y a quatre combinatoires possibles pour les faces, qui changent d'orientation suivant si nous les regardons dans T_1 ou dans T_2 . Le recollement donné par l'identification de faces de même combinatoire (suivant les arêtes) est alors orienté.

Regardons-le d'un peu plus près. Il a deux arêtes : une rouge et une verte. En les suivant, nous pouvons voir que chaque sommet est le début d'une arête verte, et donc que les huit sommets des tétraèdres seront confondus, lors du recollement, en un seul sommet. Comme nous avons identifié deux tétraèdres selon leurs quatre faces, nous avons deux tétraèdres et quatre faces dans le complexe. Sa caractéristique d'Euler vaut donc : $1 - 2 + 4 - 2 = 1$. Ce recollement n'est donc pas une variété, et son unique sommet admet pour voisinage le cône sur un tore. En enlevant le sommet, ou un voisinage, nous obtenons une variété de dimension 3.

Voyons maintenant qu'il s'agit d'une triangulation qui convient pour le complémentaire du nœud de 8. Nous pouvons réarranger le nœud de la façon suivante, et rajouter deux arêtes orientées :

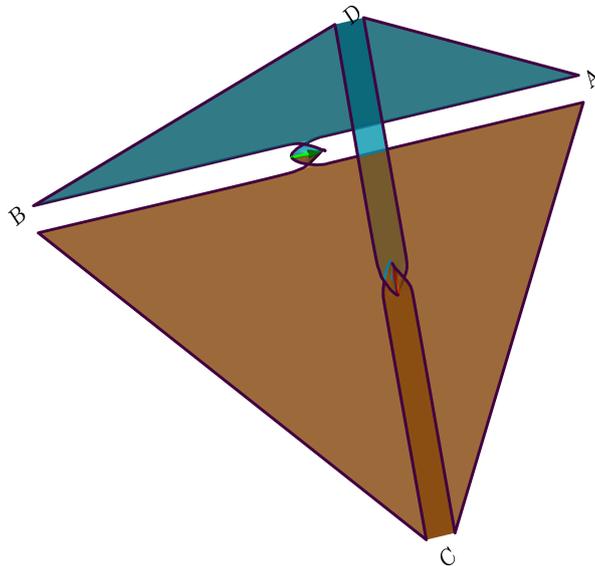


FIGURE 5 – Réarrangement du nœud de 8

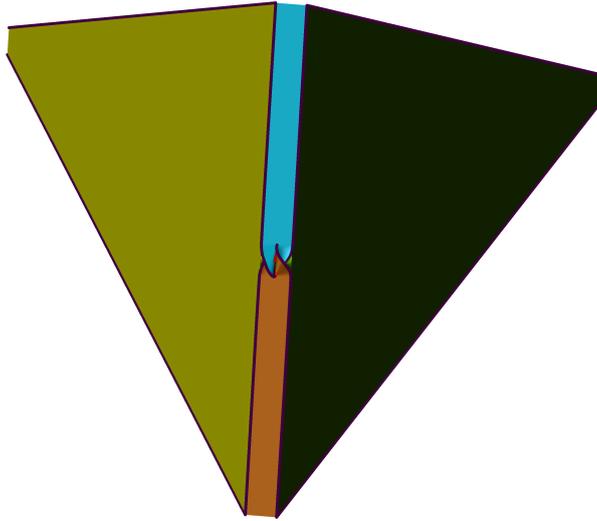


FIGURE 6 – Faces de la triangulation

Nous avons alors quatre "triangles" (chacun borné par deux arêtes, dont une comptée en double, et deux segments du nœud) qui bornent deux tétraèdres épointés (un à l'intérieur et un à l'extérieur) dans \mathbb{S}^3 privé du nœud. De plus, la combinatoire du recollement est exactement celle donnée plus haut. Nous avons donc obtenu une triangulation du complémentaire du nœud de 8.

2.3 Structure hyperbolique

Nous voulons maintenant munir le complémentaire du nœud de 8 d'une structure hyperbolique. Comme nous avons une triangulation, il suffit de munir chacun des tétraèdres épointés d'une structure hyperbolique (ici, celle d'un tétraèdre idéal) et de vérifier la compatibilité des deux structures par le recollement.

Choix

Pour chacun des deux tétraèdres, nous choisissons la structure donnée par un tétraèdre régulier idéal. Dans le modèle projectif, elle est donnée par un tétraèdre régulier :

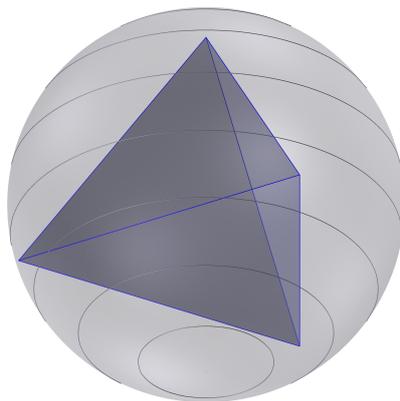


FIGURE 7 – Tétraèdre régulier dans la modèle projectif

Recollement

Les identifications des faces se font par des isométries euclidiennes, qui correspondent ici à des isométries hyperboliques. Pour le recollement autour des arêtes, grâce à la symétrie du choix, il nous suffira de vérifier que la somme des angles autour de chaque arête est 2π . Nous verrons un peu plus loin (3.2) les conditions de recollement en toute généralité pour les arêtes, et que la vérification que nous faisons est exactement celle qui correspond au critère général.

Chacune des deux arêtes est dans six combinaisons de faces différentes : il y aura donc six angles dièdres autour d'une arête lors du recollement. Dans notre cas, nous allons montrer que les angles dièdres que nous considérons valent tous $\frac{\pi}{3}$, ce qui suffit pour conclure.

Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.2. *Dans le modèle du disque, l'angle dièdre entre deux plans est le même que celui de leurs traces sur la sphère à l'infini.*

Démonstration. Deux plans qui se coupent le font suivant une géodésique. Puisque $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ agit transitivement sur les géodésiques, nous pouvons supposer qu'elle passe par 0. Les plans sont alors des plans euclidiens : puisque le modèle du disque est conforme, nous pouvons considérer les angles dans \mathbb{R}^3 muni de sa structure euclidienne. Il est alors clair que l'angle des deux plans est le même que celui de leurs traces sur la sphère.

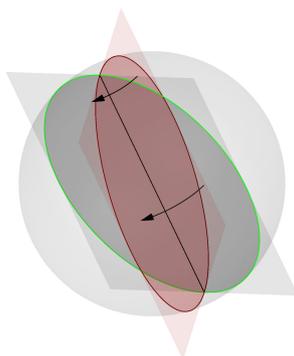


FIGURE 8 – Deux plans passant par 0 dans le modèle du disque

□

Remarque 2.3. Pour passer du modèle projectif au modèle du disque (qui est conforme), nous utilisons une projection centrale et une projection parallèle, qui laissent invariant le bord à l'infini de \mathbb{H}^3 . Le lemme 2.2 est donc aussi valable pour le modèle projectif.

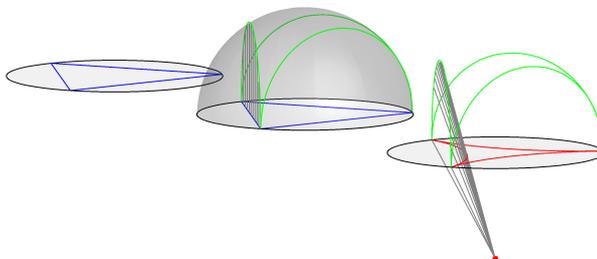
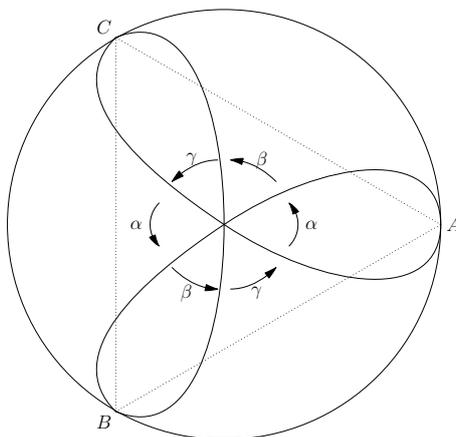


FIGURE 9 – Changement entre le modèle projectif et le modèle du disque en dimension 2

Une vue du dessus d'un tétraèdre régulier (dans le modèle projectif) est la suivante :



Par symétrie, les angles α , β et γ sont tous égaux à $\frac{\pi}{3}$, ce qui conclut la preuve du fait que la structure se prolonge aux arêtes.

2.4 Complétude

Nous venons de munir le complémentaire du nœud de 8 d'une structure hyperbolique. Un des aspects qui nous intéressera par la suite est celui de la complétude. Le théorème de rigidité de Mostow entraîne l'unicité d'une structure hyperbolique complète sur une variété de dimension ≥ 3 . Nous utiliserons ici un critère pour montrer que la structure que nous venons de donner au complémentaire du nœud de 8 est complète.

Proposition 2.4 ([6] p.145). *Une variété hyperbolique M est complète si et seulement s'il existe une famille $(S_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de compacts de M telle que :*

- $\bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} S_t = M$ et
- Pour tous $t, a \in \mathbb{R}^+$, S_{t+a} contient le voisinage de rayon a de S_t .

Démonstration.

\Rightarrow Si M est complète et $x \in M$, la suite de compacts $S_t = \overline{B(x, t)}$ vérifie les deux hypothèses.

\Leftarrow Si nous avons une famille $(S_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de compacts de M vérifiant les deux hypothèses, toute suite de Cauchy dans M est incluse dans un des S_t , et donc converge. \square

Proposition 2.5. *La structure hyperbolique du complémentaire du nœud de 8 donnée par deux tétraèdres idéaux réguliers est complète.*

Démonstration. Notons C_1 et C_2 les centres des deux tétraèdres T_1 et T_2 du recollement. Considérons, pour $t \in \mathbb{R}_+$, $S_t = \overline{B}(C_1, t) \cup \overline{B}(C_2, t)$. Puisque les tétraèdres sont réguliers, les boules se recollent aux bords, et nous obtenons une famille de compacts du complémentaire du nœud de 8 qui vérifie les hypothèses de la proposition 2.4. \square

2.5 Arithméticité

En guise d'ouverture sur cette structure particulière, nous pouvons nous attarder sur le caractère arithmétique de cette variété hyperbolique. En effet, le groupe d'isométries de \mathbb{H}^3 est isomorphe à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, agissant sur le bord à l'infini (que l'on identifie à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$) par homographies. Comme nous avons une structure complète sur le complémentaire du nœud de 8, nous pouvons l'exprimer comme $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$, où Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Nous allons voir qu'un des choix pour Γ (qui n'est défini qu'à conjugaison près) a des propriétés arithmétiques. Rappelons d'abord les faits suivants :

Proposition 2.6. • $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit simplement 3-transitivement sur $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

- L'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ préserve le birapport.

Notons $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ une racine cubique de l'unité. Nous allons choisir pour représentants de T_1 et T_2 les tétraèdres idéaux de sommets $(\infty, 0, 1, -\omega^2)$ et $(0, 1, -\omega, \infty)$: nous aurons déjà l'identification sur la face $(0, 1, \infty)$ par $\mathrm{Id}_{\mathbb{H}^3}$. Vérifions d'abord que ce choix est en accord avec celui fait précédemment :

Lemme 2.7. *Les tétraèdres idéaux T_1 et T_2 de sommets idéaux $(\infty, 0, 1, -\omega^2)$ et $(0, 1, -\omega, \infty)$ respectivement sont des tétraèdres idéaux réguliers.*

Démonstration. Montrons que T_1 est régulier. Pour le faire, il suffit de vérifier que les permutations paires des sommets peuvent être exprimées par des éléments du groupe d'isométries directes de \mathbb{H}^3 , que nous identifierons à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

- 0, 1, et $-\omega^2$ forment un triangle équilatéral dans \mathbb{C} ; il existe alors une similitude qui envoie 0 sur 1, 1 sur $-\omega^2$, $-\omega^2$ sur 0 (et ∞ sur ∞). Elle est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} \omega^2 & \omega \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$.

Donc ce 3-cycle est réalisé dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

- L'homographie donnée par $\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ envoie 0 sur ∞ , ∞ sur 0, 1 sur $-\omega^2$ et $-\omega^2$ sur 1. Elle réalise donc une double transposition des sommets.

Puisque le groupe alterné \mathcal{A}_3 est engendré par un 3-cycle et une double transposition, toutes les permutations paires des sommets de T_1 sont réalisées par des éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Nous en déduisons que T_1 est régulier. De même, T_2 est régulier. \square

Remarque 2.8. • Les matrices utilisées pour permuter les sommets de T_1 et T_2 sont dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$.

- Puisque l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est simplement 3-transitive et que \mathcal{A}_3 est de cardinal 12, $\#\mathrm{Stab}(T_1) = 12$.

Une fois que nous avons fait cette observation, nous pouvons voir que les éléments de l'holonomie pour la développante partant de $T_1 \cup T_2$ appartiennent tous à $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$.

Proposition 2.9. *Les identifications des faces de $T_1 \cup T_2$ suivant le schéma du complémentaire du nœud de 8 sont données par des éléments de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire les matrices des identifications :

- $\begin{pmatrix} -\omega^2 & 1 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$ envoie $(0, \infty, -\omega^2)$ sur $(1, -\omega, \infty)$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$ envoie $(0, 1, -\omega^2)$ sur $(0, -\omega, \infty)$.
- $\begin{pmatrix} \omega^2 & \omega \\ -\omega & \omega - 1 \end{pmatrix}$ envoie $(1, \infty, -\omega^2)$ sur $(1, -\omega, 0)$.

□

Nous sommes maintenant presque en mesure de montrer un résultat sur l'arithméticité du complémentaire du nœud de 8. Nous aurons besoin du lemme suivant sur la structure de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$.

Lemme 2.10. *$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$ est engendré par $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])}(\infty) \cup \mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])}(0)$, où les stabilisateurs sont sur l'action par homographies sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ envoie ∞ sur 0 et que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Stab}(\infty)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Stab}(0)$. Il suffit alors de montrer que pour tout $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$ il existe un entier n et des éléments $g_1, \dots, g_n \in \mathrm{Stab}(\infty) \cup \mathrm{Stab}(0)$ tels que $g_n \cdots g_1 \gamma$ envoie 0 sur 0 ou ∞ . Soit $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$. Si $\gamma \cdot 0 = 0$ ou ∞ , avons déjà le résultat. Sinon, $\gamma \cdot 0 = \frac{r_0}{r_1}$ avec $r_0, r_1 \in \mathbb{Z}[\omega] \setminus \{0\}$.

