Mémoire d'habilitation: Géométrie à grande échelle et analyse sur les groupes localement compacts

3 janvier 2016

Préambule

Ce mémoire se répartit en 3 parties, traitant chacune d'un thème de recherche indépendant. Ces travaux possèdent tout de même un point commun qui est d'adopter un point de vue "de géométrie à grande échelle" sur les groupes.

La première partie traite de topologie des variétés fermées asphériques (ou de leurs revêtements universels) en grande dimension. J'y décris mes travaux en commun avec Erik Guentner et Guoliang Yu portant sur la conjecture de Borel et de ses variantes "à grande échelle". Notre apport principal a été la découverte d'un nouveau concept de "décomposition" d'un espace métrique que nous appliquons au groupe fondamental de la variété. La propriété d'être décomposable en ce sens a d'un coté l'intérêt d'être satisfaite (et souvent facile à démontrer) par une très large classe de groupes, et de l'autre d'être un outil particulièrement bien adapté aux méthodes chirurgicales à grande échelle. Par exemple, nous montrons que toute quasi-isométrie entre les revêtements universels de deux variétés asphériques dont le groupe fondamental est linéaire est à distance bornée d'un homéomorphisme.

La deuxième partie porte sur le problème isopérimétrique dans les variétés riemanniennes homogènes simplement connexes. Dans mon travail en commun avec Yves de Cornulier, nous caractérisons algébriquement les variétés homogènes dont la fonction de remplissage de dimension 2 croît polynomialement. Nous commençons par définir une notion de fonction de Dehn pour les groupes localement compacts compactement engendrés et nous montrons que la fonction de remplissage d'une variété homogène simplement connexe a le même comportement asymptotique que la fonction de Dehn de son groupe d'isométrie. Ceci permet de poser le problème en termes combinatoires, ce qui facilite la correspondance avec l'algèbre. Notre caractérisation des groupes de Lie connexes dont la fonction de Dehn croit polynomialement s'exprime alors en termes simples faisant intervenir l'algèbre de Lie. Les idées de la démonstration (qui fait une centaine de pages) sont très différentes des méthodes géométriques initiées par Gromov, et leur sont en un sens complémentaires. Nous nous sommes largement inspirés d'un travail fondamental d'Herbert Abels, caractérisant les groupes algébriques p-adiques compactement présentés. Nos résultats, qui s'étendent au cas p-adique, fournissent d'ailleurs une version quantitative du théorème d'Abels.

Enfin, la dernière partie aborde les plongements grossiers d'espaces métriques, et plus particulièrement de graphes de Cayley de groupes de type finis dans les espaces de Banach. Je donnerai une caractérisation de la non-plongeabilité en termes d'inégalités fonctionnelles, et aborderai des travaux portant sur les aspects quantitatifs de ces plongements. On doit à Gromov l'observation du fait que les expanseurs ne se plongent pas grossièrement dans un espace de Hilbert. J'ai démontré une réciproque faible de ce résultat, à savoir qu'un espace métrique ne se plonge pas grossièrement si et seulement s'il admet une suite de sous espaces finis satisfaisant (comme les expanseurs) une forme d'inégalité de Poincaré. Ce résultat n'implique toutefois pas qu'un tel espace métrique admet (même en un sens faible) un expanseur "plongé". Mettant un terme à cette question, nous exhibons avec Goulnara Arzhantseva un espace métrique constitué d'une réunion disjointe de graphes de Cayley de groupes finis qui bien que ne se plongeant pas grossièrement dans un espace de Hilbert, n'admet en aucun sens raisonnable d'expanseur plongé. Notre construction fait apparaître un phénomène nouveau dit "d'expansion relative".

Par ailleurs, je décris un résultat obtenu en collaboration avec Tim Austin et Assaf Naor portant sur la non-plongeabilité quasi-isométrique du groupe de Heisenberg dans un espace de Hilbert (ou plus généralement d'un espace de Banach superreflexif). A l'aide d'une approche initiée avec Yves Cornulier et Alain Valette pendant ma thèse, nous parvenons à donner des estimations quantitatives optimales (sous la forme là encore d'inégalités de Poincaré) de cette non-plongeabilité.

J'ai également travaillé sur d'autres sujets au cours de ces dernières années, notamment sur les thèmes suivants :

- la structure des groupes localement compacts hyperboliques (avec Pierre-Emmanuel Caprace, Yves de Cornulier, Nicolas Monod),
- les limites renormalisées de graphes transitifs finis (avec Itai Benjamini et Hilary Finucane),
- le premier temps de passage en percolation (avec Itai Benjamini),
- la reconnaissance de graphes transitifs à partir d'une grande boule (avec Mikael De la Salle),
- la classification métrique (à commabilité près) de familles de groupes agissant sur les arbres (avec Mathieu Carette),
- le traitement du signal (avec Akram Aldroubi),

Toutefois, par soucis de clarté, j'ai préféré me concentrer sur les 3 sujets précédents, qui possèdent chacun une certaine cohérence.

Je remercie Martin Bridson, Wolfgang Lück, Pierre Pansu et Christophe Pittet d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire.

Liste de publication

Voici, listée par thèmes, ma liste complète de publications (incluant également les pré-publications).

Chirurgie, K-théorie et rigidité topologique

- (avec Dan Ramras and Guoliang Yu) Finite decomposition complexity and the integral Novikov conjecture for higher algebraic K-theory. À paraître dans Crelle.
- (avec Erik Guentner and Guoliang Yu) A notion of geometric complexity and its applications to topological rigidity. Inventiones Math. 189 (2), 315-357.
- (avec Erik Guentner and Guoliang Yu) Discrete groups with Finite Decomposition Complexity. Groups, Geometry, and Dynamics 7 (2), 377-402.

Fonction de Dehn dans les groupes algébriques sur un corps local

- (avec Yves de Cornulier) Geometric presentations of Lie groups and their Dehn functions. (117 pp : soumis).
- (avec Yves de Cornulier) Dehn function and asymptotic cones of Abels' group. J. Topology 6(4) (2013), 982-1008.
- (avec Yves de Cornulier) Metabelian groups with quadratic Dehn function and Baumslag-Solitar groups. Confluentes Math., Vol. 2, No. 4 (2010) 431-443.

Inegalités fonctionnelles sur les groupes et plongements dans les espaces de Banach

- (avec Goulnara Arzhantseva) Relative expanders. arXiv :1402.1481. GAFA (sous presse).
- (avec Tim Austin et Assaf Naor) Sharp quantitative nonembeddability of the Heisenberg group into superreflexive Banach spaces. Groups, Geometry and Dynamics 7 (3) (2013), 497–522.
- Coarse embeddings into a Hilbert space, Haagerup Property and Poincare inequalities. Journal of Topology and Analysis Vol. 1 (2009), 87–100.
- Large-scale isoperimetry on locally compact groups and applications. Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie. Vol. 25. Année 2006–2007, 179–188, Sémin. Théor. Spectr.

Géom., 25, Univ. Grenoble I, Saint-Martin-d'Heres, 2008.
- On the Lp-distorsion of finite quotients of amenable groups. Positivity (2011), 1-8.
- Large scale Sobolev inequalities on metric measure spaces and applications. Rev. Mat. Iberoam. 24 (2008), no. 3, 825–864.
- Quantitative property A, Poincaré inequalities, Lp-compression and Lp-distortion for metric measure spaces. Geom. Dedicata 136 (2008), 203–220.
- Asymptotic isoperimetry on groups and uniform embeddings into Banach spaces. Comment. Math. Helv. 86 3, (2011), 499-535.
- Asymptotic isoperimetry of balls in metric measured spaces. Publicaciones Mathematiques 50, 2, 315-348.
- Volume of spheres in metric measured spaces and in groups of polynomial growth. Bull. Soc. Math. France 135 (2007), no. 1, 47–64.

Actions par isométries de groupes sur un espace de Banach

- (avec Kajal Das) Integrable measure equivalence and the central extension of surface groups. À paraître dans Groups Geom. Dyn.
- (avec Raf Cluckers, Yves de Cornulier, Nicolas Louvet, Alain Valette) The Howe-Moore property for real and p-adic groups. Math. Scand. 109(2) (2011) 201-224.
- (avec Yves de Cornulier) A characterization of relative Kazhdan Property T for semidirect products with abelian groups. Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2011), 31, 793-805.
- (avec Yves de Cornulier et Alain Valette) Isometric group actions on Hilbert spaces : growth of cocycles. Geom. Funct. Anal. 17 (2007), 770-792.
- (avec Yves de Cornulier et Alain Valette) Isometric group actions on Hilbert spaces : structure of orbits. Canad. J. Math. 60 (2008), no. 5, 1001–1009.
- (avec Yves de Cornulier et Alain Valette) Isometric group actions on Banach spaces and representations vanishing at infinity. Transform. Groups 13 (2008), no. 1, 125–147.