Nous savons que $\mathbb{Z}[\omega]$ est un anneau euclidien pour la norme héritée de \mathbb{C} . Nous disposons donc d'une division euclidienne. Écrivons l'algorithme d'Euclide pour r_0 et r_1 :

$$\begin{aligned} r_0 &= r_1 q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= r_n q_n + r_{n+1} \end{aligned}$$

Nous avons alors pour tout $i \geq 1$, $q_i, r_i \in \mathbb{Z}[\omega]$ puis $r_n \neq 0$ et $r_{n+1} = 0$. Remarquons maintenant les faits suivants :

- $\begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Stab}(\infty)$ et $\begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a-bq}{b}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Stab}(0)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b-aq}$

Posons maintenant, pour $k \geq 1$, $g_k = \begin{pmatrix} 1 & -q_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Stab}(\infty)$ si k est impair et $g_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_k & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Stab}(0)$ si k est pair. Par une récurrence immédiate nous avons, pour $1 \leq k \leq n$,

$$\text{que } g_k \cdots g_1 \gamma \cdot 0 = \begin{cases} \frac{r_{k+1}}{r_k} & \text{si } k \text{ est impair} \\ \frac{r_k}{r_{k+1}} & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}$$

Donc

$$g_n \cdots g_1 \gamma \cdot 0 = \begin{cases} \frac{r_{n+1}}{r_n} = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{r_n}{r_{n+1}} = \infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

□

Proposition 2.11. *Le groupe fondamental du complémentaire du nœud de 8 est isomorphe à un sous-groupe d'indice 12 de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$.*

Démonstration. Puisque la structure hyperbolique sur le complémentaire du nœud de 8 donnée par T_1 et T_2 est complète, $T_1 \cup T_2$ est un domaine fondamental pour l'image Γ de l'holonomie $\pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Nous avons donc un pavage $\mathcal{P}_{\mathbb{H}^3}$ de \mathbb{H}^3 , qui donne, en le coupant par une horosphère que l'on identifie à \mathbb{C} en projetant sur $\partial\mathbb{H}^3$ dans le modèle du demi-espace, un pavage $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ de \mathbb{C} par des triangles équilatéraux dont les sommets sont donnés par $\mathbb{Z}[\omega]$. De plus, grâce à la proposition 2.9, nous savons que $\Gamma \subseteq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$.

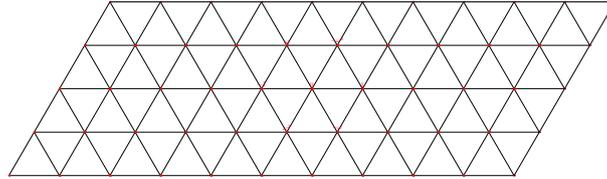


FIGURE 10 – Pavage de \mathbb{C} par des triangles équilatéraux

Nous savons, grâce à la remarque 2.8 et à la proposition 2.9, que $\Gamma \cdot \mathrm{Stab}(T_1) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$. Notons $\mathcal{T}_1 = \Gamma \cdot T_1$ la partie du pavage $\mathcal{P}_{\mathbb{H}^3}$ qui correspond au tétraèdre T_1 . Nous savons alors que $\Gamma \cdot \mathrm{Stab}(T_1) \subset \mathrm{Stab}(\mathcal{T}_1)$. Mais $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit simplement 3-transitivement sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et \mathcal{T}_1 est une collection de tétraèdres disjoints : un élément γ de $\mathrm{Stab}(\mathcal{T}_1)$ est uniquement déterminé par le tétraèdre γT_1 et un ordre sur ses sommets, qui doit respecter l'orientation. Comme tous ces tels ordres sont atteints par $\mathrm{Stab}(T_1)$ (voir la preuve du lemme 2.7), nous avons que $\Gamma \cdot \mathrm{Stab}(T_1) = \mathrm{Stab}(\mathcal{T}_1)$ et qu'il s'agit donc d'un groupe.

Montrons maintenant que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])}(\infty) \subset \Gamma \cdot \mathrm{Stab}(T_1)$. En considérant une horosphère (ou sa projection sur le bord), nous disposons d'une action de $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])}(\infty)$ sur \mathbb{C} , donnée par des matrices du type $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \{1, \omega, \omega^2\}$ et $\beta \in \mathbb{Z}[\omega]$, et donc par des rotations d'angle 0 ou $\pm \frac{2\pi}{3}$ suivies d'une translation dans le réseau $\mathbb{Z}[\omega]$. Puisque ces deux opérations préservent la trace $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ de \mathcal{T}_1 sur \mathbb{C} ,

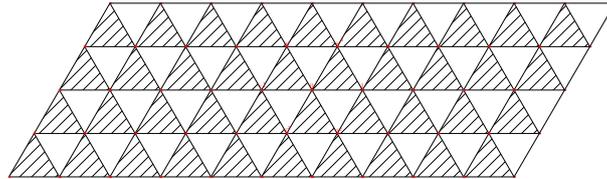


FIGURE 11 – Trace $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ de \mathcal{T}_1 sur le pavage

$\mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])}(\infty)$ préserve \mathcal{T}_1 .

Nous en déduisons que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])}(\infty) \subset \Gamma \cdot \mathrm{Stab}(T_1)$ et, par symétrie, que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])}(0) \subset \Gamma \cdot \mathrm{Stab}(T_1)$.

Donc $\langle \mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])}(0) \cup \mathrm{Stab}_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])}(\infty) \rangle \subset \Gamma \cdot \mathrm{Stab}(T_1)$. Et, grâce au lemme 2.10, $\Gamma \cdot \mathrm{Stab}(T_1) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$.

Or $\Gamma \cap \mathrm{Stab}(T_1) = \{\mathrm{Id}\}$ et, grâce à la remarque 2.8, $\#\mathrm{Stab}(T_1) = 12$, d'où $[\Gamma : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])] = 12$. □

3 Recollement de structures hyperboliques sur des tétraèdres idéaux

Nous essayons ici de munir un recollement de tétraèdres (épointés) d'une structure hyperbolique, en fixant la structure de chaque tétraèdre comme celle d'un tétraèdre idéal. Dans cette section, nous allons établir des conditions pour qu'une collection de telles structures hyperboliques soit compatible avec le recollement. Dans un premier temps, nous verrons que la structure sur un tétraèdre peut être paramétrée par un unique nombre complexe associé à une arête, puis nous verrons les conditions, algébriques, pour que ces structures se recollent, et pour que ce recollement soit complet. Nous mettrons ensuite ceci à l'œuvre sur l'exemple du complémentaire du nœud de 8.

3.1 Paramétrisation de la structure hyperbolique d'un tétraèdre idéal

Commençons par considérer un tétraèdre idéal T , de sommets $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{CP}^1$, où les sommets sont nommés de sorte que le triplet (a_1, a_2, a_3) soit orienté positivement par la normale sortante. Une paramétrisation de sa structure hyperbolique sortira de la suite de remarques suivante :

Remarque 3.1. Puisque $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ agit simplement 3-transitivement sur \mathbb{CP}^1 , il existe un unique $\phi \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ tel que $\phi(a_1) = \infty$, $\phi(a_2) = 0$, $\phi(a_3) = 1$ et $\phi(a_4) = z \in \mathbb{C}$. Comme les homographies préservent le birapport, nous avons $[a_1, a_2, a_3, a_4] = [\infty, 0, 1, z] = z$ et, grâce au choix sur l'orientation, $\mathrm{Im}(z) > 0$. La structure hyperbolique sur T est alors uniquement déterminée par z .

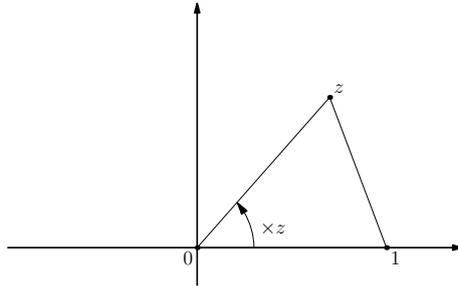
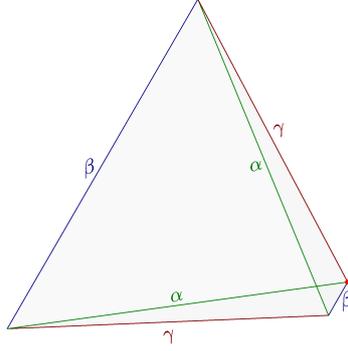


FIGURE 12 – Coupe par une horoboule vue dans \mathbb{C}

Remarque 3.2. Puisque le modèle du demi-espace est conforme, $\arg(z)$ est l'angle dièdre entre les faces $(a_1 a_2 a_3)$ et $(a_1 a_2 a_4)$. La somme des angles dièdres issus d'un sommet idéal est alors π , et donc la classe de similitude (orientée) de l'étoile d'un sommet de T ne dépend pas du choix de ce sommet.

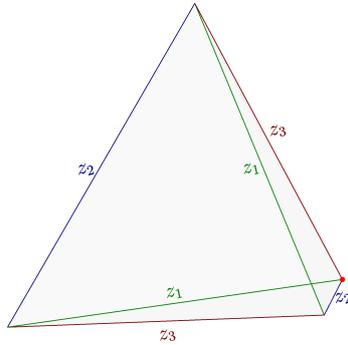


Notation 3.3. Nous associons le birapport z à l'arête (a_1a_2) . Par symétrie, il est aussi associé à l'arête (a_3a_4) . Notons-le $R(a_1, a_2) = R(a_2, a_1) = R(a_3, a_4) = z_1 = z$.

Remarque 3.4. En considérant a_1 fixé en ∞ , et en regardant les similitudes correspondantes, nous avons $z_2 = R(a_1, a_4) = -\frac{1-z}{z}$ et $z_3 = R(a_1, a_3) = \frac{1}{1-z}$.

Remarque 3.5. Étant donnée une permutation paire $\sigma \in \mathcal{A}_4$, les points $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}$ sont orientés positivement pour la convention que nous avons prise. Nous avons donc que $R(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}) = [a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}]$. Réciproquement, $R(a_i, a_j) = [a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}]$ où σ est la seule permutation paire telle que $\sigma(1) = i$ et $\sigma(2) = j$. Ceci permet de retrouver les résultats de la remarque 3.4

Notation 3.6. Nous pouvons finalement associer à chaque arête $e = (a_i, a_j)$ du tétraèdre T un nombre complexe $z(e) = R(a_i, a_j)$, qui détermine la structure hyperbolique sur le tétraèdre épointé.



Enfin, nous faisons une dernière remarque sur les trois invariants z_1, z_2 et z_3 associés aux arêtes d'un tétraèdre idéal :

Remarque 3.7. Nous avons :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 z_3 &= -1 \\ 1 - z_1 + z_1 z_2 & \\ \text{Im}(z_1) > 0, \text{Im}(z_2) > 0 \text{ et } \text{Im}(z_3) > 0 & \end{aligned}$$

Par la suite, nous allons considérer des recollements de tétraèdres idéaux. La paramétrisation que nous venons de donner nous fournit de l'information sur la structure des faces du tétraèdre.

Plus précisément, nous avons une structure de similitude donnée par les nombres z_i , en considérant la trace du tétraèdre sur $\mathbb{C} \subset \partial\mathbb{H}^3$. Mais cette structure est la même que celle qui est obtenue en coupant par une horosphère centrée en un des sommets idéaux. Ceci munit l'étoile d'un sommet lors d'un recollement, privée des traces des arêtes, d'une structure de similitude.

3.2 Conditions de recollement

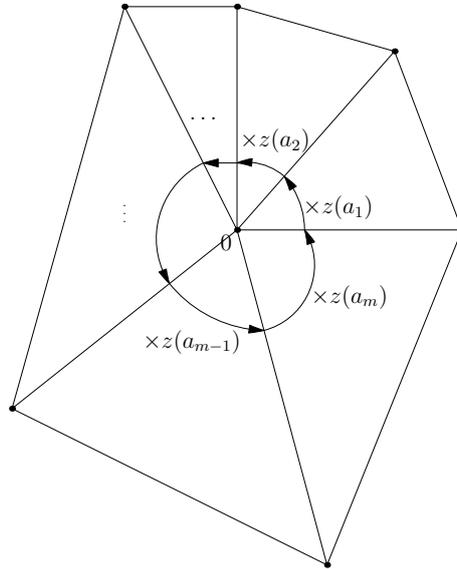
Nous considérons ici un recollement topologique de tétraèdres époinés M , que nous voulons munir d'une structure hyperbolique en choisissant une structure de tétraèdre idéal pour chaque tétraèdre. Nous avons alors, pour chaque arête a dans un tétraèdre, un nombre complexe $z(a)$. Nous avons vu dans la section 1.2 que la structure s'étend naturellement aux points à l'intérieur des faces des tétraèdres. Pour munir la variété topologique d'une structure hyperbolique, il suffit de l'étendre aux points sur les arêtes du recollement. Voici une condition nécessaire et suffisante :

Proposition 3.8. *Soit a une arête du recollement M . Notons a_1, \dots, a_m les arêtes des tétraèdres qui s'identifient à a . La structure hyperbolique d'un recollement de tétraèdres s'étend à l'arête a si et seulement si :*

- $z(a_1) \cdots z(a_m) = 1$ et
- $\arg(z(a_1)) + \cdots + \arg(z(a_m)) = 2\pi$

Démonstration. Nous nous plaçons dans \mathbb{H}^3 , dans le modèle du demi-espace, pour considérer la développante $D : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^3$. La structure hyperbolique s'étend alors aux arêtes si et seulement si D est une isométrie. Soit s une des extrémités de a . En plaçant s à l'infini pour tous les tétraèdres du recollement, nous remarquons (par exemple en coupant par une horosphère) que la structure hyperbolique s'étend à a si et seulement si la structure de similitude s'étend au point donné par a dans l'étoile de s . Mais ceci a lieu si et seulement si $z(a_1) \cdots z(a_m) = 1$ et qu'il n'y a pas de recouvrements, c'est-à-dire, si et seulement si :

- $z(a_1) \cdots z(a_m) = 1$ et
- $\arg(z(a_1)) + \cdots + \arg(z(a_m)) = 2\pi$



□

Remarque 3.9. La deuxième condition est, en quelque sorte, secondaire. En effet, si nous considérons la première comme étant un produit dans le revêtement universel de \mathbb{C}^* , la deuxième est automatique. D'autre part, si, comme nous le ferons plus tard, nous considérons des petites déformations à partir d'une structure fixée, La première condition entraîne que $\arg(z(a_1)) + \dots + \arg(z(a_m)) \in 2\pi\mathbb{Z}$, et donc que $\arg(z(a_1)) + \dots + \arg(z(a_m)) = 2\pi$.

3.3 Conditions de complétude

Une fois que nous avons une structure hyperbolique sur un recollement de tétraèdres, nous pouvons nous demander si elle est complète ou si elle ne l'est pas, pour pouvoir ensuite réfléchir au complété métrique de la variété. Nous donnons ici un critère, fort utile, pour tester si la structure est complète. En prenant un peu plus de distance, ce critère commence à montrer le pseudo-principe selon lequel la structure d'une variété à pointes est déterminée par ce qui se passe aux pointes de la variété.

Théorème 3.10 ([6] p.152). *Soit M un recollement de tétraèdres muni d'une structure hyperbolique. Il y a équivalence entre :*

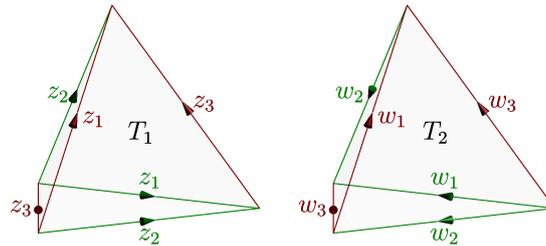
1. M est complète.
2. Pour tout sommet idéal s de M , l'holonomie de l'étoile de s est constituée d'isométries.
3. Pour tout sommet idéal s de M , la structure de similitude sur l'étoile de s provient d'une structure euclidienne.
4. Pour tout sommet idéal s de M , l'étoile de s est complète en tant que variété de similitude.

Idée de la démonstration. ³ L'équivalence entre (2), (3) et (4) découle de l'étude des structures affines sur le tore : les structures complètes sont exactement les structures euclidiennes.

Pour l'équivalence avec (1), le sens (1) \Rightarrow (2) est clair. Pour l'autre sens, si nous avons (2), les sections par des horoboules autour des sommets idéaux se recollent dans M . Nous avons donc, en enlevant des voisinages des sommets idéaux bornés par des horoboules de plus en plus proches des sommets en question, nous avons une famille $(S_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de compacts de M qui vérifient les hypothèses de la proposition 2.4. En l'appliquant, nous avons (1). \square

3.4 Retour sur le complémentaire du nœud de 8

Dans la section 2, nous avons considéré le complémentaire du nœud de 8 comme recollement de deux tétraèdres idéaux. Nous allons maintenant paramétrer les structures hyperboliques que nous pouvons y mettre par :



$$z_1 = z, \quad z_2 = \frac{z-1}{z}, \quad z_3 = \frac{1}{1-z}$$

3. Pour une preuve avec plus de détails, voir [6] p.152 et précédentes.

$$w_1 = w, \quad w_2 = \frac{w-1}{w}, \quad w_3 = \frac{1}{1-w}$$

Les conditions de recollement (3.2) s'écrivent alors :

- $z_1^2 z_2 w_1^2 w_2 = 1$
- $z_2 z_3^2 w_2 w_3^2 = 1$

Puisque $z_1 z_2 z_3 = w_1 w_2 w_3 = -1$, les deux conditions sont équivalentes. Pour que les structures se recollent, il suffit donc que z et w vérifient :

- $z(z-1)w(w-1) = 1$
- $\text{Im}(z) > 0, \text{Im}(w) > 0$ (condition géométrique : cf 3.1)

L'équation se réécrit : $z^2 - z - \frac{1}{w(w-1)} = 0$, et nous pouvons la résoudre :

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{w(w-1)}}}{2}$$

Si $\text{Im}(w) > 0$, il y a exactement une solution z avec $\text{Im}(z) > 0$, sauf lorsque

$$1 + \frac{4}{w(w-1)} = x \in \mathbb{R}^+$$

c'est-à-dire $w = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{\frac{16}{1-x} - 1})$. Pour avoir $\text{Im}(w) > 0$ il faut $x \in [0, 1[$ i.e.

$$w \in \frac{1}{2} + i \left[\frac{\sqrt{15}}{2}, \infty \right[$$

La structure est donc paramétrée par un unique nombre complexe w dans la région :

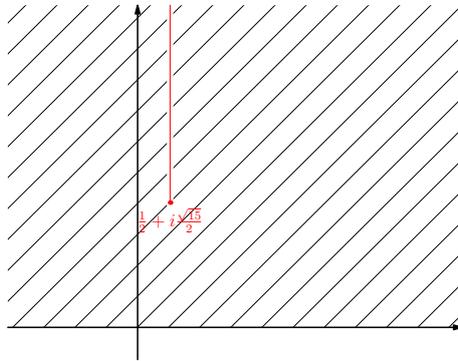


FIGURE 13 – Paramètre de la structure hyperbolique

Remarque 3.11. Le choix fait dans la section 2, à savoir celui de deux tétraèdres idéaux réguliers, est donné par $z = w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega$. Il vérifie bien les conditions de recollement.

Nous allons nous intéresser maintenant à la question de la complétude. Nous savons déjà, grâce à la proposition 2.5, que la structure donnée par $z = w = \omega$ est complète, et, grâce au théorème de rigidité de Mostow, qu'il s'agit de l'unique structure complète. Nous allons redémontrer ces faits avec les critères liés aux paramètres z et w , en mettant à l'œuvre une méthode qui peut être rendue algorithmique dans le cas général.

Proposition 3.12. *La seule structure hyperbolique complète sur le complémentaire du nœud de 8 compatible à la triangulation est celle donnée par $z = w = \omega$.*

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème 3.10. Considérons d'abord l'étoile du sommet de la triangulation :

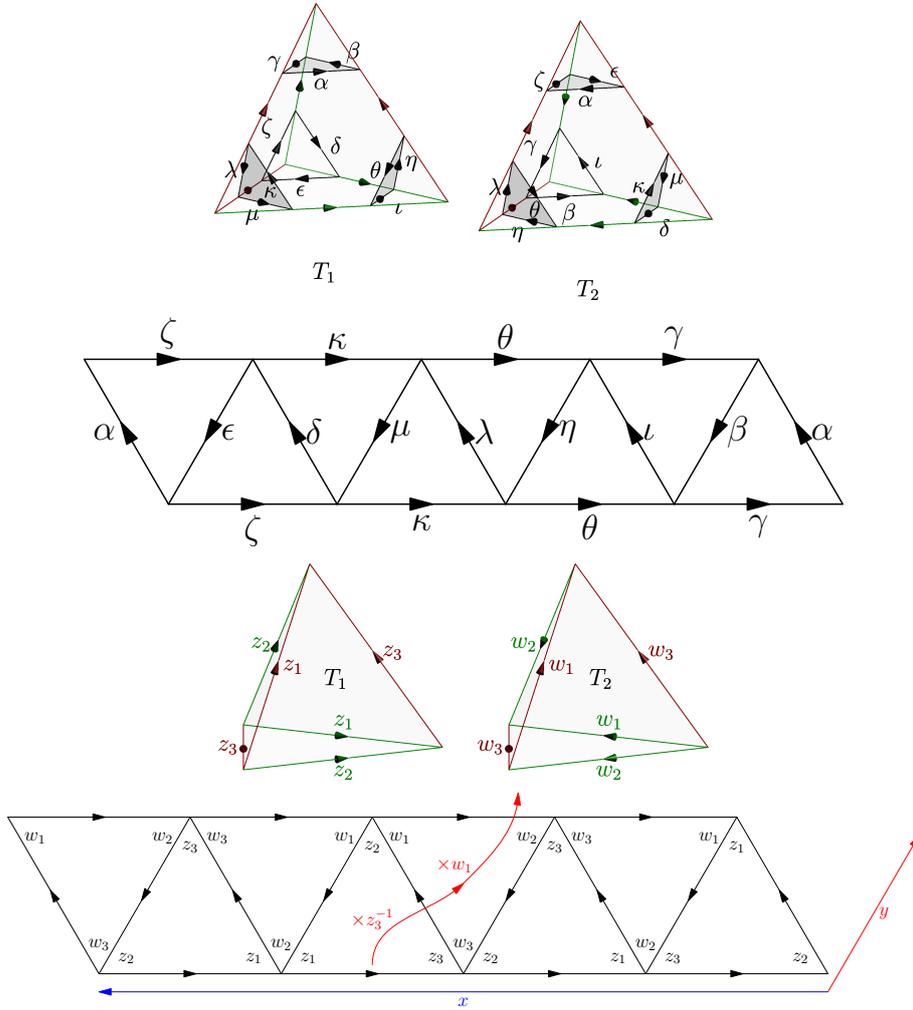


FIGURE 14 – Étoile du sommet idéal

Le passage d'un triangle au suivant est donné par une translation et la multiplication par un des z_i, w_i . Nous choisissons une base de l'homologie x, y comme dans la figure.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{La structure est complète} & \iff & \text{l'holonomie est composée d'isométries} \\
 & \iff & \text{les holonomies d'une base de l'homologie } H_x, H_y \text{ sont} \\
 & & \text{des isométries} \\
 & \iff & \begin{cases} 1 = H'_x = z_2 z_3 w_2 z_1 z_2 w_3 z_3 z_1 w_2 z_1 z_2 w_3 \\ 1 = H'_y = \frac{w_1}{z_3} \\ 1 = z^2 (w_2 w_3)^2 = \left(\frac{z}{w}\right)^2 \\ 1 = (1-z)w \end{cases} \\
 & \iff &
 \end{array}$$

C'est-à-dire que la structure est complète si et seulement si $z = w$ (car $\text{Im}(z) > 0$ et $\text{Im}(w) > 0$) et $z(1-z) = -1$ i.e. $z^2 - z + 1 = 0$. Puisque $\text{Im}(z) > 0$, ceci arrive uniquement lorsque $z = w = \omega$. \square

4 Chirurgie de Dehn

Dans le cadre que nous sommes en train de considérer, nous avons des recollements de tétraèdres idéaux, et donc des variétés hyperboliques à pointes. Ces pointes, comme nous l'avons vu dans la section 1.2, sont des cônes sur des tores : en enlevant un voisinage du sommet idéal nous obtenons un bord torique. La chirurgie de Dehn permet de "boucher" des pointes (topologiquement) en choisissant une façon de recoller un tore plein sur le bord torique ainsi obtenu.

D'autre part, nous pouvons nous intéresser au complété métrique d'une variété hyperbolique non complète. Dans notre cas, elle sera donnée par un choix de paramètres z_i qui ne donnent pas une structure complète sur le recollement de tétraèdres (qui est unique par le théorème de rigidité de Mostow). Il suffira, en général, de rajouter un point ou une géodésique fermée.

Ces deux procédés, menés à partir d'un recollement de tétraèdres muni d'une structure hyperbolique, ne donnent pas toujours des variétés hyperboliques : le résultat aura, en général, des singularités. Cependant, si le procédé métrique n'a pas de singularités, le résultat est obtenu topologiquement par une chirurgie de Dehn et, réciproquement, pour la plupart des chirurgies de Dehn, la variété topologique obtenue est le complété d'une structure hyperbolique non complète. Dans cette section, nous allons décrire ces deux opérations puis nous étudierons le lien entre elles.

4.1 Procédé topologique

Le procédé que nous allons utiliser consiste à coller un tore plein sur un bord torique d'une variété de dimension 3, afin d'avoir une variété sans bord. Voyons d'abord comment nous pouvons décrire formellement cette identification.

Notation 4.1. Pour éviter les confusions, dans cette discussion nous appellerons *tore* une variété de dimension 2 homéomorphe à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, et *tore plein* une variété à bord de dimension 3 homéomorphe à $\overline{D} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Ainsi, le bord d'un tore plein est un tore.

Remarque 4.2. Pour un tore plein \mathbb{T} , nous avons un morphisme surjectif $\pi_1(\partial\mathbb{T}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T})$. Son noyau est engendré par un élément primitif m , bien défini au signe près, qui est appelé méridien.

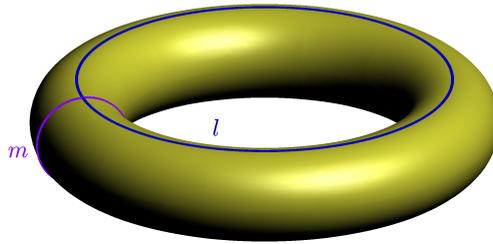


FIGURE 15 – Un méridien m et une latitude l dans un tore plein

Définition 4.3. Étant donné un tore plein \mathbb{T} et un choix de méridien m , nous appelons longitude un élément primitif $l \in \pi_1(\mathbb{T})$ tel que $[l, m] = 1$ et $\langle l, m \rangle = \pi_1(\mathbb{T})$.

Définition 4.4 (Chirurgie de Dehn). Nous nous donnons une variété de dimension 3 M avec un bord torique T et un tore plein \mathbb{T} , muni d'un méridien m et d'une longitude l . Pour le choix (α, β) d'une base de l'homologie de T , nous définissons la variété \tilde{M} , obtenue à partir de M par chirurgie de Dehn sur α, β comme $M \sqcup \mathbb{T} / \sim$, où \sim est une identification de T à $\partial\mathbb{T}$ telle que $\alpha \sim m$ et $\beta \sim l$.

Nous pouvons faire quelques remarques sur ce procédé :

- Remarque 4.5.** • \tilde{M} est encore une variété, mais elle n'a plus de bord en T .
- Dans \tilde{M} , une courbe représentant α dans M est nulle en homologie, et une courbe représentant β ne l'est pas.
 - Nous avons décrit le procédé pour un seul bord torique, mais il peut être utilisé à plusieurs reprises lorsqu'on dispose de plusieurs composantes toriques dans le bord.
 - Lorsqu'une variété est homéomorphe à l'intérieur de M , le procédé de chirurgie de Dehn que nous venons de définir peut s'appliquer.

Dans le cas que nous traitons, nous avons des recollements de tétraèdres idéaux. Grâce à la proposition 1.18, nous savons que l'étoile d'un sommet idéal du recollement M sera un tore : M sera donc homéomorphe à l'intérieur d'une variété à bord compacte M' avec s bords toriques, où s est le nombre de sommets idéaux de M . Il est alors possible d'effectuer des chirurgies de Dehn sur les pointes de M pour les "boucher".

Remarque 4.6. Nous utiliserons souvent un abus de langage : nous parlerons de latitude et méridien pour deux générateurs du π_1 d'un tore, sans savoir a priori quel élément sera trivialisé par une éventuelle chirurgie de Dehn.