Groupes hyperboliques localement compacts, cohomologie L^p

- (2012) (avec Pierre-Emmanuel Caprace, Yves de Cornulier et Nicolas Monod) Amenable hyperbolic groups. JEMS (sous presse).
- (avec Yves de Cornulier) Contracting automorphisms and Lp-cohomology in degree one. Arkiv fur Matematik : Volume 49, Issue 2 (2011), Page 295-324
- Vanishing of the first reduced cohomology with values in a Lp-representation. Annales de l'institut Fourier, 59 no. 2 (2009), p. 851-876.

Probabilités sur les graphes de Cayley

- Speed of convergence in first passage percolation and geodesicity of the average distance. Soumis, arXiv :1410.1701

- (avec Itai Benjamini) First passage percolation on nilpotent Cayley graphs and beyond. Soumis, arXiv :1410.3292
- (avec Itai Benjamini et Hilary Finucane) Algebraic recurrent random walks on groups. A paraître dans Elec. Com. Prob.
- Isoperimetric profile and random walks on locally compact solvable groups. Rev. Mat. Iberoam. 29 (2) (2013), 715-737.

Problèmes variés de géométrie sur les groupes et les graphes transitifs

- (avec Mikael de la Salle) Characterizing a vertex-transitive graph by a large ball. Soumis. arXiv :1508.02247
- (avec Mathieu Carette) Geometric rigidity and flexibility for groups acting on trees. En préparation.
- (avec Itai Benjamini et Hilary Finucane) On the scaling limit of finite vertex transitive graphs with large diameter. A paraître dans Combinatorica.
- (avec Cristobal Rivas) On the space of left-orderings of virtually solvable groups. À paraître dans Groups Geom. Dyn.
- (avec Yves de Cornulier) Quasi-isometrically embedded free sub-semigroups. Geom. Topol. 12 (2008), 461-473.

Conjecture de Baum-Connes grossière

- (avec Erik Guentner and Guoliang Yu) Operator Norm Localization for linear groups and applications to K-theory. Advances in Math. 226 4 (2011), 3495-3510.
- (avec Xiaoman Chen, Xianjin Wang, Guoliang Yu) Metric sparsification and operator norm localization. Advances in Math. 218 (2008), 1496-1511.

Traitement du signal et analyse harmonique

- (avec Haichao Wang) Uncertainty Principles in Finitely generated Shift-Invariant Spaces with additional invariance. To appear in JMAA.
- (avec Akram Aldroubi) On the Existence of Optimal Unions of Subspaces for Data Modeling and Clustering. Foundations of Computational Mathematics, 2011 : 363 379.
- (avec Akram Aldroubi, Ilya Krishtal et Haichao Wang) Principal Shift-invariant spaces with extra-invariance nearest to observed data. Collect. Math. 63 (2012), no. 3, 393-401.
- The Schur algebra is not spectral in B(l2). Monatshefte fuer Mathematik 164 1 (2010), 115-118.
- Left inverses for matrices in the weighted Schur algebra. Journal of Functional Analysis, 259, No. 11. (2010), 2793-2813

Chapitre 1

Complexité finie et rigidité topologique

1.1 La conjecture de Borel

Un résultat fondamental du début du XXième siècle stipule qu'une surface topologique fermée (c'est-à-dire compacte sans bord) connexe orientable est caractérisée à homéomorphisme près par son genre. On en déduit en particulier que la classe d'isomorphisme du groupe fondamental d'une surface est un invariant topologique complet. En dimension plus grande, il faut tenir compte des groupes π_k pour $k \geq 2$. Toutefois, il est légitime de se demander si le groupe fondamental reste un invariant complet parmi les variétés asphériques, c'est-à-dire dont les π_k s'annulent pour $k \geq 2$ (cette condition équivaut à dire que le revêtement universel de la variété est contractile). Il n'est pas difficile de montrer que deux variétés asphériques dont les groupes fondamentaux sont isomorphes ont même type d'homotopie. Cela nous amène à une conjecture célèbre que l'on attribue en général à Borel selon laquelle toute équivalence d'homotopie entre deux variétés fermées asphériques M et M' est homotope à un homéomorphisme.

Théorème. *(Voir [KrLu09, AFW12]) La conjecture de Borel est vérifiée en dimension* ≤ 3.

Ce théorème repose en grande partie sur la conjecture de géométrisation de Thurston, démontrée par Perelman (on pourra consulter [BBBMP]), mais aussi sur les résultats de Waldhausen et Turaev (nous renvoyons à l'article de Kreck et Lück [KrLu09]).

Les approches qui prévalent en dimension ≤ 3 sont impossibles à étendre aux dimensions supérieures, pour lesquelles des méthodes générales doivent prendre le pas sur la démarche de classification. Fort heureusement, la grande dimension ne présente pas que des inconvénients, car elle fournit davantage "de place" pour effectuer certaines opérations de chirurgie. Nous introduirons la théorie de la chirurgie en grande dimension au paragraphe 1.1.1. Retenons pour l'instant que celle-ci permet de transposer le problème topologique énoncé ci-dessus en un énoncé purement algébrique faisant intervenir le groupe fondamental de M. Les premiers résultats de rigidité topologique (en dimension ≥ 5) portent ainsi sur des variétés asphériques dont le groupe fondamental est "relativement simple" : d'abord abélien, virtuellement nilpotent, puis polycyclique (voir [W]). Par ailleurs, et par des méthodes radicalement différentes, Mostow a démontré une forme extrêmement forte de la conjecture de Borel pour les variétés hyperboliques fermées de dimension au moins 3 : dans ce cas, l'équivalence d'homotopie est homotope à une isométrie [Mo68].

À la fin des années 80, Farrel et Jones [FJ89, FJ90, FJ93] ont réalisé un véritable tour de force en démontrant la conjecture de Borel pour une vaste classe de variétés asphériques : celles qui admettent une métrique riemannienne à courbure ≤ 0. Leur approche fait intervenir des propriétés dynamiques du flot géodésique sur la variété. Ces résultats ont été récemment étendus et généralisés par Bartels et Lück [BL12] qui ont notamment démontré la conjecture de Borel en dimension ≥ 5 pour les variétés dont le groupe fondamental est hyperbolique au sens de Gromov.

Comme nous l'avons laissé sous-entendre, le cas de la dimension 4 est problématique et peu de choses sont connues concernant le statut de la conjecture de Borel.

1.1.1 Un très bref aperçu de la chirurgie

Grossièrement, la chirurgie consiste à transformer une variété (topologique ou lisse en fonction du contexte) en une autre par une suite d'opérations élémentaires. Chacune de ces opérations consiste, partant d'une variété M de dimension $n = p+q$, à découper une copie plongée de $S^p \times D^q$, ce qui fait apparaître un bord homéomorphe à $S^p \times S^{q-1}$ le long duquel on recolle une copie de $D^{p+1} \times S^{q-1}$. Cette opération fournit en outre un cobordisme W entre M et la nouvelle variété M' : celui-ci est obtenu à partir du cobordisme trivial $W_0 = M \times [0, 1]$ en attachant un corps à anses $D^{p+1} \times S^q$ le long de $S^p \times S^{q-1} \times \{1\}$.

De manière extrêmement synthétique, voici un programme censé mener à la résolution de la conjecture de Borel pour les variétés de dimension ≥ 5 (la définition du groupe de Whitehead et le théorème du s-cobordisme seront rappelés au paragraphe 1.5) :

– Rappelons que l'on dispose d'une équivalence d'homotopie $f : M \to M'$. La première étape consiste à montrer que f est une équivalence d'homotopie simple (ce qui résulte par exemple de l'annulation du groupe de Whitehead de $\pi_1(M)$).
– Il s'agit ensuite de construire un cobordisme $(W; M, M')$ et d'étendre f en une application continue $(F, f, id) : (W; M, M') \to (M' \times [0, 1], M' \times \{0\}, M' \times \{1\})$.
– Intervient alors l'étape dite de "chirurgie" : celle-ci consiste modifier W et F relativement à leur frontière à l'aide d'opérations chirurgicales de manière à ce que F devienne une équivalence d'homotopie, et donc que W devienne un h-cobordisme. Durant ce processus, il faut s'assurer que la torsion de Whitehead du h-cobordisme résultant est triviale. On conclut alors par le théorème du s-cobordisme.

Par le théorème de Whitehead [Wh78, Theorem I.3.1, p. 164], il suffit pour la troisième étape de rendre F k-connexe pour tout $k \geq 1$. Un argument de dualité permet de se limiter au cas où $k \leq n/2$. Un théorème de Milnor et Wallace [Mi61, Wa60] (see [H, Chapter 1, p8]) règle le cas où $k < n/2$, ce qui concentre toutes les difficultés au voisinage de la dimension moitié. On se heurte alors à une obstruction algébrique : "l'obstruction de chirurgie" qui est liée à la manière dont les sphères immergées de dimension moitié s'intersectent entre elles (et avec elles-même). On sait de plus qu'elle constitue un invariant complet lorsque la dimension de M est ≥ 5 [H, Theorem 3.2., p 36]. Cette obstruction vit dans un module sur l'anneau $\mathbf{Z}[\pi_1(M)]$ appelé groupe de L-théorie. La difficulté à surmonter est donc de calculer ce groupe. La conjecture de Farrell-Jones stipule que ce groupe est isomorphe à un certain groupe d'homologie, ce qui permet de le calculer par les moyens habituels de la topologie algébrique [FRR95, p 37], [KrLu05]. Jusqu'à présent la démonstration de cette conjecture n'a pu se faire qu'au cas par cas, nécessitant des informations géométriques, dynamiques ou algébriques sur le groupe fondamental (ce qui nous renvoie au paragraphe précédent et aux suivants).

Parmi les travaux précurseurs de la chirurgie, citons en particulier ceux de Thom sur la transversalité et le cobordisme [Th54], et le théorème de la signature de Hirzebruch [H]. Un outil clef est le théorème de plongement de Whitney (voir [Mi65]) : c'est précisément le point qui fait défaut en dimension ≤ 4 et qui donc justifie de se placer en grande dimension. L'idée d'utiliser la chirurgie pour tuer des groupes d'homotopie d'une variété apparaît pour la première fois dans les articles de Milnor et Wallace [Mi61, Wa60]. Parmi les premières conséquences spectaculaires de cette théorie, mentionnons la conjecture de Poincaré en dimension ≥ 5 et le théorème du h-cobordisme de Smale [Sm61, Mi65], ainsi que la classification des sphères exotiques par Milnor et Kervaire [KM63]. Parmi les fondateurs de cette théorie, il faut également citer Browder, Novikov et Sullivan (on pourra consulter l'excellent livre [FRR95]). Il est à noter que la chirurgie s'est d'abord développée dans le cadre des variétés simplement connexes (en témoigne le livre de Browder [Bro72]). Une étape essentielle vers le cas général (sans restriction sur le groupe fondamental) est le théorème du s-cobordisme par Barden, Mazur et Stalling (voir [Ke65]), et surtout les travaux de Novikov et Wall introduisant les fondements de la L-théorie. Jusqu'au milieu des années 70, la chirurgie s'appliquait essentiellement aux variétés différentiables, et il faut attendre le travail de Kirby et Siebenmann pour que la théorie s'étende aux variétés topologiques [KS77]. Ce domaine est resté très actif jusqu'à nos jours, et il n'est pas envisageable d'en retracer ici tout l'historique. Nous nous contenterons de renvoyer le lecteur aux livres [W, FRR95, R96, KrLu05].

1.2 Une version "métrique" de la conjecture de Borel

Il est possible de donner une version de la conjecture de Borel pour des variétés topologiques non compactes, équipées d'une distance pour laquelle ces variétés sont complètes, et uniformément contractiles. Commençons par faire le lien avec la conjecture de Borel telle que nous l'avons énoncée précédemment.

Étant donnée une équivalence d'homotopie $f : M_1 \to M_2$ entre deux variétés fermées asphériques (pointées), induisant un isomorphisme θ entre leurs π_1 respectifs. Celle-ci se relève en une équivalence d'homotopie entre les revêtements universels $\tilde{f} : \tilde{M}_1 \to \tilde{M}_2$. Cette équivalence d'homotopie est de plus équivariante au sens où pour tout $x \in M$ et tout $g \in \pi_1(M)$, $\tilde{f}(gx) = \theta(g)\tilde{f}$. Supposons maintenant que M_1 et M_2 sont munies de métriques riemanniennes de sorte que $\tilde{M}_1$ et $\tilde{M}_2$ se retrouvent munies de métriques riemanniennes périodiques (c'est-à-dire invariantes sous l'action du groupe fondamental). Il est facile de vérifier que $\tilde{f}$ est une quasi-isométrie et donc préserve la géométrie à grande échelle de ces variétés. La conjecture de Borel implique en particulier que $\tilde{f}$ est à distance bornée d'un homéomorphisme. Notons au passage que la condition d'asphéricité des variétés implique (en dimension ≥ 1) que leurs revêtements universels sont non-compactes et donc ont une géométrie à grande échelle non-triviale.

On voit alors se dessiner un contexte plus général dans lequel énoncer une forme purement géométrique de la conjecture de Borel. Nous dirons qu'une variété riemannienne M est uniformément contractile s'il existe une fonction $\phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ telle que pour tout $x \in M$, la boule $B(x, r)$ de rayon r se déforme continument en un point à l'intérieur de $B(x, \phi(r))$. Notons qu'une variété uniformément contractile est contractile, et qu'une variété riemannienne contractile dont le groupe d'isométries est cocompact est uniformément contractile.

La **conjecture de Borel métrique** (plus souvent connue sous l'appellation de conjecture de Borel bornée) stipule qu'une quasi-isométrie entre deux variétés riemanniennes géodésiquement complètes uniformément contractiles est à distance bornée d'un homéomorphisme [1].

En fait sans hypothèse supplémentaire de "géométrie bornée" (satisfaite par exemple pour le revêtement universel d'une variété compacte), cette conjecture est fausse [DFW03].

Par ailleurs, contrairement à la conjecture de Borel, sa version métrique est ouverte dès la dimension 2. Elle est en revanche connue en toute dimension lorsque les deux variétés sont isométriques à l'espace euclidien ou à un espace symétrique (dans de nombreux cas, une quasi-isométrie est même à distance bornée d'une isométrie [Pan89, KL97]).

Les résultats que nous présentons ici portent sur des variétés de dimension au moins 5 car ils reposent en grande partie sur une forme adéquate de chirurgie, développée initialement dans les années 70 par Chapman, Ferry, Quinn, et Ranicky (voir le livre [FP93]). Comme dans le cas des variétés compactes, la chirurgie a pour rôle de transformer un problème topologique en un problème algébrique. Plus précisément, soit M une variété riemannienne complète uniformément contractile. L'énoncé algébrique qui implique [2] la conjecture de Borel métrique est une version "métrique" de la conjecture Farrell-Jones en L-théorie. Elle affirme qu'une certaine application entre deux ensembles, dont l'un est un groupe d'homologie et l'autre un objet plus compliqué est un isomorphisme. Plus précisément, cette conjecture dit que l'application d'assemblage [3]

$$A : H_n(M, \mathbb{L}(e)) \to L_n^{met}(M) \tag{1.2.1}$$

est un isomorphisme. Toute la difficulté de cette conjecture réside dans le fait que contrairement au terme de gauche, celui de droite ne présente pas de bonnes propriétés d'excision. Nous verrons en revanche qu'une certaine forme d'excision "à grande échelle" permet malgré tout de montrer que A est un isomorphisme, sous réserve que la géométrie à grande échelle de M soit "contrôlable" en un sens que nous expliciterons.

Terminons cette section par une remarque qui prendra tout son intérêt au paragraphe suivant. Tout d'abord, rappelons la notion de *complexe de Rips* d'un espace métrique. Étant donné un espace métrique X, et un nombre $d > 0$, on appelle complexe de Rips de X de paramètre d le complexe simplicial $P_d(X)$ dont les sommets sont les points de X, et dans lequel une partie finie $\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\} \subseteq X$ engendre un simplexe précisément lorsque $d(\gamma_i, \gamma_j) \leq d$ pour tout $0 \leq i, j \leq n$. On a une inclusion canonique $P_d(X) \subset P_{d'}(X)$ dès que $d' \geq d$. Notons que le complexe de Rips est *asymptotiquement contractile* : pour tout sous-complexe simplicial fini Q de $P_d(X)$, il existe

1. Une version plus forte de cette conjecture s'énonce (comme pour la conjecture de Borel) en termes d'équivalences d'homotopie, mais pour simplifier, nous nous contenterons ici de cet énoncé plus court.

2. Ceci résulte de la suite exacte longue de chirurgie dans sa version "métrique" (see [PQR03, CFY08]).

3. "met" est ici l'abréviation de "métrique".

$d' > d$ tel que Q est déformable continument en un point dans le complexe $P_{d'}(X)$. Dans les cas qui nous intéressent, l'espace métrique X sera *uniformément discret* et *à géométrie bornée* : le premier signifie que $\inf_{x \neq y} d(x,y) > 0$, et le second que pour tout $r > 0$, $\sup_{x \in X} |B(x,r)| < \infty$.

Revenons à présent à notre variété complète et uniformément contractile M. Soit un espace métrique X uniformément discret, à géométrie bornée, et quasi-isométrique à M, obtenu par exemple en prenant une partie maximale de points de M séparés d'une distance d'au moins 1. On peut reformuler la conjecture précédente sous une forme équivalente qui ne fait intervenir que l'espace métrique discret X : on dira ainsi que X satisfait la conjecture de Farrell-Jones métrique si l'application d'assemblée suivante est un isomorphisme :

$$A : \lim_{d \to \infty} H_n(P_d(X), \mathbb{L}(e)) \to \lim_{d \to \infty} L_n^{met}(P_d(X)), \tag{1.2.2}$$

où $P_d(X)$ est le complexe de Rips de X à l'échelle d, et où chaque simplexe est équipé de sa métrique euclidienne standard (voir [GTY12, Proposition 4.3.4.]). En particulier, dans le cas où M est le revêtement universel d'une variété asphérique, on est ramené à démontrer que n'importe quel graphe de Cayley du groupe fondamental de cette variété satisfait la conjecture de Farrell-Jones métrique.