Finalement, nous pouvons citer un résultat qui assure qu'à l'aide de ce procédé, qui est assez simple, il est possible de construire n'importe quelle variété de dimension 3 :

Théorème 4.7 (Lickorish-Wallace). *Soit M une variété compacte sans bord de dimension 3. Alors M peut être obtenue à partir de \mathbb{S}^3 en enlevant des voisinages tubulaires d'un nombre fini de courbes fermées et en effectuant des chirurgies de Dehn sur les bords toriques ainsi obtenus.*

4.2 Complétés métriques de variétés hyperboliques

Nous nous donnons ici une variété hyperbolique M obtenue comme recollement de tétraèdres idéaux. En nous donnant uniquement des structures compatibles sur les tétraèdres, nous n'obtiendrons pas a priori une variété complète. Nous pouvons donc nous intéresser au complété métrique de M . La première observation à faire est que la seule obstruction à la complétude de M se trouve aux pointes des M . En effet, M privée d'un voisinage des pointes est une variété à bord compacte (et donc complète). Nous pouvons alors en déduire :

Proposition 4.8. *Pour chaque sommet idéal s de M , notons $\mathcal{V}(s)$ un voisinage (assez petit) de s dans M . Alors le complété métrique \bar{M} de M est obtenu en ôtant les voisinages $\mathcal{V}(s)$ où la structure n'est pas complète et en recollant à la place les complétés métriques $\bar{\mathcal{V}}(s)$.*

Structure des étoiles des sommets

Nous devons donc nous intéresser aux voisinages des sommets idéaux où les pointes ne sont pas complètes. Fixons s un tel sommet, et plaçons-le en $\infty \in \partial\mathbb{H}^3$ dans le modèle du demi-espace pour calculer la développante et l'holonomie. Pour la structure de similitude induite sur l'étoile de s , nous pouvons considérer la développante dans une horoboule centrée en ∞ , que l'on peut identifier à \mathbb{C} . Pour éviter les ambiguïtés, nous prendrons la notation suivante :

Notation 4.9. Pour le sommet s placé en $\infty \in \partial\mathbb{H}^3$ nous noterons ici (D, H) la restriction du couple développante-holonomie pour la structure hyperbolique de M au $\pi_1(L[s])$, et (δ, η) le couple développante-holonomie qui est induit sur la structure de similitude de $L[s]$. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}
 D : \pi_1(L[s]) \cdot M \subseteq \widetilde{M} &\rightarrow \mathbb{H}^3 & H : \pi_1(L[s]) \subseteq \pi_1(M) &\rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \\
 \delta : \widetilde{L[s]} &\rightarrow \mathbb{C} & \eta : \pi_1(L[s]) &\rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

Fixons une longitude l et un méridien m pour l'étoile de s . Remarquons d'abord les faits suivants :

Remarque 4.10. Grâce à la proposition 3.10, nous savons que l'étoile de s est un tore qui porte une structure de similitude qui n'est pas complète, et donc pas euclidienne. L'holonomie $\eta(l)$ n'est donc pas une translation et fixe alors un point. Quitte à composer par une translation, nous pouvons supposer qu'elle fixe 0. Elle est alors donnée par $z \mapsto az$ avec $a \in \mathbb{C}^*$. Comme $\pi_1(L[s])$ est abélien, $\eta(m)$ fixe aussi 0, et est donnée par $z \mapsto bz$, avec $b \in \mathbb{C}^*$ et non \mathbb{R} -lié à a . En particulier η est à valeurs dans \mathbb{C}^* , 0 n'est pas atteint par la développante δ et l'axe Oz n'est pas atteint par D .

De ce fait, nous en déduisons que $L[s]$ porte une $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ -structure. Puisqu'un tore est compact, la $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ -structure de $L[s]$ est complète⁴, ce qui entraîne :

Remarque 4.11. Pour la $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ -structure, δ induit un isomorphisme au niveau des revêtements universels :

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{L[s]} & \longrightarrow & \widetilde{\mathbb{C}^*} \\
 \parallel & & \parallel \\
 \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \stackrel{\mathrm{Not}}{=} \log(\mathbb{C}^*) \\
 \tilde{l} & \mapsto & \log |a| + i \arg(a) \\
 \tilde{m} & \mapsto & \log |b| + i \arg(b)
 \end{array}$$

où \tilde{l} et \tilde{m} sont les relevés de l et m d'origine 0 et les arguments sont pris dans $[0, 2\pi[$. Nous prendrons la notation $\log(\mathbb{C}^*)$ pour le revêtement universel de \mathbb{C}^* , qui est mieux adaptée pour éviter des confusions et coïncide avec les calculs que nous ferons avec les holonomies.

Finalement, avant d'étudier les complétés en dimension 3, nous faisons une dernière remarque pour relier l'holonomie dans l'étoile du sommet à celle de notre variété de dimension 3.

Remarque 4.12. L'holonomie $\eta : \pi_1(L[s]) \rightarrow \mathbb{C}^*$ se relève en $\log(\eta) : \pi_1(L[s]) \rightarrow \log(\mathbb{C}^*)$. Ce relevé induit un relevé de la développante $D : \pi_1(L[s]) \cdot M \rightarrow \mathbb{H}^3 \setminus \{(0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}_+^*\}$, à savoir

$$\log(D) : \pi_1(L[s]) \cdot M \rightarrow \log(\mathbb{H}^3 \setminus \{(0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}_+^*\})$$

où $\log(\mathbb{H}^3 \setminus \{(0, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}_+^*\})$ désigne le revêtement universel de \mathbb{H}^3 privé de l'axe Oz .

Complétion d'un voisinage

Maintenant que nous connaissons la structure sur l'étoile de s , nous allons nous intéresser à la façon de compléter un voisinage $\mathcal{V}(s)$ dans M . Nous suivrons presque à la ligne, dans le reste du raisonnement sur la complétion de voisinages, les idées exposées par Thurston dans [7], en empruntant tout de même quelques points de notation et techniques au texte de Ratcliffe [5]. Commençons par voir quelle est l'image d'un voisinage de s par la développante.

⁴ Nous vérifions bien l'hypothèse sur les (G, X) -structures pour que la compacité implique la complétude : l'espace \mathbb{C}^* est un quotient par un groupe compact (trivial) du groupe \mathbb{C}^* .

Remarque 4.13. L'image de η est constituée de similitudes fixant 0, donc l'image de H est constituée de composées de rotations et homothéties (euclidiennes) de centre 0. Elle stabilise alors les cônes (euclidiens) de centre 0 (qui sont des "cylindres" hyperboliques). Nous pouvons alors choisir $\mathcal{V}(s)$ de sorte que son image par D soit un cône de révolution privé de son axe I , comme dans la figure 16.

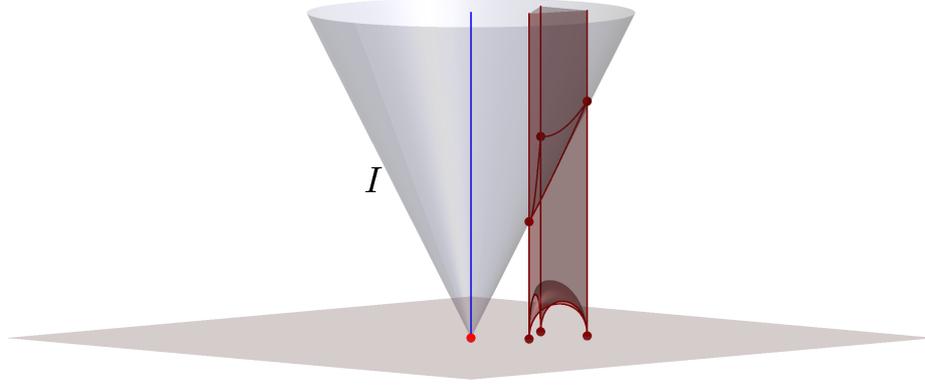


FIGURE 16 – Image de $\mathcal{V}(s)$ par D et un des tétraèdres du pavage

Remarque 4.14. Le complété métrique de I est obtenu en lui rajoutant l'axe Oz . En passant au revêtement universel, le complété métrique de \tilde{I} est aussi obtenu en rajoutant une droite.

Proposition 4.15. La projection $p : \tilde{I} = \widetilde{\mathcal{V}(s)} \rightarrow \mathcal{V}(s)$ s'étend en une application surjective \bar{p} entre les complétés métriques.

Démonstration. $\widetilde{\mathcal{V}(s)}$ est muni de la métrique induite par p , donc p est 1-lipschitzienne et \bar{p} existe. En reliant les points d'une suite de Cauchy dans $\mathcal{V}(s)$ nous obtenons un "chemin de Cauchy", qui se relève à $\widetilde{\mathcal{V}(s)}$, d'où \bar{p} est surjective. \square

Voyons maintenant, au niveau de la variété, quel est l'objet topologique que nous venons de coller à M pour rendre sa structure complète au voisinage de s . Sur l'axe Oz que nous avons rajouté au niveau du revêtement universel, il faut identifier deux points de la même orbite sous l'action de H . Nous remarquons le fait suivant :

Remarque 4.16. Pour un chemin α tracé sur $\mathcal{V}(s)$, $H(\alpha)$ est donnée par $z \mapsto cz$ sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec $c \in \mathbb{C}^*$, et donc $H(\alpha) \cdot (0, 0, t) = (0, 0, |c|t)$. En considérant α dans $L[s]$, nous pouvons réécrire ceci :

$$H(\alpha) \cdot (0, 0, t) = (0, 0, |\eta(\alpha)|t)$$

où nous considérons $\eta : \pi_1(L[s]) \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Nous constatons que la nature topologique du complété $\overline{\mathcal{V}(s)}$ dépend alors uniquement de η , et plus précisément de $\text{Re}(\log(\eta))$. Nous avons deux cas :

Cas 1 : L'image de $\text{Re}(\log(\eta))$ est dense dans \mathbb{R} . Alors nous venons d'ajouter exactement un point, et l'espace topologique obtenu n'est pas une variété topologique.

Cas 2 : L'image de $\text{Re}(\log(\eta))$ est un sous-groupe discret de \mathbb{R} . Le complété $\overline{\mathcal{V}(s)}$ est alors obtenu en ajoutant un cercle, et est une variété topologique qui s'identifie à l'espace $H \backslash \overline{\mathcal{V}(s)}$.

Dans le deuxième cas, nous pouvons faire une remarque qui ne sera pas essentielle pour la suite immédiate du raisonnement, mais qui jouera un rôle prépondérant pour comprendre le volume de la variété.

Remarque 4.17. Choisissons une base (α_1, α_2) du $\pi_1(L[s])$ de sorte que $\operatorname{Re}(\log(\eta))(\alpha_1) = 0$ et $\operatorname{Re}(\log(\eta))(\alpha_2)$ engendre l'image de $\operatorname{Re}(\log(\eta))$. Alors la longueur de la géodésique rajoutée lors de la complétion est $\operatorname{Re}(\log(\eta))(\alpha_2)$.

Nous nous concentrerons par la suite sur ce deuxième cas, en voyant quelles sont les conditions pour que cette variété ait une structure hyperbolique qui étend celle de $\mathcal{V}(s)$. Pour le faire, nous définissons les invariants de Dehn.

4.3 Invariants de Dehn

Rappelons d'abord que nous avons fixé un sommet idéal s de M , une longitude l et un méridien m de son étoile. Nous disposons aussi du relevé de l'holonomie $\log(\eta) : \pi_1(L[s]) \rightarrow \log(\mathbb{C}^*)$ vérifiant que $(\log(\eta)(l), \log(\eta)(m))$ est \mathbb{R} -libre.

Définition 4.18. Nous définissons l'invariant de Dehn de s associé à (l, m) comme l'unique couple de réels (p, q) tel que $p \log(\eta)(l) + q \log(\eta)(m) = 2i\pi$. Si la structure est complète au voisinage de s , l'invariant de Dehn associé est ∞ . Ainsi, l'invariant de Dehn prend ses valeurs dans $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Cet invariant nous servira pour pouvoir donner une forme explicite à la proposition suivante :

Proposition 4.19. *La structure hyperbolique de $\mathcal{V}(s)$ s'étend en une structure sur $\overline{\mathcal{V}(s)}$ si et seulement si $\operatorname{Im}(\log(\eta)) \cap i\mathbb{R} = 2i\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Nous savons que $\overline{\mathcal{V}(s)}$ s'identifie à l'espace $H \setminus \overline{\mathcal{V}(s)}$, et correspond à rajouter un cercle C . Le quotient est muni de la structure hyperbolique héritée de $\mathcal{V}(s)$ au voisinage de tous les points qui ne sont pas sur C .

Topologiquement, $\overline{\mathcal{V}(s)}$ est un tore plein et un voisinage tubulaire de C , obtenu en recollant deux faces d'un cylindre plein, comme dans la figure 17. Une section transverse à C est alors, métriquement, un secteur angulaire homéomorphe à un disque.

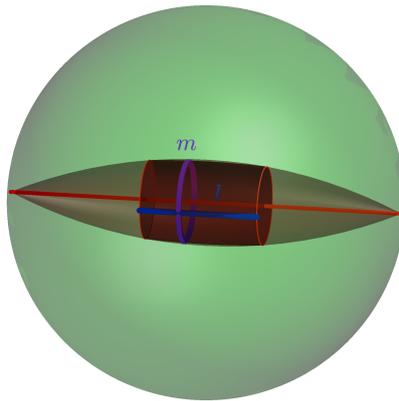
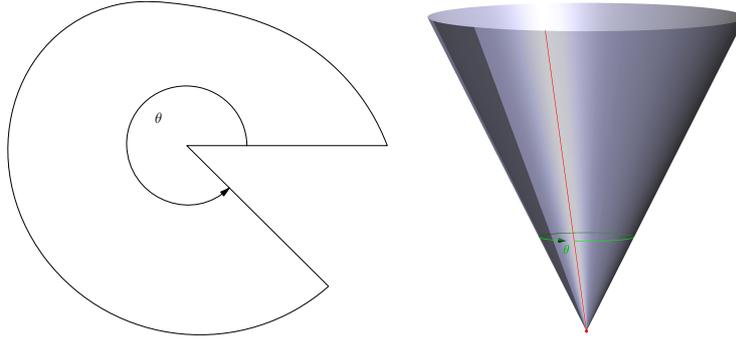


FIGURE 17 – Complété de $\overline{\mathcal{V}(s)}$

FIGURE 18 – Section transverse à C

La structure s'étend alors naturellement à C si et seulement si l'angle de ce secteur est 2π . Mais l'angle du tour correspond au générateur du sous-groupe $\text{Im}(\log(\eta))$ de $i\mathbb{R}$, qui doit être alors $\pm 2\pi$. Ceci équivaut à dire que la structure hyperbolique de $\mathcal{V}(s)$ s'étend à $\overline{\mathcal{V}(s)}$ si et seulement si $\text{Im}(\log(\eta)) \cap i\mathbb{R} = 2i\pi\mathbb{Z}$. \square

Proposition 4.20 ([5] p. 497). *La structure hyperbolique de $\mathcal{V}(s)$ s'étend en une structure sur $\overline{\mathcal{V}(s)}$ si et seulement si l'invariant de Dehn de s est (p, q) avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et sont premiers entre eux.*

Démonstration.