1.3 Une notion de complexité pour les espaces métriques.

Motivation. Afin d'attaquer la conjecture de Borel métrique, ou plus exactement son pendant algébrique qu'est la conjecture de Farrell-Jones métrique, une approche consiste à "découper" la variété M en morceaux de "complexité moindre" et d'appliquer une forme adéquate de suite de Mayer-Vietoris. Comme ces morceaux n'auront aucune raison d'être des variétés uniformément contractiles, il est avantageux de travailler dès le départ avec X (ceci a pour coût non négligeable de devoir travailler avec un paramètre supplémentaire : l'échelle d du complexe de Rips). Pour montrer que (1.2.2) est un isomorphisme, nous aurons besoin de deux ingrédients cruciaux :

- (1.2.2) est un isomorphisme si X est un point, ou plus généralement si X est borné ;
- Ranicki et Yamasaki ont démontré que le terme de droite de (1.2.2) satisfait à une forme à grande échelle de suite exacte de Mayer-Vietoris [RY95, RY06].

Afin d'exploiter ces propriétés, mes collaborateurs Erik Guentner, Guoliang Yu et moi-même avons introduit une notion de complexité métrique. Avant de définir celle-ci, illustrons-la dans le cas très simple de $\mathbf{R}$ muni de sa distance euclidienne. Pour tout r arbitrairement grand, on peut décomposer $\mathbf{Z}$ en une union disjointe d'intervalles de longueur r :

$$\ldots, I_{-1}, I_0, I_1, I_2 \ldots$$

Observons que la réunion des intervalles pairs : $X_0 := \bigcup_i I_{2i}$ est une union r-disjointe de parties de diamètre borné : nous dirons que X_0 est "r-disséminé". Il en va de même de l'union des intervalles impairs $X_1 := \bigcup_i I_{2i+1}$, de sorte que nous avons un recouvrement de $\mathbf{R}$ par deux parties "r-disséminées". Le but est d'appliquer la suite exacte [4] longue de Mayer-Vietoris de Ranicki-Yamasaki

4. En réalité cette suite n'est exacte qu'en un sens approximatif, ce qui se formule par un énoncé complexe dépendant de plusieurs paramètres.

à ce recouvrement de $\mathbf{R}$. De manière très synthétique, l'idée est qu'en autorisant le paramètre de séparation r à être arbitrairement grand, on se ramène à considérer des morceaux de diamètre borné (ici par r) pour lequels on sait que (1.2.2) est un isomorphisme.

Considérons maintenant l'espace $\mathbf{R}^2$: nous voyons bien qu'il est impossible de le décomposer en deux parties r-disséminées. Il serait possible en revanche de couvrir $\mathbf{R}^2$ par une union de 3 parties disséminées. Cependant, nous suivrons un chemin différent, et allons tenter d'itérer la procédure précédente, tout en imposant à chaque étape que le nombre de parties soit au plus 2 (rappelons que cette contrainte provient du fait que nous souhaitons appliquer un argument de type Mayer-Vietoris).

Dans le cas de $\mathbf{R}^2$, étant donné $r_1 > 0$ potentiellement très grand, on peut d'abord décomposer l'espace en bandes verticales d'épaisseur r_1, et en réarrangeant ces bandes selon la parité de leur indice, obtenir un recouvrement de $\mathbf{R}^2$ en deux parties X_0 et X_1. Bien que n'étant pas r_1-disséminées, ces parties sont réunions r_1-disjointes de parties "uniformément" quasi-isométriques à $\mathbf{R}$. Ainsi, étant donné $r_2 > 0$, dépendant éventuellement de ce qui précède, nous pouvons appliquer le découpage que nous avions obtenu dans le cas de $\mathbf{R}$, afin d'obtenir cette fois-ci des parties r_2-disséminées.

Définition formelle. Pour éviter d'avoir à manipuler de multiples paramètres, il est avantageux de définir la complexité finie pour des familles (possiblement infinies) d'espaces métriques. Par abus de langage, un espace métrique individuel X sera parfois identifié avec la famille réduite à un élément $\{X\}$. Avant d'énoncer une définition précise, il nous faut introduire un peu de terminologie. Une collection de sous-espaces $\{ Z_i \}$ d'un espace métrique Z est *r-disjointe* si pour tout $i \neq j$ on a $d(Z_i, Z_j) \geq r$. Pour exprimer l'idée que Z est l'union de sous-espaces Z_i, et que la collection de ces sous-espaces est r-disjointe nous notons

$$Z = \bigsqcup_r Z_i.$$

Une famille d'espaces métriques $\{ Z_i \}$ est *bornée* si le diamètre des Z_i est borné uniformément, i.e. si $\sup \operatorname{diam}(Z_i) < \infty$. Une famille d'espaces métriques $\mathcal{X}$ est *r-décomposable* par rapport à une famille d'espaces métriques $\mathcal{Y}$ si tout $X \in \mathcal{X}$ admet une *r-décomposition*

$$X = X_0 \cup X_1, \quad X_i = \bigsqcup_r X_{ij},$$

où chaque $X_{ij} \in \mathcal{Y}$. Introduisons la notation $\mathcal{X} \xrightarrow{r} \mathcal{Y}$ pour indiquer que $\mathcal{X}$ est r-décomposable par rapport à $\mathcal{Y}$. Soit $\mathfrak{A}$ une collection de familles d'espaces métriques. Une famille $\mathcal{X}$ est *décomposable* par rapport à $\mathfrak{A}$ si, pour tout $r > 0$, il existe une famille $\mathcal{Y} \in \mathfrak{A}$ et une r-décomposition de $\mathcal{X}$ par rapport à $\mathcal{Y}$. Enfin, une collection $\mathfrak{A}$ est *stable par décomposition* si toute famille d'espaces métriques qui se décompose par rapport à $\mathfrak{A}$ appartient à $\mathfrak{A}$. Nous pouvons maintenant définir notre concept de complexité finie.

Définition 1. La collection $\mathfrak{C}$ des familles d'espaces métriques de complexité finie est la collection minimale de familles d'espaces métriques contenant les familles bornées et stables par décomposition.

Il s'agit de la définition la plus “économique”, mais pas forcément la plus maniable. Nous donnons au paragraphe 1.6 une caractérisation en termes de stratégie gagnante qui est plus utile en pratique.

Terminons ce paragraphe par le théorème général suivant, que nous illustrerons au paragraphe suivant par des exemples plus concrets. Rappelons qu'un espace métrique X est uniformément discret si $\inf_{x,y\in X} d(x,y) > 0$, et qu'il est à géométrie bornée si pour tout $r > 0$, $\sup_{x\in X} |B(x,r)| < \infty$.

Théorème 2. [GTY12] Soit X un espace métrique uniformément discret et à géométrie bornée. Si de plus X est de complexité finie, alors (1.2.2) est un isomorphisme.

Ce résultat étend le résultat principal de [CFY08] traitant du cas où X est de dimension asymptotique finie (et qui est démontré par une approche différente).

Corollaire 3. (Conjecture de Borel métrique) la conjecture de Borel métrique est satisfaite par les variétés riemanniennes de dimension au moins 5, complètes, uniformément contractiles, quasi-isométriques à un graphe à degré borné de complexité finie. C'est le cas par exemple du revêtement universel d'une variété fermée asphérique dont le groupe fondamental est de complexité finie.

1.4 Groupes de complexité finie.

Nous dirons d'un groupe dénombrable qu'il est de complexité finie s'il possède une métrique propre invariante à gauche pour laquelle il est de complexité finie. La notion de complexité finie étant clairement un invariant d'équivalence grossière entre espaces métriques, cette définition ne dépend en fait pas d'un choix particulier de métrique invariante propre.

On peut montrer que la complexité finie est invariante par extension, limite directe, produit amalgamé, etc. [GTY]. En particulier, les groupes résolubles, et plus généralement élémentairement moyennables sont de complexité finie. De plus les groupes hyperboliques au sens de Gromov, les groupes agissant proprement sur un espace cubique CAT(0) de dimension finie sont de complexité finie.

La notion de complexité finie est inspirée de la notion de dimension asymptotique finie : on peut en un sens l'interpréter comme une version itérée de la propriété d'être de dimension asymptotique 1. On peut en fait montrer (ce n'est pas immédiat) qu'un espace de dimension asymptotique finie est de complexité finie [GTY]. Mais comme nous venons de le voir, cette dernière classe est bien plus vaste car par exemple le groupe dénombrable abélien $\oplus_{n\in\mathbf{N}}\mathbf{Z}$ est de complexité finie, alors qu'il est de dimension asymptotique infinie. Une différence essentielle entre ces deux notions tient d'ailleurs au fait que la complexité finie est invariante par limite directe.

L'objectif initial de ce travail était de démontrer la conjecture de Borel métrique pour des revêtement universels de variétés asphériques dont le groupe fondamental est isomorphe à un sous groupe dénombrable de $\mathrm{GL}(n,A)$ pour un anneau commutatif A (nous dirons d'un tel groupe qu'il est linéaire). C'est chose faite grâce au théorème suivant

Théorème 4. [GTY12] Tout groupe dénombrable linéaire est de complexité finie.

Une conséquence assez inattendue de notre démonstration donne également un renforcement de ce résultat en caractéristique non nulle.

Théorème 5. [GTY12] Etant donné un sous-anneau de type fini A d'un corps de caractéristique positive, le groupe $\mathrm{GL}(n, A)$ est de dimension asymptotique finie.

En particulier en en déduit que $\mathrm{GL}(n, \mathbf{F}_p[X, Y])$ est de dimension asymptotique finie, ce qui contraste avec le fait que $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z}[X])$ est, lui, de dimension asymptotique infinie [5].

Peu de groupes sont actuellement connus pour avoir une complexité infinie : pour l'instant les seules exceptions sont les groupes construits à l'aide de méthodes probabilistes par Gromov et qui ne se plongent pas uniformément dans un espace de Hilbert [G03, AD08]. Il est cependant plausible que les groupes de Thompson F et T soient de complexité infinie. Il serait intéressant par exemple d'élucider le cas des groupes à croissance intermédiaire.

1.5 Quelques conséquences concernant les variétés fermées

Bien que définie en termes de géométrie à grande échelle, la propriété d'être de complexité finie a des applications importantes sur la topologie des variétés fermées.

Tout d'abord, il est possible par un procédé dit de "descente" (voir [CP95]) de déduire du théorème 2 une version stable de la conjecture de Borel.

Théorème 6. [GTY12](Conjecture de Borel stable) Une variété topologique fermée asphérique (de dimension quelconque) dont le groupe fondamental est de complexité finie est caractérisée à stabilisation près par son groupe fondamental. Plus précisément, toute équivalence d'homotopie $f : M \to M'$ entre variétés topologiques fermées asphériques dont le groupe fondamental est de complexité finie est telle que $f \times \mathrm{Id} : M \times \mathbf{R}^4 \to M' \times \mathbf{R}^4$ est homotope à un homéomorphisme.

D'autre part, dans un travail en collaboration avec Dan Ramas et Guoliang Yu [RTY13], nous avons démontré la conjecture de Novikov algébrique en K-théorie pour des groupes de type fini possédant un espace classifiant fini et de complexité finie. Nous ne décrirons pas le contenu (assez abstrait) de ce résultat. Signalons plutôt qu'en se basant partiellement sur notre résultat, Carlsson et Goldfarb seraient récemment parvenus à démontrer le résultat remarquable suivant. Rappelons que le groupe de Whitehead $\mathrm{Wh}(G)$ associé à un groupe G est le quotient du groupe $\mathrm{GL}(\mathbf{Z}[G]) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{GL}(n, \mathbf{Z}[G])$ par le sous-groupe engendré par les matrices élémentaires, les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à un élément de G ou à -1. Ce groupe intervient en particulier dans la théorie de l'homotopie simple introduite par Whitehead.

Théorème 7. [Go, Theorem 3.11] Le groupe de Whitehead d'un groupe de type fini G de complexité finie possédant un espace classifiant fini est trivial.

Une conséquence topologique de ce résultat est le théorème du h-cobordisme (en grande dimension). Pour simplifier, nous nous limiterons au contexte des variétés topologiques. Rappelons qu'un

5. Notons cependant que les anneaux $\mathbf{F}_p[X, Y]$ et $\mathbf{Z}[X]$ ont même dimension de Krull. En général, il n'existe de pas de caractérisation algébrique des groupes linéaires de dimension asymptotique finie.

cobordisme W entre deux variétés M et N est une variété compacte dont le bord est homéomorphe à la réunion disjointe de M et N. Un h-cobordisme est un cobordisme pour lequel les inclusion de M et de N dans W sont des équivalences d'homotopie. Le théorème du s-cobordisme [Ke65] stipule que si $\mathrm{Wh}(\pi_1(M)) = \{1\}$, alors tout h-cobordisme entre M et N est homéomorphe à un cyclindre : $W \simeq M \times [0, 1]$.

Corollaire 8. (Théorème du s-cobordisme) Etant donné un groupe de type fini G de complexité finie possédant un espace classifiant fini. Alors tout h-cobordisme W de dimension au moins 6 de groupe fondamental isomorphe à G est homéomorphe à un cyclindre.

1.6 Une reformulation de la complexité finie en terme de stratégie gagnante

Il s'agit d'un jeu opposant deux joueurs, nous l'appellerons le "jeu de décomposition". Le jeu commence avec la donnée d'une famille $\mathcal{X}$ d'espaces métriques. L'objectif du premier joueur est par une succession de décompositions de $\mathcal{X}$ de se retrouver avec une famille bornée. L'autre joueur, n'a d'autre but que d'empêcher le premier joueur de gagner.

Formellement, soit $\mathcal{X} = \mathcal{Y}_0$ la famille de départ. Le jeu démarre par le second joueur proposant un nombre positif r_1. Le premier joueur doit alors fournir une r_1-décomposition $\mathcal{Y}_1$ de $\mathcal{X}$. Si celle-ci est borné, il a gagné, autrement le jeu continue. Les tours suivants sont analogues : le second joueur soumettant au premier un nombre r_{i+1}, et le premier répondant en fournissant une r_{i+1}-décomposition de $\mathcal{Y}_i$ par rapport à une famille $\mathcal{Y}_{i+1}$.

Nous dirons que le jeu de décomposition admet une stratégie gagnante si le premier joueur a un moyen de gagner quelque soit les nombres proposés par son adversaires. Comme nous le verrons sur un exemple, même dans le cas où le premier joueur a une stratégie gagnante, le nombre de tours de jeu nécessaires pour parvenir à une famille bornée peut dépendre des choix effectués par le second joueur. Un jeu au cours duquel le premier joueur applique sa stratégie gagnante se décrit par une suite de décompositions commençant par la famille $\mathcal{X}$ et s'achevant par une famille bornée :

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y}_0 \xrightarrow{r_1} \mathcal{Y}_1 \xrightarrow{r_2} \mathcal{Y}_2 \xrightarrow{\quad} \ldots \mathcal{Y}_{n-1} \xrightarrow{r_n} \mathcal{Y}_n, \quad \mathcal{Y}_n \text{ bounded.}$$

Notons que l'existence d'une stratégie gagnante est une propriété plus forte que de demander que pour toute suite r_i *donnée à l'avance* il existe n et une suite $\mathcal{Y}_i$ comme ci-dessus tel que $\mathcal{Y}_n$ est une famille bornée. En effet, dans notre cas, le nombre r_i doit pouvoir à priori dépendre des étapes précédentes du jeu.

Proposition 9. [GTY] Une famille $\mathcal{X}$ d'espaces métrique est de complexité finie si et seulement si le jeu de décomposition admet une stratégie gagnante. De plus $\mathcal{X}$ est de dimension asymptotique finie si et seulement si le jeu a une stratégie gagnante en un nombre borné de tours.

Cette caractérisation est particulièrement utile pour montrer que certains espaces sont de complexité finie. Illustrons-le sur un premier exemple. Considérons le groupe $G = \oplus_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{Z}$ équipé de la métrique propre et invariante :

$$d(x, y) = \max_n (n + 1)|x_n - y_n|.$$

Soit $r_1 > 0$. Considérons le groupe G_{r_1} engendré par la boule de rayon r_1 : G_{r_1} n'est autre que le groupe, isomorphe à $\mathbf{Z}^{r_1}$, engendré par les suites x tel que $x_k = 0$ pour tout $k \geq r_1$. Notons que tout coset de G_{r_1} contient son r_1-voisinage, de sorte que les cosets sont deux à deux r_1-disjoints. Au premier tour, le premier joueur retourne donc la famille des cosets de G_{r_1}, tous isométriques à $\mathbf{Z}^{r_1}$. En généralisant l'argument donné plus haut pour $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{R}^n$ (et donc $\mathbf{Z}^n$), on voit qu'il suffit de $r_1 + 1$ tours de jeu pour que le premier joueur gagne. Il est intéressant de voir que le nombre d'étape nécessaire à terminer le jeu dépend ici du premier nombre r_1, et donc n'est pas borné.

Il est en fait possible d'associer à chaque famille d'espaces métriques de complexité finie un ordinal dénombrable qui coincide avec le nombre de tours de jeu d'une stratégie gagnante lorsque celui-ci est bornée. Cet ordinal permet de quantifier la notion de complexité finie, et il serait intéressant de pouvoir le calculer sur des exemples explicites (par exemple des groupes résolubles).

1.7 Démonstration du fait que $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}[X])$ est de complexité finie

Posons $A = \mathbf{Z}[X]$. Dans la suite, on supposera implicitement que $\mathrm{GL}(2, A)$ est muni d'une métrique invariante à gauche propre (telle que les boules sont finies). Une première idée consisterait à considérer le plongement de $\mathrm{GL}(2, A)$ dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$ induit par un plongement de A dans $\mathbf{R}$ (voire plus généralement dans un produit fini de corps locaux). Il est en effet facile de démontrer qu'équipé d'une métrique riemannienne invariante à gauche, celui-ci est un espace de complexité finie [6]. Mais le problème évident auquel nous faisons face est qu'un tel plongement est loin d'être discret. Comme nous allons le voir, la solution consiste à combiner ce type de plongements avec d'autres (dans notre cas un seul suffira) dans des corps de valuation discrète non localement compacts. Signalons d'emblée que cette idée n'est pas nouvelle (voir par exemple [AS82, GHW05]).