\Rightarrow Par la proposition 4.19, nous savons que $\text{Im}(\log(\eta)) \cap i\mathbb{R} = 2i\pi\mathbb{Z}$. Il existe alors deux entiers p, q tels que $p \log(\eta)(l) + q \log(\eta)(m) = 2i\pi$. S'ils n'étaient pas premiers entre eux, nous pourrions diviser par un facteur commun et trouver dans $\text{Im}(\log(\eta)) \cap i\mathbb{R}$ un élément qui n'est pas dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

\Leftarrow Puisque $p \log(\eta)(l) + q \log(\eta)(m) = 2i\pi$ nous savons que $2i\pi\mathbb{Z} \subset \text{Im}(\log(\eta)) \cap i\mathbb{R}$. Comme p et q sont premiers entre eux, il n'y a pas d'élément non nul de norme strictement inférieure à 2π dans $\text{Im}(\log(\eta)) \cap i\mathbb{R}$. Nous avons donc égalité. Grâce à la proposition 4.19, nous savons que la structure hyperbolique s'étend au complété. \square

Théorème 4.21 ([5] p. 498). *Soient s_1, \dots, s_k les sommets idéaux de M . Notons κ_i l'invariant de Dehn pour le sommet s_i . Nous supposons que pour tout $1 \leq i \leq k$ $\kappa_i = \infty$ ou (p_i, q_i) avec p_i, q_i des entiers premiers entre eux. Alors le complété métrique \overline{M} est une variété hyperbolique complète homéomorphe à $M_{\kappa_1, \dots, \kappa_k}$, obtenue par chirurgie de Dehn sur les sommets idéaux de M .*

Démonstration. Soit s_i un sommet idéal de M au voisinage duquel la structure hyperbolique n'est pas complète. Comme nous l'avons vu dans la preuve de 4.19, topologiquement, au voisinage de s_i \overline{M} est obtenue en rajoutant une géodésique fermée, ou plus précisément enlevant un voisinage de s_i et en rajoutant un tore plein. Il s'agit donc d'une chirurgie de Dehn en s_i . De plus, l'élément du π_1 de l'étoile de s_i qui est tué avec ce procédé, est celui qui correspond à un tour autour de la géodésique que nous venons d'ajouter, c'est-à-dire $pl + qm$. \square

4.4 Réalisation des conditions

Nous considérons encore une variété M donnée comme recollement de n tétraèdres, que nous munissons d'une structure hyperbolique en choisissant un paramètre z_i par tétraèdre. Avec ce procédé, nous obtenons h sommets idéaux s_1, \dots, s_h , et nous pouvons leur associer des invariants de Dehn $\kappa_1, \dots, \kappa_h \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ comme dans la définition 4.18. Dans cette section, quitte à laisser

Corollaire 4.28. *Il n'existe qu'un nombre fini de n -uplets $((p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h))$ de couples d'entiers (p_i, q_i) premiers entre eux tels que $M_{((p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h))}$ n'ait pas de structure hyperbolique complète.*

Démonstration. Grâce au théorème 4.21, nous savons que si $((p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h))$ est dans l'image de κ , alors $M_{((p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h))}$ est, topologiquement, le complété métrique de M pour la structure hyperbolique donnée par un certain n -uplet (z_1, \dots, z_n) . Mais la proposition 4.26 nous dit que l'image de κ contient un voisinage de l'infini, et donc tous les couples d'entiers sauf un nombre fini. \square

Dans la section 4.6 de [7], Thurston décrit, explicitement, l'image de κ dans le cas du complémentaire du nœud de 8. Nous allons donner ici rapidement les idées et les résultats, sans rentrer dans les détails. Rappelons d'abord que, dans la section 3.4, une structure hyperbolique pour la triangulation de M_8 était paramétrée par un unique nombre complexe w dans la région de la figure 19. Nous avons ici plus que ce qui est énoncé dans les résultats généraux : nous ne travaillons plus sur un voisinage mais nous connaissons exactement le domaine de définition de κ^5 .

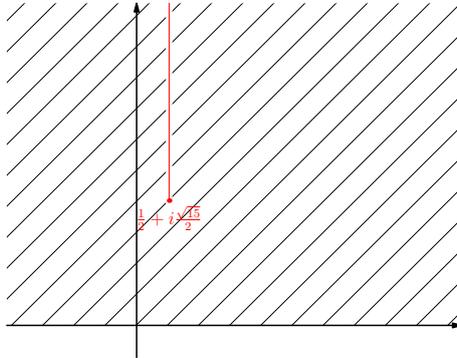
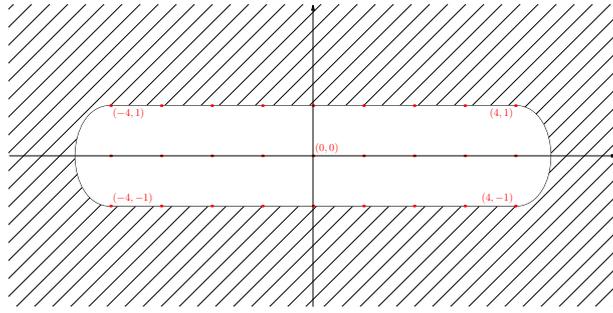


FIGURE 19 – Paramètre de la structure hyperbolique

Thurston choisit explicitement le méridien et la longitude comme dans la figure 14 de sorte à ce que les invariants de Dehn soient relativement faciles à calculer. Sachant que l'image de la région doit être un ouvert connexe à bord lisse contenant ∞ , il nous suffit de suivre l'image du bord pour obtenir l'image de κ . Nous obtenons la région de la figure 20.

⁵ Nous n'avons pas le même domaine de définition que celui de l'énoncé général : nous avons une carte (globale!) pour V .

FIGURE 20 – Image de κ

De cette étude nous pouvons déduire :

Proposition 4.29. *Soit (p, q) un couple d'entiers premiers entre eux différent de $\pm(1, 0)$, $\pm(0, 1)$, $\pm(1, 1)$, $\pm(2, 1)$, $\pm(3, 1)$ et $\pm(4, 1)$. Alors $(\mathbb{M}_8)_{(p,q)}$ possède une (unique) structure hyperbolique complète.*

Proposition 5.7. *Au voisinage de $z^{(0)}$, V est de dimension $\leq h$.*

Démonstration. Considérons le système de h équations algébriques⁶

$$\begin{array}{rcl} \log \rho_1(l_1) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \log \rho_h(l_h) & = & 0 \end{array} \quad (\mathcal{E}')$$

Le système d'équations $(\mathcal{E}) \cup (\mathcal{E}')$ détermine une sous-variété algébrique W de V . Il suffit de montrer que W est de dimension 0 au voisinage de $z^{(0)}$.

Les équations de \mathcal{E}' expriment le fait que les holonomies $\eta_i(l_i)$ des longitudes des étoiles des sommets idéaux sont des translations. Or $\pi_1(L[s_i])$ est abélien, et donc les holonomies $\eta_i(m_i)$ des méridiens sont aussi des translations. Grâce au théorème 3.10, ceci est équivalent au fait que la structure hyperbolique sur M soit complète.

Raisonnons par l'absurde. Si $\dim W \geq 1$, il serait possible de déformer les paramètres en vérifiant les équations $(\mathcal{E}) \cup (\mathcal{E}')$, i.e. en gardant la structure complète. Or, d'après le théorème de rigidité de Mostow, la structure hyperbolique complète est unique : la seule façon de déformer les paramètres est de déformer la triangulation au sein de la structure complète. Mais il n'existe qu'un nombre dénombrable de géodésiques reliant deux pointes de M : il est donc impossible d'avoir une déformation de la triangulation. \square

5.2 Choix des paramètres

Nous allons introduire deux jeux de paramètres (u_1, \dots, u_h) et (v_1, \dots, v_h) dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^h$. Ces paramètres nous permettront de déformer facilement les structures hyperboliques au voisinage de la structure complète et d'exprimer les invariants de Dehn d'une façon plus simple.

Définition 5.8. Posons, pour $1 \leq i \leq h$, $u_i = \log \rho_i(l_i)$ et $v_i = \log \rho_i(m_i)$, de sorte que $u_i, v_i \in \log(\mathbb{C}^*)$.

Remarque 5.9. Grâce au théorème 3.10, nous savons que la structure hyperbolique sur M est complète si et seulement si $(u_1, \dots, u_h) = (v_1, \dots, v_h) = 0$. De plus, si la structure n'est pas complète au voisinage d'un sommet s_j , l'invariant de Dehn associé à s_j est l'unique paire $(p_j, q_j) \in \mathbb{R}^2$ telle que $p_j u_j + q_j v_j = 2i\pi$.

Remarque 5.10. Les u_i et v_i sont calculables facilement à partir des z_i et de la combinatoire du recollement. Ce sont des logarithmes de produits de $\pm z_i$, $\pm(1 - z_i)$, $\pm \frac{1}{z_i}$ et $\pm \frac{1}{1 - z_i}$, et donc des fonctions holomorphes de (z_1, \dots, z_n) .

Proposition 5.11. *Au voisinage de $z^{(0)}$, l'application $\psi : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (u_1, \dots, u_h)$ est un revêtement ramifié.*

Démonstration. Nous savons que la sous-variété V des paramètres z_i donnant une structure hyperbolique à M est de dimension h , et que l'application $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (u_1, \dots, u_h)$ est holomorphe et atteint 0 uniquement quand la structure est complète. Or, par le théorème de rigidité de Mostow, nous avons l'unicité de tels paramètres. Nous en déduisons, grâce à la structure locale des sous-ensembles analytiques (voir [4] IV-7), que ψ est un revêtement ramifié au voisinage de z^0 , et donc localement injective sur un ouvert dense de ce voisinage. \square

6. Les $\rho_i(l_i)$ s'expriment à l'aide des z_i comme des produits de $\pm z_i$, $\pm(1 - z_i)$, $\pm \frac{1}{z_i}$ et $\pm \frac{1}{1 - z_i}$. Nous détaillerons cet aspect dans la section 6.

Nous venons de définir deux jeux de paramètres : u et v . Nous n'avons pas encore la bijectivité entre z et u , mais, puisqu'il s'agit d'un revêtement ramifié, au voisinage d'un point z assez proche de $z^{(0)}$, choisi dans un ouvert dont l'adhérence contient $z^{(0)}$, nous pourrions travailler comme si l'application était bijective. Nous anticiperons la bijectivité sur les notations. Dans la suite, nous adopterons une notation pour exprimer une structure hyperbolique sur un recollement topologique de tétraèdres M donnée par un paramètre $u = (u_1, \dots, u_h)$. Il peut y avoir, a priori, plusieurs structures correspondant à un paramètre u , mais u donne localement une paramétrisation pour les points assez proches de la structure complète.

Notation 5.12. Pour $u \in \mathbb{C}^h$ assez proche de 0, Nous noterons $M^{(u)}$ la variété hyperbolique homéomorphe à M qui correspond au paramètre u .

Il est possible de retrouver v à partir de u , ce que nous allons montrer dans la proposition suivante. À partir d'ici, nous choisirons les paramètres u_1, \dots, u_h pour exprimer les déformations, en nous plaçant, de façon implicite, localement sur une des feuilles du revêtement. Nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'un choix complètement arbitraire.

Proposition 5.13 (Lemme 4.1 de [3]). *Dans un voisinage de l'origine, nous avons, pour chaque $1 \leq i \leq h$, $v_i = \tau_i(u_1, \dots, u_h)u_i$ où les τ_i sont des fonctions analytiques qui vérifient $\text{Im}(\tau_i(0)) > 0$ et $\tau_i(u) = \tau_i(0) + o(|u|)$ en 0.*

Démonstration. Fixons $i \in [1, h]$. Nous savons que pour $u = 0$, $H_i(l_i)$ et $H_i(m_i)$ sont des éléments paraboliques qui commutent. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ces holonomies fixent ∞ et que $\eta_i(m_i) \cdot z = z + 1$; $\eta_i(l_i) \cdot z = z + \tau_i^{(0)}$, où $\tau_i^{(0)}$ est le module de la structure euclidienne sur le tore correspondant à l'étoile de s_i .

Déformons la structure de façon générique à l'ordre 1 en utilisant les paramètres (u_1, \dots, u_h) dans une feuille du revêtement. Nous obtenons une holonomie $H_i^{(u)}$. Or $H_i^{(u)}(l_i)$ et $H_i^{(u)}(m_i)$ commutent, et ce sont donc des éléments loxodromiques, car sinon ils seraient deux éléments paraboliques de même point fixe à l'infini et la structure serait complète au voisinage de s_i . Nous avons donc, quitte à ajuster les coordonnées, deux holonomies sur l'étoile de s_i :

$$\eta_i^{(u)}(l_i) : w \mapsto aw \quad \text{et} \quad \eta_i^{(u)}(m_i) : w \mapsto bw.$$

Puisque la déformation est petite et que les fonctions que nous considérons sont holomorphes, nous savons que $b - 1 = \tau_i^{(0)}(a - 1) + o(|u|)$. Nous avons alors $\log(b) = b - 1 + o(|u|) = \tau_i^{(0)}(a - 1) + o(|u|) = \log(a) + o(|u|)$. Or $u_i = \log(a)$ et $v_i = \log(b)$; la fonction $\tau_i(u) = \frac{v_i}{u_i}$ est donc holomorphe et se prolonge en 0 par $\tau_i^{(0)}$ \square

Remarque 5.14. En passant à la limite, nous avons que $\tau_i(0)$ est le module de la structure euclidienne de $L[s_i]$ par rapport à (l_i, m_i) pour la structure hyperbolique complète sur M .

5.3 Ouverture des invariants de Dehn

Avec les outils et les notations que nous venons de donner, nous pouvons enfin démontrer la proposition 4.26, en changeant un peu la notation pour s'adapter au choix des paramètres u_i .

Théorème 5.15 (Théorème de chirurgie de Dehn de Thurston). *Notons $\kappa : \mathbb{C}^h \rightarrow (\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})^h$ l'application qui associe à (u_1, \dots, u_h) les invariants de Dehn de (s_1, \dots, s_h) pour la structure hyperbolique sur M donnée par le paramètre (u_1, \dots, u_h) . Alors κ est un homéomorphisme entre un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^h$ et $(\infty, \dots, \infty) \in (\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})^h$.*

Démonstration. ([3], p. 322) Nous savons, par définition, que $p_i u_i + q_i v_i = 2i\pi$. Nous pouvons en déduire que l'application κ est analytique réelle. Considérons maintenant l'application $\varphi : (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^h \rightarrow (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^h$ donnée par

$$\varphi((p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h)) = 2i\pi \left(\frac{1}{p_1 + q_1 \tau_1(0)}, \dots, \frac{1}{p_h + q_h \tau_h(0)} \right).$$

Pour $1 \leq i, j \leq h$, calculons $\frac{\partial(\varphi \circ \kappa)_i}{\partial u_j}(0)$. Nous savons que $p_i u_i + q_i v_i = 2i\pi$, d'où

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(p_i + \tau_i q_i) = \frac{\partial}{\partial u_j} \frac{2i\pi}{u_i} = -\delta_{ij} \frac{2i\pi}{(u_j)^2}.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial u_j}(p_i + \tau_i q_i)(0) = \frac{\partial p_i}{\partial u_j}(0) + \tau_i(0) \frac{\partial q_i}{\partial u_j}(0) = \frac{\partial}{\partial u_j}(p_i + \tau_i(0) q_i)(0)$$

car, grâce à la proposition 5.13, nous savons que $\frac{\partial \tau_i}{\partial u_j}(0) = 0$.