Commençons par plonger $\mathbf{Z}[X]$ dans son corps de fraction $K = \mathbf{Q}(X)$, que l'on peut munir de la valuation $\nu(P/Q) = \deg(P) - \deg(Q)$. On définit alors

$$\ell(g) = \max_{ij} \{ \nu(g_{ij}), \nu(g^{ij}) \}, \tag{1.7.1}$$

où g_{ij} et g^{ij} sont les coefficients matriciaux de g et g^{-1} respectivement dans $\mathrm{GL}(2, K)$. On vérifie aisément que ℓ est à valeurs positives, et que pour tous $g, h \in \mathrm{GL}(2, K)$ on a $\ell(gh) \leq \ell(g) + \ell(h)$ et $\ell(\mathrm{Id}) = 0$, de sorte que ℓ définit une pseudo-longueur sur $\mathrm{GL}(2, K)$, et que donc $d_\ell(g, h) = \ell(g^{-1}h)$ définie une pseudo-distance invariante à gauche.

Nous allons montrer que, muni de cette pseudo-distance, $\mathrm{GL}(2, K)$ est de complexité finie (en fait de dimension asymptotique finie). Introduisons les sous-groupes de $\mathrm{GL}(2, K)$ suivants : soit D le groupe, isomorphe à $\mathbf{Z}^2$, des matrices diagonales dont les coefficients non nuls sont des puissances de X. On note U le groupe des matrices unipotentes supérieures, et enfin $T = DU$, qui est isomorphe au produit semi-direct $D \ltimes U$.

On vérifie (par des manipulations matricielles élémentaires) que

$$\mathrm{GL}(2, K) = T\mathrm{GL}(2, \mathcal{O}),$$

6. On se ramène d'abord au sous-groupe des matrices triangulaires supérieure, qui étant fermé et cocompact est quasi-isométrique à $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$, puis celui-ci se traite essentiellement comme le cas de $\mathbf{R}^2$ discuté au paragraphe 1.3

où $\mathcal{O}$ est le sous-anneau de K consistant en les éléments de valuations ≤ 0. On observe que $\mathrm{GL}(2, \mathcal{O})$ est précisément la boule de rayon nul centrée en l'identité (on rappelle que ℓ n'est qu'une pseudo-longueur), de sorte que l'inclusion de (T, d_ℓ) dans $(\mathrm{GL}(2, K), d_\ell)$ est une isométrie entre ces deux espaces pseudo-métriques.

On est donc ramené à montrer que (T, ℓ) est de complexité finie. D'une manière générale, étant donnée une extension $1 \to N \to G \to Q \to 1$ de groupes munis de métriques invariantes, tels que Q et U sont de complexité finie, on montre que G l'est également en concaténant une stratégie gagnante pour Q avec une stratégie gagnante pour U. Ici, le quotient est D qui est isomorphe à $\mathbf{Z}^2$: on a déjà vu dans ce cas qu'une stratégie permet de terminer le jeu en deux étapes, i.e. au bout de la seconde étape, la famille de parties de D renvoyée par le premier joueur est bornée. Pour pouvoir appliquer cette stratégie au groupe T, on remplace les parties par leurs préimages par la projection $T \to D$: les morceaux obtenus à la fin de la seconde étape ne sont plus bornés, mais (uniformément) quasi-isométriques à U. On peut donc considérer sans perte de généralité qu'à la seconde étape, le premier joueur renvoie l'espace métrique (U, d_ℓ) à son adversaire. En restriction à U, la longueur ℓ s'écrit simplement comme

$$\ell(u) = \max\{\, 1, \gamma(u_{12})\}. \tag{1.7.2}$$

Pour simplifier, identifions U au groupe $(K, +)$ par l'isomorphisme $u \to u_{12}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la boule de rayon n centrée en l'élément neutre est simplement le sous-groupe de K composé des éléments de valuation $\leq n$. Supposons que le second joueur soumette au premier joueur le nombre entier r_3. Le premier joueur peut alors retourner la famille des cosets du sous-groupe $B_\ell(e, r_3) \cap U$ (ils sont par construction à distance au moins r_3). D'autre part cette famille est évidemment bornée (car composée de boules de rayon r_3). Ceci conclut la preuve du fait que $(\mathrm{GL}(2, K); \ell)$ est de complexité finie.

Revenons donc à notre groupe $\mathrm{GL}(2, A)$: son plongement dans $\mathrm{GL}(2, K)$ n'étant pas discret, la stratégie précédente ne permet pas de le décomposer en une famille bornée. Au lieu de cela, à l'étape 3, les joueur héritent des boules de rayon r_3 de $\mathrm{GL}(2, A)$, equipé de la pseudo-longueur ℓ. Or on observe que

$$B_\ell(e, r_3) \cap \mathrm{GL}(2, A) \subset \mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}[X]_{r_3}),$$

où $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}[X]_{r_3})$ (qui n'est pas un sous-groupe) désigne l'ensemble des matrices dont les coefficients sont des polynômes de degré au plus r_3.

Il nous reste à décomposer $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}[X]_{r_3})$, muni de la métrique induite par celle de $\mathrm{GL}(2, A)$. L'idée est de le plonger de manière *discrète* dans un produit fini de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})$. Pour cela, il nous suffit de fixer $r_3 + 1$ nombres réels deux à deux distincts $a_0, \ldots, a_{r_3}$ et de considérer le plongement ϕ de $\mathbf{Z}[X]_{r_3}$ dans $\mathbf{R}^{r_3+1}$ suivant

$$\phi(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_{r_3})).$$

Essentiellement il reste à se convaincre que ce plongement est discret (ce qui entraine que le plongement induit de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{Z}[X]_{r_3})$ dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})^{r_3+1}$ l'est également). Or ϕ est la restriction d'un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels entre $\mathbf{R}[X]_{r_3} \to \mathbf{R}^{r_3+1}$, qui est donc propre. Comme $\mathbf{Z}[X]_{r_3}$ est un sous-ensemble discret de $\mathbf{R}[X]_{r_3}$, on en déduit que son image par ϕ l'est aussi, ce qui achève la démonstration. Notons que le nombre d'étapes nécessaires à décomposer notre groupe en une famille bornée n'est pas borné à priori, puisqu'il dépend de r_3.

1.8 Projets

Il semble naturel de tenter d'adapter nos méthodes au cas de la conjecture de Borel elle-même. Les méthodes actuelles pour attaquer cette dernière, développées à l'origine par Farrel et Jones, et plus récemment généralisées par Bartels, Lück et Reich permettent également d'accéder à des classes très larges de groupes, mais largement disjointes de celles que nous traitons. Leur approche est de nature dynamique plus que géométrique.

Les méthodes que nous utilisons semblent quant à elles trop "géométriques" pour pouvoir s'appliquer directement à la conjecture de Borel, et des versions "équivariantes" naïves ne semblent pas fonctionner. Toutefois, les développement récents dûs à Carlsson et Goldfarb (concernant l'annulation du groupe de Whitehead) montrent qu'un espoir persiste dans cette direction.

Par ailleurs, il existe de vraies analogies entre les deux méthodes qui potentiellement pourraient indiquer une voie intermédiaire. En effet, l'approche dynamique utilise une propriété des groupes concernés qui est une sorte de version équivariante de dimension asymptotique finie. Nous espérons parvenir à définir une version analogue pour la complexité finie (qui comme nous l'avons vu est beaucoup plus générale que la dimension asymptotique finie).

Un premier pas vers ce rapprochement entre nos deux "équipes" a été franchi en juin 2011 lorsqu'une école d'été a été organisée autour de ces nouveaux résultats (au cours de laquelle j'ai donné un mini-cours).

Nous nous sommes promis avec Wolfgang Lück de poursuivre nos discussions au cours de l'année qui vient. Par ailleurs, Arthur Bartels m'a invité une semaine à Münster à l'automne 2012 afin d'échanger des idées sur ces thèmes. Plus récemment nous nous sommes mis d'accord avec Wolfgang Lück pour organiser une rencontre entre chercheurs spécialisés sur ces questions au printemps 2015. Cette conférence aura lieu à Bonn.

Chapitre 2

Fonction de Dehn et cônes asymptotiques des groupes de Lie réels et p-adics et de leurs réseaux cocompacts.

2.1 Fonction de Dehn et problème du mot

En 1912, Max Dehn ouvrait le champs à l'étude combinatoire des groupes de type fini en posant 3 problèmes de nature algorithmique fondamentaux [Dh]. Nous nous concentrerons sur l'un d'entre eux, appelé le problème du mot. Soit un groupe G donné par une présentation finie $\langle s_1, \ldots, s_k; r_1, \ldots, r_m \rangle$, où les r_i, appelés *relateurs*, sont des éléments du groupe libre F_S en la famille génératrice $S = \{s_1, \ldots s_k\}$. Le problème du mot se formule comme suit : existe-t-il un algorithme permettant de décider, étant donné un élément w du groupe libre F_S, s'il se projette sur l'élément neutre dans G. La complexité algorithmique de ce problème est lié à la fonction de Dehn, qui a fait l'objet d'intenses travaux depuis les années 80, notamment par Gersten, Thurston, Gromov et bien d'autres : on pourra consulter par exemple [G93], [Bri02] et [BRS07]. Etant donné une *relation* w associée à la présentation précédente, c'est-à-dire un élément du groupe libre F_S se projetant sur l'élément neutre de G, on définit son *aire* $A(w)$ comme le plus petit entier $a \in \mathbf{N}$ tel que w peut s'écrire comme produit d'au plus a conjugués des r_i. On définit alors la fonction de Dehn de cette présentation de la manière suivante :

$$\delta(l) = \sup_{w, |w|_S \leq l} A(w).$$

Dans la suite, étant données deux suites positives croissantes f et h, nous noterons $f \preceq h$ lorsqu'il existe une constante $C \geq 0$ tel que $f(n) \leq Cg(Cn) + Cn + C$. De plus si $f \preceq h$ et $h \preceq f$ alors nous noterons $f \approx h$ (la classe modulo $\approx$ de f sera appelé son comportement asymptotique). Si la fonction de Dehn dépend à priori de la présentation que l'on s'est donnée de G, il n'est pas difficile de montrer que son comportement asymptotique n'en dépend pas. Ainsi, pour simplifier, nous noterons δ_G la fonction de Dehn d'une présentation finie de G.

En résolvant le problème du mot dans le cas des groupes de surface de genre ≥ 2, Dehn a en fait montré que la fonction de Dehn satisfait $\delta(l) \preceq l$ [Dh12]. Plus tard, Gromov a généralisé ce fait en démontrant que le comportement linéaire de la fonction de Dehn équivaut au fait que le groupe G est hyperbolique [G87]. Ce n'est donc pas un hasard si la preuve de Dehn exploite la géométrie du plan hyperbolique. Considérons, plus généralement, une variété riemannienne M simplement connexe. Étant donné γ, un lacet différentiable à valeurs dans M, on définit l'aire $A(\gamma)$ de γ comme étant la borne inférieure des aires de disques differentiables immergés s'appuyant sur γ. La fonction de remplissage (filling function) de M est alors définie par

$$Fill_M(t) = \sup_{l(\gamma)\leq t} A(\gamma) \quad \forall t > 0,$$

où $l(\gamma)$ désigne la longueur du lacet γ. Une telle fonction isopérimétrique peut se définir plus généralement pour un CW-complex "métrique", c'est-à-dire équipé d'une métrique localement riemannienne. De manière générale, on a le fait suivant : si G agit proprement cocompactement par isométrie sur un CW-complexe métrique simplement connexe X, alors $D_G \approx Fill_X$ [Bri02, Filling Theorem 2.1.2].

Inversement, étant donnée une présentation finie d'un groupe G, il est possible d'associer à la présentation $\langle s_1, \ldots, s_k; r_1, \ldots, r_m\rangle$ un CW-complexe simplement connexe sur lequel G agit proprement cocompactement par isométrie : le 2-*complexe de Cayley* s'obtient à partir du graphe de Cayley de G associé à la partie génératrice S en collant un polygone régulier euclidien le long de chaque cycle correspondant à un relateur (ainsi qu'à ses translatés sous l'action de G). Ainsi la fonction de Dehn peut s'étudier soit comme objet combinatoire, soit comme invariant géométrique. Nous verrons que ces deux interprétations peuvent se révéler complémentaires, au moins lorsqu'il s'agit de guider l'intuition.

2.2 Un (très) rapide survol

Quels sont les comportements asymptotiques possibles de la fonction de Dehn ? Nous avons déjà vu que celle-ci est "minimale" pour les groupes hyperboliques. Par ailleurs il n'est pas difficile de voir que pour $\mathbf{Z}^d$, $d \geq 2$, la fonction de Dehn croît quadratiquement. Il s'agit là encore d'un cas particulier d'un phénomène plus général : étant donné un groupe G agissant proprement cocompactement sur un espace CAT(0) (comme par exemple une variété à courbure sectionnelle négative ou nulle), alors $\delta_G(l) \approx l^2$, à moins que G ne soit hyperbolique [ECHLPT92, BH99].

Enfin, Gromov a observé un phénomène remarquable, dont Bowdich a donné une preuve très élégante (dans un cadre très général) : la fonction de Dehn ne peut jamais être strictement comprise entre l et l^2 [Bo95].

En dehors de ces théorèmes très généraux, les résultats connus concernant la fonction de Dehn dépendent très fortement de la classe de groupes que l'on regarde. Dans le travail que je décrirai plus loin, il sera question des réseaux uniformes de groupes de Lie connexes (ou de groupes algébriques sur des corps locaux). Comme nous venons de le voir, les réseaux uniformes de groupes semi-simples ne présentent de ce point de vue pas grand intérêt puisque leur fonction de Dehn se comporte quadratiquement (sauf dans le cas de rang 1 où elle croît linéairement). Le cas des réseaux non uniformes est quant à lui un problème à part que nous n'aborderons pas ici.

Nos résultats avec Yves de Cornulier ([CT10, CT12, CT13] englobent notamment une vaste classe de groupes dont les propriétés géométriques sont encore très mal comprises : les groupes polycycliques. Tout d'abord, n'oublions pas que les groupes polycycliques contiennent la sous-classe des groupes nilpotents, pour laquelle on sait que la fonction de Dehn est au plus polynomiale. Par exemple le groupe de Heisenberg a une fonction de Dehn cubique [BMS93]. Un autre groupe fondamental de 3-variété est le groupe SOL dont il sera question plus loin : ce groupe est en un sens le plus petit groupe polycyclique à croissance exponentielle. Or Thurston a créé la surprise en montrant que sa fonction de Dehn est exponentielle [ECHLPT92]. Gromov a par la suite exhibé des exemples de groupes polycycliques à croissance exponentielle dont la fonction de Dehn est quadratique [G93]. Nous verrons qu'il existe en fait une dichotomie entre comportement polynomial et comportement exponentiel, dont nous donnerons une caractérisation algébrique très explicite.

En définissant et en étudiant la fonction de Dehn directement au niveau du groupe ambiant, nous serons à même d'estimer les fonctions de remplissage de toutes les variétés homogènes riemanniennes simplement connexes (ainsi que de tous les graphes transitifs correspondant à des graphes de Cayley-Abels de groupes algébriques sur un corps p-adique). Remarquons au passage que certains groupes de Lie connexes, comme par exemple $\mathbf{R}^d \rtimes \mathrm{SL}(d,\mathbf{R})$ n'admettent pas de réseau uniforme...

L'idée de relier des invariants de quasi-isométrie des groupes de Lie connexes à la structure de leur l'algèbre de Lie n'est pas nouvelle : cette démarche a été expoitée avec succès notamment par Guivarc'h [Gui73], à qui l'on doit une très élégante caractérisation algébrique des groupes de Lie à croissance polynomiale, et plus récemment par Varopoulos [Var00], qui a découvert une propriété naturelle de l'algèbre de Lie possédant des interprétations aussi bien géométriques, que probabilistes (marches aléatoires), que cohomologiques.

Dans les groupes de Lie, il est assez facile de voir que la fonction de remplissage est à croissance au plus exponentielle (Gromov donne un argument peu détaillé dans [G93]). De plus si le groupe est à croissance polynomiale, alors la fonction de Dehn est au plus polynomiale. Nous verrons qu'il n'existe pas de comportements intermédiaires. La quasi-totalité des résultats qui seront présentés sont le fruit d'un travail en commun avec Yves de Cornulier et sauf mention contraire se réfèrent à notre long article [CT13].

2.3 Présentation compacte et fonction de Dehn des groupes localement compacts

Comme nous l'avons dit plus haut, il existe un cadre général permettant de définir la fonction de Dehn qui englobe naturellement les deux exemples que nous venons de voir : la fonction de Dehn des groupes de présentation finie, et la fonction de remplissage des variétés simplement connexes homogènes.

Un groupe localement compact G est dit compactement présenté s'il admet une présentation $\langle S; R\rangle$ et un entier $k > 0$, où S est une partie compacte, et où R est une partie de la boule de rayon k du groupe libre F_S (pour la métrique des mots associée à la partie S). On peut alors définir la fonction de Dehn δ associée à cette présentation. Son comportement asymptotique ne dépend que de G (nous la noterons donc δ_G).

Illustrons cette notion dans le cas particulier où G est totalement discontinu et engendré par une partie compacte S. Dans ce cas, G admet un sous-groupe compact ouvert K, et G/K peut être équipé d'une structure de graphe à degré borné G-transitif Γ : le graphe de Cayley-Abels, noté (G, K, S) (cette construction est due à Abels [Ab74]). Rappelons qu'un graphe à degré borné est simplement connexe à grande échelle s'il on peut le rendre simplement connexe en recollant des faces de dimension 2 le long de chemins fermés de longueur $\leq k$ pour un $k > 0$ donné. On peut montrer que le groupe G est compactement présenté si et seulement si le graphe Γ est simplement connexe à grande échelle, et δ_G est équivalente à la fonction de remplissage de Γ (il s'agit d'une variante de [Bri02, Filling Theorem 2.1.2]).