Nous en déduisons :

$$\frac{\partial(\varphi \circ \kappa)_i}{\partial u_j}(0) = \frac{-2i\pi}{(p_i + q_i \tau_i(0))^2} \frac{\partial}{\partial u_j}(p_i + \tau_i(0) q_i)(0) = \frac{4\pi^2 \delta_{ij}}{(p_i + q_i \tau_i(0))^2} \frac{1}{u_i^2}(0) = \frac{4\pi^2 \delta_{ij}}{(p_i u_i + q_i v_i)^2} = \delta_{ij}.$$

La matrice jacobienne de $\varphi \circ \kappa$ en 0 vaut donc l'identité. κ est donc un difféomorphisme local en 0. □

5.4 Longueurs

À l'aide des paramètres u_i et des invariants de Dehn (p_i, q_i) des sommets idéaux de M , il est possible de calculer plusieurs grandeurs liées à la variété hyperbolique M . Nous voyons encore à l'œuvre le pseudo-principe selon lequel ce qui se passe aux pointes gouverne ce qui se passe dans une variété hyperbolique.

Comme nous l'avons vu dans le théorème 4.21, si les invariants de Dehn sont soit ∞ soit des couples d'entiers premiers entre eux, le complété métrique de M est obtenu en ajoutant une géodésique fermée par pointe non complète. Nous allons calculer ici leurs longueurs. Pour commencer, nous avons besoin d'un complément sur les fonctions τ_i que nous avons défini dans 5.13.

Définition 5.16. Supposons que les invariants de Dehn de M sont $(\kappa_1, \dots, \kappa_h)$ où chaque κ_i est égal soit à ∞ , soit à un couple (p_i, q_i) d'entiers premiers entre eux. Nous définissons, pour $1 \leq i \leq h$, L_i comme la longueur de la géodésique fermée ajoutée au voisinage du sommet idéal s_i lors de la complétion métrique de M . Si $\kappa_i = \infty$, nous posons $L_i = 0$

Proposition 5.17. Pour tout $1 \leq i \leq h$ nous avons $L_i = -\frac{1}{2\pi} \text{Im}(u_i \bar{v}_i)$.

Démonstration. Le cas où $\kappa_i = \infty$ est clair. Supposons que $(p_i, q_i) \in \mathbb{Z}^2$. Puisqu'ils sont premiers entre eux, il existe des entiers r_i, s_i tels que $\det \begin{pmatrix} p_i & q_i \\ r_i & s_i \end{pmatrix} = 1$. La classe de la nouvelle géodésique dans $M^{(u)}$ γ_i est alors donnée par $r_i m_i + s_i l_i$. Son holonomie $H_i(\gamma_i) = H_i(r_i m_i + s_i l_i) = H(m_i)^{r_i} H(l_i)^{s_i}$ est alors donnée sur $\partial \mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ par $w \mapsto a^{r_i} b^{s_i} w$ où $a = \rho_i(l_i)$ et $b = \rho_i(m_i)$.

Nous savons donc que $\text{Longueur}(\gamma_i) + iTorsion(\gamma_i) = \epsilon \log(a^{r_i} b^{s_i}) = \epsilon(r_i u_i + s_i v_i)$ avec $\epsilon = \pm 1$. Nous savons alors que :

$$\begin{pmatrix} p_i & q_i \\ r_i & s_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Re}(u_i) & \text{Im}(u_i) \\ \text{Re}(v_i) & \text{Im}(v_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ \epsilon L_i(u) & \epsilon \text{Torsion}(\gamma_i) \end{pmatrix}.$$

En prenant les déterminants, nous obtenons :

$$\text{Im}(u_i \bar{v}_i) = 2\pi \epsilon L_i(u).$$

Mais, grâce au lemme 5.13, nous savons que $\text{Im}(u_i \bar{v}_i) < 0$ et donc que $\epsilon = -1$. D'où $L_i = -\frac{1}{2\pi} \text{Im}(u_i \bar{v}_i)$ \square

Remarque 5.18. L'énoncé de la proposition 5.17 nous permet de définir une grandeur $L_i(u)$ de façon analytique en u sur un voisinage de 0, et non uniquement aux valeurs de u donnant des invariants de Dehn entiers premiers entre eux.

5.5 Holomorphic

Pour conclure cette section sur les paramètres u_i , nous allons établir un résultat de parité sur les fonctions τ_i , qui nous permettra de compléter résultats précédents. Ce sera nécessaire, lors du calcul de l'asymptotique des volumes, d'avoir la version suivante des énoncés. De plus, nous serons enfin en mesure de démontrer que notre paramétrisation est bien un biholomorphisme.

Proposition 5.19 (Lemme 4.1 de [3]). *Dans un voisinage de l'origine, nous avons, pour chaque $1 \leq i \leq h$, que τ_i est une fonction paire en chacun de ses arguments.*

Démonstration. Plaçons-nous d'abord dans le cas où u correspond à des invariants de Dehn $(\kappa_1, \dots, \kappa_h)$ qui sont soit ∞ , soit des couples (p_j, q_j) d'entiers premiers entre eux, de sorte que le complété métrique de $M^{(u)}$ soit une variété hyperbolique complète obtenue en rajoutant des géodésiques fermées (éventuellement vides) $\gamma_1, \dots, \gamma_h$.

Soit $1 \leq k \leq h$. Nous savons que la variété topologique obtenue par chirurgie de Dehn de paramètres $(\kappa_1, \dots, -\kappa_i, \dots, \kappa_h)$ est homéomorphe à $(M^{(u)})$, et donc, par le théorème de rigidité de Mostow, isométrique à $(M^{(u)})$. Or, le paramètre $u \in \mathbb{C}^h$ correspondant à cette structure est déterminé par les équations :

$$\begin{aligned} p_j u_j + q_j v_j &= 2i\pi \\ r_j u_j + s_j v_j &= -(\text{Longueur}(\gamma_j) + iTorsion(\gamma_j)) \end{aligned}$$

si $j \neq k$ et $\kappa_j \neq \infty$ (auquel cas $u_j = v_j = 0$), où nous avons choisi r_j, s_j comme dans la preuve de la proposition 5.17, de sorte que $\det \begin{pmatrix} p_j & q_j \\ r_j & s_j \end{pmatrix} = 1$, puis par

$$\begin{aligned} -p_k u_k - q_k v_k &= 2i\pi \\ -r_k u_k - s_k v_k &= -(\text{Longueur}(\gamma_k) + iTorsion(\gamma_k)) \end{aligned}$$

Nous obtenons comme solution $((u_1, v_1), \dots, -(u_k, v_k), \dots, (u_h, v_h))$. Nous pouvons constater alors que les $\tau_j(u) = \frac{u_j}{v_j}$ restent tous inchangés.

Grâce au théorème 4.21, nous savons donc que l'ensemble des points $u \in \mathbb{C}^h$ tels que $\tau_i((u_1, \dots, u_h)) = \tau_i((u_1, \dots, -u_k, \dots, u_h))$ a un point d'accumulation en 0 suivant n'importe quel secteur angulaire. Comme τ_i est une fonction analytique, nous en déduisons que τ_i est paire en chacun de ses arguments. \square

Proposition 5.20. *Pour tout $1 \leq i \leq h$ nous avons*

$$L_i = \frac{2\pi}{Q_i(p_i, q_i)} + O\left(\sum_{j=1}^h \frac{1}{p_j^4 + q_j^4}\right)$$

où Q_i est une forme quadratique donnée par

$$Q_i(p, q) = \frac{(\text{Longueur}(pl + qm))^2}{\text{Aire}(L[s_i])}$$

Démonstration. Nous reprenons les notations r_i, s_i de la preuve de la proposition 5.17. Nous savons que $v_i = u_i \tau_i(0) + o(|u|^2)$ car τ_i est paire. Donc, par définition des invariants de Dehn, nous avons $u_i = \frac{2i\pi}{p_i + \tau_i(0)q_i} + o(|u|^2)$ D'où $-\frac{1}{2\pi} \text{Im}(u_i \bar{v}_i) = 2\pi \frac{\text{Im}(\tau_i(0))}{|p_i + \tau_i(0)q_i|^2} + o(|u|^2) = 2\pi \frac{\text{Aire}(L[s_i])}{\text{Longueur}(p_i m_i + q_i l_i)^2} + o(|u|^2)$. \square

Nous pouvons finalement exprimer la bijectivité du changement de paramètres entre les z_i et les u_i :

Proposition 5.21. *L'application*

$$\psi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & (\log(\mathbb{C}^*))^h = \mathbb{C}^h \\ (z_1, \dots, z_n) & \mapsto & (u_1, \dots, u_h) \end{array}$$

est un biholomorphisme sur un voisinage des paramètres de la structure complète.

Démonstration ([3] p. 323). Il nous reste à montrer l'injectivité. En effet, grâce à la proposition 5.11, nous savons que ψ est un revêtement ramifié au voisinage de $z^{(0)}$, et une application holomorphe qui est injective est un biholomorphisme sur son image.

Le paramètre u détermine aussi v et donc les invariants de Dehn de la structure hyperbolique. S'ils sont soit ∞ , soit des couples d'entiers premiers entre eux, nous savons que la complété métrique est une variété hyperbolique complète, et grâce au théorème de Mostow sa structure est unique. Cependant, en changeant u en $-u$, nous obtenons les opposés des invariants de Dehn : la combinatoire et les longueurs des géodésiques fermées sont les mêmes mais les sens d'enroulement des arêtes autour des géodésiques fermées change. Le paramètre u détermine alors non seulement la structure hyperbolique mais aussi la triangulation. L'application ψ est donc injective aux points z où les invariants de Dehn sont soit ∞ , soit des couples d'entiers premiers entre eux. Mais ceci donne, grâce à la proposition 5.15, une partie qui a un point d'accumulation en $z^{(0)}$ selon n'importe quel secteur angulaire. Nous en déduisons que ψ est injective au voisinage de $z^{(0)}$. \square

6 Relations symplectiques de Neumann et Zagier

Nous allons établir ici des relations sur la combinatoire du recollement de tétraèdres, qui nous permettront par la suite d'établir une asymptotique du volume des variétés complètes obtenues comme des complétés de recollements de même combinatoire. Cependant, les relations que nous allons établir contiennent beaucoup plus d'information sur la structure hyperbolique.

Nous reprenons les notations des sections précédentes, où nous nous donnons un recollement topologique de n tétraèdres époinés M , qui a des sommets idéaux s_1, \dots, s_h et qui sont munis d'une structure de tétraèdre idéal de paramètre $z = (z_1, \dots, z_n)$. Nous allons nous concentrer sur les petites déformations au voisinage d'une structure complète, donnée par un (unique) jeu de paramètres $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)})$.

6.1 Écriture matricielle des paramètres

Rappelons d'abord quelques remarques importantes sur l'expression, en fonction de z , des conditions et grandeurs qui sont intervenues lors de notre étude des structures hyperboliques sur M .

Remarque 6.1. Les relations de recollement le long des n arêtes, données dans la proposition 3.8, s'écrivent comme des produits de termes $\pm z_i$, $\pm(1 - z_i)$, $\pm \frac{1}{z_i}$ et $\pm \frac{1}{1-z_i}$. Nous pouvons alors les écrire, pour $1 \leq j \leq n$:

$$\prod_{\nu=1}^n z_{\nu}^{r'_{\nu,j}} (1 - z_{\nu})^{r''_{\nu,j}} = \epsilon_j \quad (\mathcal{R}_j)$$

où $\epsilon_j = \pm 1$ et les $r'_{\nu,j}$, $r''_{\nu,j}$ sont des entiers relatifs.

Remarque 6.2. Fixons $1 \leq i \leq n$. Nous savons que l'étoile de s_i , $L[s_i]$, est un tore muni d'une structure de similitude. Reprenons la notation ρ_i donnée en 5.5 de la dérivé de l'holonomie de $L[s_i]$. Les expressions $\rho_i(l_i)$ pour la longitude et $\rho_i(m_i)$ pour le méridien s'écrivent comme des produits de termes $\pm z_i$, $\pm(1 - z_i)$, $\pm \frac{1}{z_i}$ et $\pm \frac{1}{1-z_i}$.

Nous pouvons alors les écrire, pour $1 \leq i \leq h$:

$$\prod_{\nu=1}^n z_{\nu}^{l'_{\nu,i}} (1 - z_{\nu})^{l''_{\nu,i}} = \rho_i(l_i) \quad (\mathcal{L}_i)$$

$$\prod_{\nu=1}^n z_{\nu}^{m'_{\nu,i}} (1 - z_{\nu})^{m''_{\nu,i}} = \rho_i(m_i) \quad (\mathcal{M}_i)$$

où les $l'_{\nu,i}$, $l''_{\nu,i}$, $m'_{\nu,i}$ et $m''_{\nu,i}$ sont des entiers relatifs.

Remarque 6.3. Pour $1 \leq i \leq h$, la structure hyperbolique est complète au voisinage de s_i si et seulement si $\rho_i(l_i) = 1$, ce qui est équivalent au fait que $\rho_i(m_i) = 1$.

Dans la suite, nous allons considérer des déformations qui gardent les pointes en s_1, \dots, s_k et qui "bouchent" les $n - k$ dernières pointes. Plus précisément, nous supposons d'une part que pour $1 \leq i \leq k$ $\rho_i(l_i) = \rho_i(m_i) = 1$ et d'autre part que pour $k + 1 \leq i \leq h$ les invariants de Dehn associés à s_i sont deux entiers premiers entre eux (p_i, q_i) .⁷

7. Attention, ce ne sont pas les mêmes notations que dans [3].

Remarque 6.4. Nous savons alors que la courbe $p_i l_i + q_i m_i$ est homotopiquement triviale : son holonomie doit donc être triviale. Nous pouvons écrire cette relation en fonction des z_ν et $1 - z_\nu$.

Puisque les relations de recollement des arêtes et celles des pointes bouchées sont des équations de compatibilité autour d'une géodésique, nous les regroupons dans les notations :

Notation 6.5. Pour $k+1 \leq i \leq h$, posons $j = n+i-k$. Nous écrivons la relation $\rho_i(p_i l_i + q_i m_i) = 1$ comme :

$$\prod_{\nu=1}^n z_\nu^{r'_{\nu,j}} (1 - z_\nu)^{r''_{\nu,j}} = \epsilon_j \quad (\mathcal{R}_j)$$

où $\epsilon_j = \pm 1$ et les $r'_{\nu,j}, r''_{\nu,j}$ sont des entiers relatifs.

Nous pouvons remarquer alors que l'information sur les équations de recollement et de complétude est contenue dans les coefficients (entiers) que nous venons d'écrire. Nous pouvons les organiser dans une matrice pour en tirer des conséquences globales.

Notation 6.6. Notons L' la matrice $(l'_{\nu,i})_{1 \leq i \leq h-k, 1 \leq \nu \leq n}$, $L'' = (l''_{\nu,i})_{1 \leq i \leq h-k, 1 \leq \nu \leq n}$ puis $L = (L', L'')$. Où chaque ligne de L donne une des relations sur les latitudes des pointes non bouchées.

Nous faisons de même pour les méridiens : $M' = (m'_{\nu,i})_{1 \leq i \leq h-k, 1 \leq \nu \leq n}$, $M'' = (m''_{\nu,i})_{1 \leq i \leq h-k, 1 \leq \nu \leq n}$ puis $M = (M' M'')$.

Nous noterons aussi C la matrice avec $2(h-k)$ lignes et n colonnes $C = \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix}$

Notation 6.7. Notons R' la matrice $(r'_{\nu,j})_{1 \leq j \leq n+(h-k), 1 \leq \nu \leq n}$, $R'' = (r''_{\nu,j})_{1 \leq j \leq n+(h-k), 1 \leq \nu \leq n}$ puis $R = (R', R'')$. Où chaque ligne de R donne une des relations de recollement autour d'une géodésique : une arête pour $1 \leq j \leq n$ et une géodésique fermée pour $n+1 \leq j \leq n+(h-k)$.

Notation 6.8. Nous notons enfin U la matrice $U = \begin{pmatrix} C \\ R \end{pmatrix}$ qui regroupe toutes les données.

6.2 Produit symplectique

Nous allons exprimer des relations entre les équations de recollement et les holonomies en donnant les relations entre les lignes de U . L'approche de Neumann et Zagier dans [3], que nous reprenons ici, est d'utiliser un produit symplectique. Nous allons l'introduire, avec la dualité qui lui est associée, et nous énoncerons le résultat qui relie les lignes de U en ces termes.

Définition 6.9. Nous noterons, pour $m \in \mathbb{N}^*$, J_{2m} la matrice de $\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 6.10. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, nous munissons \mathbb{R}^{2m} d'une forme symplectique $\omega_m : \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée matriciellement par $\omega_m(x, y) = {}^t x J_{2m} y$.

Définition 6.11. Pour $x \in \mathbb{R}^{2m}$, nous définissons le dual de x comme la forme linéaire

$${}^D x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2m} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \omega_m(x, y) \end{array}$$

Matriciellement, nous avons alors ${}^D x = {}^t x J_{2m}$. Nous étendons la définition de la dualité aux matrices $A \in \mathcal{M}_{2m, 2n}$ en posant ${}^D A = {}^t J_{2m} {}^t A J_{2n}$, de sorte que ${}^D(AB) = {}^D B {}^D A$ et ${}^D({}^D A) = A$.

Définition 6.12. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, nous noterons $[A]$ le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^{2n} engendré par les lignes de A .

Théorème 6.13 (Théorème 2.2 de [3]). *Nous avons*

$$UJ_{2n}{}^tU = 2 \begin{pmatrix} J_{2k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 6.14. L'énoncé du théorème contient deux points. Par rapport à la forme symplectique ω_n , d'une part $[U] \perp [R]$ et d'autre part les lignes de C forment une base symplectique de $[C]$. En particulier, C a rang maximal $2k$.

Idée de la démonstration. ⁸ Nous avons deux types de lignes dans la matrice U :

- Les n premières lignes de R , qui correspondent à un recollement autour d'une arête
- Les lignes de C et les $h - k$ dernières lignes de R , qui correspondent à l'holonomie d'une courbe au voisinage d'un sommet idéal

Le théorème sera démontré si nous prouvons les trois points suivants :

1. Pour r et s deux lignes de R correspondant aux recollements autour de deux arêtes, $\omega_n(r, s) = 0$.
2. Pour deux lignes a et b de C ou parmi les $h - k$ dernières de R , représentant l'holonomie de deux courbes α et β , nous avons $\omega_n(a, b) = 2[\alpha] \cdot [\beta]$ où \cdot est le produit d'intersection.
3. Pour r une des n premières lignes de R et a une ligne de C ou parmi les $h - k$ dernières de R , $\omega_n(r, s) = 0$.

Voici les idées pour montrer chacun de ces points.

1. Considérons deux lignes $r = (r'_1, \dots, r'_n, r''_1, \dots, r''_n)$ et $s = (s'_1, \dots, s'_n, s''_1, \dots, s''_n)$ correspondant aux recollements autour de deux arêtes. Nous savons alors que $\omega_n(r, s) = \sum_{\nu=1}^n r'_\nu s''_\nu - r''_\nu s'_\nu$. Chaque terme correspond à des exposants associés au tétraèdre T_ν . En utilisant le fait que, pour chaque tétraèdre les exposants (r'_ν, r''_ν) qui interviennent sont de la forme $(1, 0)$, $(-1, 1)$ et $(0, -1)$ et que leur somme vaut $(0, 0)$, il est possible de montrer que les termes de la somme se simplifient deux à deux, puisqu'ils correspondent à des paires d'arêtes adjacentes qui seront comptées une fois avec une orientation et une fois avec l'orientation opposée.
2. Considérons deux lignes $a = (a'_1, \dots, a'_n, a''_1, \dots, a''_n)$ et $s = (a'_1, \dots, a'_n, a''_1, \dots, a''_n)$ correspondant aux holonomies de deux courbes α et β . Comme dans le point 1), nous pouvons écrire $\omega_n(a, b)$ comme $\sum_{\nu=1}^n a'_\nu a''_\nu - a''_\nu a'_\nu$, et, développant les termes correspondant à chaque tétraèdre, ils s'annulent deux à deux sauf les termes correspondant à une intersection entre α et β , qui apportent 2 à la somme.
3. L'idée est la même que celle de 1), mais le comptage (explicité dans [3]) change légèrement. □

Remarque 6.15. Nous pouvons réécrire l'énoncé du théorème 6.13 en termes de dualité de la façon suivante :

$$U({}^D R) = 0 \quad \text{et} \quad U({}^D C) = 2 \begin{pmatrix} I_{2k} \\ 0 \end{pmatrix}$$

⁸. Nous verrons ici l'idée de la preuve. Les détails et une preuve complète se trouvent dans [3]. Une autre preuve, plus formelle, est l'objet de [1].

6.3 Conséquences

Nous pouvons, à présent, tirer les conséquences du théorème 6.13. Elles nous serviront, d'une part, à compléter les résultats sur la dimension de l'espace des structures hyperboliques sur le recollement de tétraèdres M et d'autre part à établir la relation qui sera utile pour exprimer, asymptotiquement, le volume d'une structure sur M en fonction des paramètres u_i . Commençons par établir les rangs des matrices qui interviennent dans les relations symplectiques :

Proposition 6.16 (Proposition 2.3 de [3]). $\text{rg}(R) = n - k$, $\text{rg}(U) = n + k$ et $[U] \perp [R]$ au sens de la forme symplectique ω .

Démonstration. D'après le théorème 6.13, l'écriture $[U] = [C] + [R]$ est une somme orthogonale et $\dim[C] = 2k$. Comme $[C]$ est non isotrope pour ω_{2n} , la somme est directe et $\dim[U] = \dim[C] + \dim[R]$. Or $[R] \subset [U]^\perp$, et donc $\dim[R] \leq \dim[U]^\perp = 2n - \dim[U] = 2n - 2k - \dim[R]$, avec égalité si et seulement si $[U] \perp [R]$ et $\text{rg}(U) = n + k$. Nous obtenons alors que $\dim[R] \leq n - k$.

Montrons maintenant que $\dim[R] \geq n - k$. Considérons le système d'équations \mathcal{R} , d'inconnues $\log(z_\nu)$, en fonction des r'_j, r''_j :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n (r'_1 \log(z_\nu) + r''_1 \log(1 - z_\nu)) &= \log(\epsilon_1) \\ \vdots &\vdots \\ \sum_{\nu=1}^n (r'_{(n+h-k)} \log(z_\nu) + r''_{(n+h-k)} \log(1 - z_\nu)) &= \log(\epsilon_{(n+h-k)}) \end{aligned} \quad (\mathcal{R})$$

Les n premières équations sont une réécriture de celles données 4.24. Puisque le rang de R est $\leq n - k$, les équations de (\mathcal{R}) déterminent une sous-variété de V de dimension $\geq h - k$. Or le jacobien du système en $z^{(0)}$ est de rang $\geq h - k$ et s'écrit RZ , où

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{z_n} \\ -\frac{1}{1-z_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{z_n} \end{pmatrix}$$

Donc $\text{rg}(R) \geq h$, i.e. $\dim[R] \geq h - k$. □

Nous pouvons déduire, en corollaire de la preuve, la dimension de la sous-variété V des paramètres z_i donnant lieu à une structure hyperbolique sur M .

Corollaire 6.17. *La dimension de V est exactement h .*

Finalement, nous allons voir que les relations symplectiques du théorème 6.13 donnent lieu à un isomorphisme au niveau des espaces vectoriels symplectiques sous-jacents. Dans ce texte, nous utiliserons uniquement une seule conséquence de ce fait, au moment de calculer des volumes. C'est celle de la remarque 6.20.

Proposition 6.18 (Corollaire 2.4 de [3]). *Soient $x, y \in \text{Ker}(R)$. Alors $2^D x(y) = {}^D(Cx)(Cy)$.*

Démonstration. Nous savons que $Rx = 0$, d'où $RJ_{2n}(J_{2n}x) = 0$. Nous avons alors que $J_{2n}x \in [R]^\perp = [U] = -J_{2n}[U]$. Il existe donc $z \in \mathbb{R}^n$ tel que ${}^D x = zU$.

Calculons ${}^D(Cx)(Cy)$.

$$\begin{aligned}
 {}^D(Cx)(Cy) &= {}^Dx {}^DC(Cy) \\
 &= zU {}^DC(Cy) \\
 &= 2z \begin{pmatrix} I_{2k} \\ 0 \end{pmatrix} Cy && \text{grâce à 6.15} \\
 &= 2z \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} y \\
 &= 2z \begin{pmatrix} C \\ R \end{pmatrix} y && \text{car } y \in \text{Ker}(R) \\
 &= 2zUy \\
 &= 2{}^Dx(y)
 \end{aligned}$$

□

Remarque 6.19. Ceci veut dire que C induit un isomorphisme symplectique entre $(\text{Ker}(R), \omega_n)$ et $(\text{Im}(C), \omega_k)$: les relations symplectiques entre les équations $(\mathcal{R}_j), (\mathcal{M}_i), (\mathcal{L}_i)$ sous les contraintes du recollement sont déterminées uniquement par ce qui se passe au voisinage des pointes.

Remarque 6.20. Nous pouvons réécrire matriciellement l'énoncé de la proposition 6.18 de la façon suivante :

$${}^t_x J_{2n} y = \frac{1}{2} {}^t(Cx) J_{2k}(Cy)$$

7 Calcul de volumes

Nous allons calculer le volume des variétés que nous considérons. Pour le faire, il suffit de savoir calculer le volume d'un tétraèdre idéal étant donné ses paramètres d'arête z_1 , z_2 et z_3 . Dans ce calcul, les fonctions π de Lobachevski, le dilogarithme Li_2 et la fonction D apparaissent naturellement. C'est pourquoi nous passons rapidement en revue quelques résultats sur ces trois fonctions avant de nous occuper du calcul à proprement parler. Nous reprenons ici ce que Milnor écrit dans le chapitre 7 de [7] et les résultats énoncés dans [3].

7.1 La fonction π de Lobachevski, le dilogarithme et la fonction D

La fonction π de Lobachevski

Définition 7.1. Nous posons

$$\pi(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin(u)| du$$

la fonction π de Lobachevski.

Remarque 7.2. La fonction π est bien définie sur \mathbb{R} . Elle est π -périodique, impaire, et nous avons $\pi'(\theta) = -\log |2 \sin \theta|$ et $\pi''(\theta) = -\cot(\theta)$.

Remarque 7.3. Puisque $2 \sin(2\theta) = 4 \sin(\theta) \cos(\theta) = 2 \sin(\theta) 2 \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$, en passant au log et en intégrant entre 0 et θ nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \pi(2\theta) = \pi(\theta) + \pi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

et donc :

$$\frac{1}{2} \pi(2\theta) = \pi(\theta) - \pi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

Le dilogarithme Li_2

Définition 7.4. Nous définissons le dilogarithme $\text{Li}_2 : \mathbb{C} \setminus [1, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ comme le prolongement analytique de la série entière

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2},$$

définie sur le disque de rayon 1.

Remarque 7.5. En comparant le développement en série entière, nous avons, pour $|z| \leq 1$, $\text{Li}_2(z) = - \int_{w=0}^z \frac{\log(1-w)}{w} dw$. Après un simple calcul, nous en déduisons que

$$\text{Li}_2(e^{2i\theta}) - \text{Li}_2(1) = -\theta(\pi - \theta) + 2i\pi(\theta)$$

pour $\theta \in [0, \pi]$.

En prenant la partie imaginaire de cette dernière expression, nous avons :

Proposition 7.6.

$$\pi(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\theta)}{n^2}$$

Voici une dernière identité, qui relie le dilogarithme à la fonction π et qui nous invite à définir la fonction D .

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(z)) = \pi(\arg(z)) + \pi(\arg(\frac{z-1}{z})) + \pi(\arg(\frac{1}{z-1})) - \log|z| \arg(1-z)$$

La fonction D de Bloch-Wigner

Définition 7.7. Nous définissons la fonction D de Bloch-Wigner sur $\mathbb{C} \setminus ([1, \infty] \cup \{0\})$ comme

$$D(z) = \operatorname{Im}(\operatorname{Li}_2(z)) + \log|z| \arg(1-z).$$

Il est possible d'étendre de façon analytique réelle D à $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Remarque 7.8. Bien que la définition de D semble être compliquée pour la manipuler, ses dérivées partielles ont des expressions simples avec les fonctions usuelles :

$$\frac{\partial D}{\partial z} = \frac{i}{2} \left(\frac{\log|1-z|}{z} + \frac{\log|z|}{1-z} \right) \text{ et } \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = -\frac{i}{2} \left(\frac{\log|1-z|}{\bar{z}} + \frac{\log|z|}{1-\bar{z}} \right)$$

7.2 Calcul du volume d'un tétraèdre idéal

Nous allons calculer le volume d'un tétraèdre idéal. Nous nous plaçons dans le modèle du demi-espace pour faire le calcul. Considérons un tétraèdre de sommets $a, b, c, d \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $d = \infty$. De plus, comme le stabilisateur de ∞ agit par similitudes sur \mathbb{C} , nous pouvons supposer que a, b, c se trouvent sur le cercle unité. Notons α, β, γ les angles dièdres des arêtes au-dessus de a, b, c respectivement, de sorte que ce sont les angles du triangle euclidien de sommets a, b, c (d'après la proposition 1.17). Nous sommes alors dans la situation suivante :

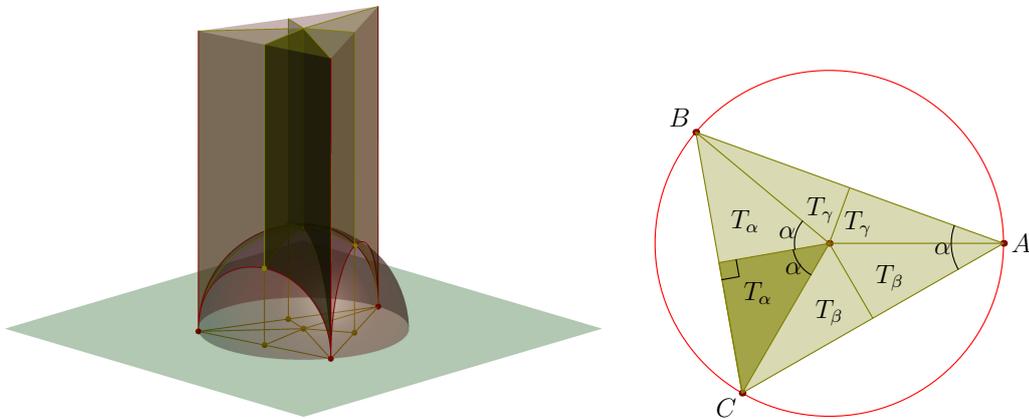


FIGURE 21 – Domaine d'intégration

Pour simplifier le calcul, nous découpons le triangle base en six triangles (de sommets 0, le milieu d'un segment et un des sommets de départ). Pour un des triangles T_α d'angle α , de volume correspondant V_α , nous faisons le calcul :

Proposition 7.9. *Le volume du tétraèdre au-dessus du triangle T_α est $V_\alpha = \frac{1}{2}\pi(\alpha)$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
V_\alpha &= \iiint_{(x,y) \in T_\alpha, z \geq \sqrt{1-x^2+y^2}} \frac{1}{z^3} dx dy dz \\
&= \iint_{(x,y) \in T_\alpha} \left[\frac{-1}{2z^2} \right]_{\sqrt{1-x^2+y^2}}^{\infty} dx dy = \iint_{(x,y) \in T_\alpha} \frac{1}{2(1-x^2-y^2)} dx dy \\
&= \int_{x=0}^{\cos(\alpha)} \left(\int_{y=0}^{x \tan(\alpha)} \frac{1}{2((\sqrt{1-x^2})^2 - y^2)} dy \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{\cos(\alpha)} \left[\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} \log \left(\frac{\sqrt{1-x^2} + y}{\sqrt{1-x^2} - y} \right) \right]_{y=0}^{x \tan(\alpha)} dx = \int_{x=0}^{\cos(\alpha)} \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} \log \left(\frac{\sqrt{1-x^2} + x \tan(\alpha)}{\sqrt{1-x^2} - x \tan(\alpha)} \right) dx \\
&= \int_{x=0}^{\cos(\alpha)} \frac{1}{4\sqrt{1-x^2}} \log \left(\frac{\sqrt{1-x^2} \cos(\alpha) + x \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) \sqrt{1-x^2} - x \sin(\alpha)} \right) dx
\end{aligned}$$

En posant $x = \cos(\theta)$, nous avons $\sqrt{1-x^2} = \sin(\theta)$ et $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d\theta$. D'où

$$\begin{aligned}
V_\alpha &= - \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \frac{1}{4} \log \left(\frac{\sin(\theta) \cos(\alpha) + \cos(\theta) \sin(\alpha)}{\cos(\alpha) \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin(\alpha)} \right) d\theta \\
&= -\frac{1}{4} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \log \left(\frac{2 \sin(\theta + \alpha)}{2 \sin(\theta - \alpha)} \right) d\theta \\
&= \frac{1}{4} \left(\pi(2\alpha) - \pi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \pi(0) + \pi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right)
\end{aligned}$$

Donc, grâce aux identités de la remarque 7.3, nous avons

$$V_\alpha = \frac{1}{2} \pi(\alpha)$$

□

Corollaire 7.10. *Le volume d'un tétraèdre idéal d'angles dièdres α , β et γ est*

$$V_{\alpha,\beta,\gamma} = \pi(\alpha) + \pi(\beta) + \pi(\gamma)$$

Remarque 7.11. Nous venons de faire le calcul pour un triangle avec des angles aigus α , β et γ . Le calcul reste le même (en faisant attention aux signes) pour un triangle quelconque.

Corollaire 7.12. *Le volume d'un tétraèdre idéal donné par un paramètre $z \in \mathbb{C}$ est $D(z)$.*

Démonstration. D'après la remarque 3.2, un tétraèdre idéal de paramètre z a comme paramètres des autres arêtes $\frac{z-1}{z}$ et $\frac{1}{z-1}$ et donc des angles dièdres $\arg(z)$, $\arg\left(\frac{z-1}{z}\right)$ et $\arg\left(\frac{1}{z-1}\right)$. Le volume du tétraèdre est alors $\pi(\arg(z)) + \pi(\arg\left(\frac{z-1}{z}\right)) + \pi(\arg\left(\frac{1}{z-1}\right)) = D(z)$. □

Remarque 7.13. Puisque les tétraèdres idéaux de paramètres z , $\frac{z-1}{z}$ et $\frac{1}{z-1}$ sont isométriques, nous avons $D(z) = D\left(\frac{z-1}{z}\right) = D\left(\frac{1}{z-1}\right)$.

7.3 Expression dans les paramètres u_i

Considérons maintenant une variété M obtenue comme recollement de tétraèdres idéaux. Nous considérons une structure hyperbolique sur M donnée par un paramètre $u \in \mathbb{C}^h$ assez proche de 0, auquel correspondent des paramètres $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Nous nous intéressons aux volumes des variétés hyperboliques complètes, et c'est la raison pour laquelle nous supposons que les invariants de Dehn de M pour la structure donnée par u , $(\kappa_1, \dots, \kappa_h)$, vérifient que κ_i est soit ∞ , soit une paire d'entiers premiers entre eux, de sorte que $\overline{M^{(u)}}$ soit une variété hyperbolique complète.

Remarque 7.14. Grâce au théorème 4.21, nous savons que $\overline{M^{(u)}}$ est obtenue à partir de $M^{(u)}$ en ajoutant un nombre fini de géodésiques fermées (une par pointe bouchée topologiquement par chirurgie de Dehn). Or le volume d'une géodésique est nul, et donc le volume de $M^{(u)}$ est la somme des volumes des tétraèdres de la triangulation. C'est-à-dire,

$$\text{Vol}(M^{(u)}) = \sum_{\nu=1}^n D(z_\nu)$$

Nous allons exprimer ce volume en fonction de u et des grandeurs que nous avons calculé. Si bien qu'elle n'intervient qu'à quelques lignes dans la preuve, le point essentiel est l'utilisation des relations symplectiques de Neumann et Zagier. Nous pouvons maintenant prouver :

Proposition 7.15. *Pour u assez proche de 0,*

$$\text{Vol}(M^{(u)}) = \text{Vol}(M^{(0)}) - \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^h L_i(u) + \text{Im}(f(u)),$$

où $f(u) = \frac{1}{4} \int_0^u \sum_{i=0}^h (v_i du_i - u_i dv_i)$ est une fonction holomorphe de u .

Démonstration. Déformons la structure selon une courbe paramétrée par une variable réelle ξ . Grâce à la remarque 7.8, nous pouvons écrire :

$$\frac{d}{d\xi} \text{Vol}(M^{(u)}) = \frac{i}{2} \sum_{\nu=0}^n \left[\left(\frac{\log |1 - z_\nu|}{z_\nu} + \frac{\log |z_\nu|}{1 - z_\nu} \right) \frac{dz_\nu}{d\xi} - \left(\frac{\log |1 - z_\nu|}{\bar{z}_\nu} + \frac{\log |z_\nu|}{1 - \bar{z}_\nu} \right) \frac{d\bar{z}_\nu}{d\xi} \right]$$

Notons x et y les vecteurs colonne :

$$x = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{z_\nu} \frac{dz_\nu}{d\xi} \right)_{1 \leq \nu \leq n} \\ \left(\frac{-1}{1 - z_\nu} \frac{dz_\nu}{d\xi} \right)_{1 \leq \nu \leq n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{bmatrix} (\log |z_\nu|)_{1 \leq \nu \leq n} \\ (\log |1 - z_\nu|)_{1 \leq \nu \leq n} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons alors réécrire

$$\frac{d}{d\xi} \text{Vol}(M^{(u)}) = -\text{Im}({}^t x J_{2n} y)$$

Nous reprenons maintenant les notations U, C, R de la section 6.1 pour pouvoir exploiter les relations symplectiques de Neumann et Zagier dans le calcul du volume lors d'une déformation.

Nous savons que Rx et Ry sont, respectivement, la dérivée des équations de recollement (\mathcal{E}) de la section 5.1 et leur partie réelle, donc $Rx = Ry = 0$ et la proposition 6.18 s'applique. Nous pouvons alors écrire :

$$\frac{d}{d\xi} \text{Vol}(M^{(u)}) = -\frac{1}{2} \text{Im}({}^t (Cx) J_{2k} (Cy))$$

Or, par la définition des lignes de C , des u_i et des v_i , nous savons que

$$Cx = \left[\begin{array}{c} \left(\frac{dv_i}{d\xi} \right)_{1 \leq i \leq h} \\ \left(\frac{du_i}{d\xi} \right)_{1 \leq i \leq h} \end{array} \right] \quad \text{et} \quad Cy = \left[\begin{array}{c} (\operatorname{Re}(u_i))_{1 \leq i \leq h} \\ (\operatorname{Re}(v_i))_{1 \leq i \leq h} \end{array} \right]$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \operatorname{Vol}(M^{(u)}) &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\sum_{i=1}^h \frac{dv_i}{d\xi} \operatorname{Re}(u_i) - \frac{du_i}{d\xi} \operatorname{Re}(v_i) \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{d}{d\xi} \left(\sum_{i=1}^h \operatorname{Im}(u_i \bar{v}_i) \right) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^h \operatorname{Im} \left(\frac{du_i}{d\xi} v_i - \frac{dv_i}{d\xi} u_i \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{d}{d\xi} \sum_{i=1}^h L_i(u) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^h \operatorname{Im} \left(\frac{du_i}{d\xi} v_i - \frac{dv_i}{d\xi} u_i \right) \end{aligned}$$

Ce que nous pouvons réécrire, en termes de différentielles :

$$d\operatorname{Vol}(M^{(u)}) = \frac{\pi}{2} d \left(\sum_{i=1}^h L_i(u) \right) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^h \operatorname{Im} (du_i v_i - dv_i u_i)$$

Ceci montre que $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^h (du_i v_i - dv_i u_i)$ est exacte car elle a une partie imaginaire exacte. Dans un voisinage simplement connexe de 0, la fonction

$$f(u) = \frac{1}{4} \int_0^u \sum_{i=0}^h (v_i du_i - u_i dv_i)$$

est bien définie et holomorphe puisque l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi. Nous en déduisons que

$$\operatorname{Vol}(M^{(u)}) = \operatorname{Vol}(M^{(0)}) - \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^h L_i(u) + \operatorname{Im}(f(u)),$$

□

7.4 Asymptotique

Nous avons maintenant une expression du volume en fonction des paramètres u_i . Nous pouvons nous intéresser à l'asymptotique de ces volumes lorsque u est proche de zéro. Si nous voulons considérer les volumes des variétés complètes, les conditions vont s'exprimer à l'aide des invariants de Dehn, mais, grâce à la proposition 5.15, nous savons qu'il est possible de tout exprimer en fonction de ces invariants. Faisons d'abord une première remarque, sur le terme moins bien connu, pour avoir un comportement asymptotique.

Remarque 7.16. Lorsque u tend vers 0 dans \mathbb{C}^h , $f(u) = O(|u|^4)$

Démonstration. D'après la proposition 5.13, nous savons que $v_i = \tau_i(u)u_i$, où τ_i est une fonction holomorphe paire et qui s'annule en 0, donc $O(|u|^2)$. Nous avons alors

$$v_i du_i - u_i dv_i = -u_i^2 \sum_{j=1}^h \frac{\partial \tau_i}{\partial u_j} du_j = O(|u|^3)$$

d'où $f(u) = O(|u|^4)$. □

Avec cette remarque et l'expression de la proposition 7.15, nous pouvons établir une première asymptotique :

Proposition 7.17.

$$\text{Vol}(M^{(u)}) = \text{Vol}(M^{(0)}) - \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^h L_i(u) + O(|u|^4)$$

Or, grâce à la proposition 5.17, nous savons que $L_i(u) = -\frac{1}{2\pi} \text{Im}(\overline{\tau_i(u)} u_i \bar{u}_i) = O(|u|^2)$ et que $u = O(\sqrt{\sum_{i=1}^h L_i(u)})$. Nous pouvons donc exprimer l'asymptotique en fonctions des L_i :

Proposition 7.18.

$$\text{Vol}(M_\kappa) = \text{Vol}(M_{(\infty, \dots, \infty)}) - \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^h L_i(\kappa) + O\left(\sum_{i=1}^h L_i^2\right)$$

Nous pouvons aussi, grâce à l'expression de la proposition 5.20, donner la même asymptotique en fonction des invariants de Dehn :

Proposition 7.19.

$$\text{Vol}(M_{(p_1, q_1), \dots, (p_h, q_h)}) = \text{Vol}(M_{(\infty, \dots, \infty)}) - \pi^2 \sum_{i=1}^h \frac{1}{Q_i(p_i, q_i)} + O\left(\sum_{i=1}^h \frac{1}{p_i^4 + q_i^4}\right)$$

Finalement, en utilisant des résultats de théorie des nombres pour compter le nombre de couples (p_i, q_i) d'entiers premiers entre eux vérifiant $Q(p_i, q_i) < A$, nous obtenons une asymptotique moins riche mais peut-être plus parlante :

Corollaire 7.20. *Notons $\{M_\nu \mid \nu \in N\}$ l'ensemble des variétés hyperboliques obtenues à partir de M par chirurgie de Dehn sur une seule des pointes de M . Alors*

$$\#\{\nu \in N \mid \text{Vol}(M_\nu) < \text{Vol}(M^{(0)}) - \frac{1}{x}\} = 6\pi x + O(\sqrt{x})$$

Références

- [1] Young-Eun Choi. Neumann and Zagier's symplectic relations. *Expo. Math.*, 24(1) :39–51, 2006.
- [2] Feng Luo, Saul Schleimer, and Stephan Tillmann. Geodesic ideal triangulations exist virtually. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(7) :2625–2630, 2008.
- [3] Walter D. Neumann and Don Zagier. Volumes of hyperbolic three-manifolds. *Topology*, 24(3) :307–332, 1985.
- [4] William Fogg Osgood. *Topics in the theory of functions of several complex variables*. Dover New York, 1966.
- [5] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [6] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [7] William P Thurston and John Willard Milnor. *The geometry and topology of three-manifolds*. Princeton University Princeton, 1979.