Ajoutons pour conclure qu'un groupe de Lie connexe est toujours compactement présenté, et que sa fonction de Dehn a le même comportement asymptotique que la fonction de remplissage de la variété homogène simplement connexe G/K, où K est un sous-groupe compact maximal de G.

2.4 Fonction de Dehn et radical exponentiel

Rappelons que tout groupe de Lie connexe possède un sous-groupe fermé connexe résoluble cocompact. Ainsi l'étude de propriétés invariantes par quasi-isométrie se ramène au cas des groupes résolubles. De plus, généralisant la construction du nilshadow due à Auslander et Green [AG66], Cornulier [C08] a démontré que l'on peut se ramener au cas où G est un groupe de Lie simplement connexe résoluble *réel triangulable*, c'est-à-dire représentable dans un groupe de matrices triangulaires réelles.

Un aspect essentiel dans cette étude est le rôle joué par $\mathrm{Exp}(G)$, le radical exponentiel de G (introduit par Guivarc'h [Gui73]). Pour résumer, il s'agit d'un sous-groupe distingué, fermé, nilpotent, simplement connexe, que l'on peut caractériser comme le plus petit sous-goupe distingué N de G tel que G/N est à croissance polynomiale.

Théorème 10. [CT13] La fonction de Dehn d'un groupe de Lie simplement connexe résoluble est soit exponentielle, soit majorée par un polynome. Plus précisément, dans le cas où $\mathrm{Exp}(G)$ est scindé soit $D_G(t) \approx e^t$, soit $D_G \preceq tD_{G/\mathrm{Exp}(G)}$.

Nous verrons que ces deux comportements admettent une caractérisation algébrique très explicite.

2.5 Exemples connus

Afin d'illustrer notre propos, donnons deux exemples types de groupes de Lie connexes pour lesquels la fonction de Dehn était connue :

Cas à remplissage exponentielle : Le groupe SOL est le cas le plus simple de groupe de Lie résoluble à croissance exponentielle possédant un réseau :

$$SOL_3 = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, t \in \mathbf{R} \right\}.$$

Thurston a démontré qu'il a une fonction de remplissage exponentielle [ECHLPT92]. Plus généralement, Gromov démontre dans son livre "asymptotic invariants of infinite groups" que la fonction de remplissage de

$$SOL_3(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-\lambda t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, t \in \mathbf{R} \right\}$$

est exponentielle [G93]. En fait, Gromov suggère la caractérisation suivante pour un groupe de Lie connexe résoluble : la fonction de remplissage serait exponentielle si et seulement si le groupe est "de rang 1" [G93, $5A_9$]. Bien que non explicitée par Gromov, il semble plausible que la condition "de rang 1" signifie dans son esprit que le groupe se surjecte vers SOL(λ). Dans tous les cas nous verrons qu'il s'agit là de la bonne interprétation.

Cas à remplissage quadratique : Au contraire, les groupes de "rang supérieur" tels que

$$SOL_5 = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t_1} & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{t_2} & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{-t_1-t_2} & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, z, t_1, t_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

auraient une fonction de Dehn quadratique. Gromov lui-même (pour l'exemple ci-dessus), suivi de plusieurs auteurs parmi lesquels Drutu [Dr04], Leutzinger et Pittet [LP04], ont partiellement confirmé cette supputation. Mais nous verrons qu'elle est fausse en général, y compris dans des cas que l'on ne peut qualifier de pathologiques.

2.6 Poids principaux positivement liés

Notons respectivement $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{n}$ les algèbres de Lie de G et de Exp(G). Nous appelons poids principaux, les poids pour l'action de $\mathfrak{g}$ sur l'abélianisé de $\mathfrak{n}$, i.e. $\mathfrak{n}/[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. Pour simplifier, nous supposerons que ces poids sont réels. Nous dirons que deux poids α et β sont positivement liés s'il existe $a, b > 0$ tels que $a\alpha + b\beta = 0$ (en d'autres termes si 0 appartient à l'intérieur de l'intervalle $[\alpha, \beta]$).

Théorème 11. [CT13] S'il existe deux poids principaux non nuls positivement liés, alors $D_G(t) \approx e^t$.

Example 2.6.1. Considérons le groupe $SOL(\lambda)$ introduit précédemment. Notons que si $\lambda < 0$ (resp. $\lambda = 0$), ce groupe admet une métrique invariante à courbure sectionnelle strictement négative (resp.

négative ou nulle), et donc est hyperbolique et a une fonction de Dehn linéaire (resp. quadratique). Le cas où $\lambda > 0$ a une fonction exponentielle.

Notons que la condition de poids principaux positivement liés est équivalente à la condition "d'être de rang 1" de Gromov.

Pour le groupe $SOL(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, l'espace des poids (ils sont tous principaux) est une ligne, et les poids se positionnent de part et d'autre de l'origine :

1 . **2**

Le groupe SOL_5 a quant à lui un espace des poids de dimension 2, ses 3 poids formant un triangle dont le centre de gravité est 0 (ce qui traduit le fait que SOL_5 est unimodulaire) :

2

.

1 **3**

2.7 Un exemple de rang supérieur dont la fonction de Dehn est exponentielle

Le cas le plus simple d'un tel groupe (dû dans un autre contexte à Abels) est le quotient du groupe suivant par son centre

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & e^{t_1} & u & v \\ 0 & 0 & e^{t_2} & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; x, y, z, u, v, w, t_1, t_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

Le centre $Z(G)$ de G est l'ensemble des matrices unipotentes dont la seule entrée non nulle est z. Notons que le radical exponentiel de G est le sous-groupe des matrices unipotentes. En particulier, le centre de G exponentiellement distordu. Ceci implique que la fonction de Dehn de $Ab_1 := G/Z(G)$ est exponentielle [CT12]. L'idée de la démonstration est la suivante : donnons nous une partie compacte génératrice S de G et considérons l'élément

$$z_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit w un mot de longueur $\approx n$ dans F_S tel que $w = z_n$ dans G. Le mot w correspond à une relation de longueur $\approx n$ dans Ab_1, qui s'écrit donc dans le groupe libre F_S comme un produit de $\preceq \delta(n)$ conjugués de relations de longueur bornée. En relevant cette écriture de w dans G, on obtient que z_n s'écrit comme un produit de $\preceq \delta(n)$ d'éléments de $Z(G)$ de taille bornée. Ceci implique que $\delta_{Ab_1}(n) \succeq 2^n$.

D'autre part, G et Ab_1 ont les mêmes poids principaux que SOL_5 : en fait,

$$G/[\mathrm{Exp}(G), \mathrm{Exp}(G)] \simeq SOL_5,$$

De sorte qu'ils sont tous deux de "rang supérieur". Par ailleurs on montre que le groupe G a une fonction de Dehn quadratique [CT12].

2.8 L'énoncé général

Comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent, un autre phénomène entrainant que la fonction de Dehn est exponentielle est l'existence d'une extension centrale exponentiellement distordue. Dans le cas le plus simple où le radical exponentiel est scindé $G = \mathrm{Exp}(G) \rtimes S$ et où l'action de S est semi-simple, cette condition est équivalente au fait que le second groupe d'homologie en degré zero $H_2(\mathfrak{n})_0$ est non trivial ($\mathfrak{n}$ désigne l'algèbre de Lie de $\mathrm{Exp}(G)$). Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer nos résultats principaux concernant les groupes de Lie connexes et les groupes algébriques sur $\mathbf{Q}_p$.

Théorème 12. [CT13] La fonction de Dehn d'un groupe de Lie connexe est soit exponentielle, soit au plus polynomiale. De plus, la fonction de Dehn d'un groupe de Lie réel triangulable est exponentielle si et seulement si l'une des deux conditions suivantes au moins est vérifiée

- **(Rang 1)** $\mathfrak{n}$ a des poids principaux positivement liés ;
- **(Obstruction homologique)** $H_2(\mathfrak{n})_0 \neq 0$.

Théorème 13. [CT13] Un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}_p$ est soit non-compactement présenté, soit de fonction de Dehn $\preceq n^3$. De plus, un groupe algébrique résoluble compactement engendré sur $\mathbf{Q}_p$ est non-compactement présenté si et seulement si l'une des deux conditions suivantes au moins est vérifiée

- **(Rang 1)** $\mathfrak{n}$ a des poids principaux positivement liés ;
- **(Obstruction homologique)** $H_2(\mathfrak{n})_0 \neq 0$;

où n est l'algèbre de Lie du radical unipotent.

2.9 Un mot sur la démonstration.

Les ingrédients de la preuve mèlent des idées géométriques essentiellement dûes à Thurston et à Gromov, et une étude assez fine de la 2-cohomologie des algèbres de Lie. Nous nous sommes notamment énormément inspirés d'un travail fondamental d'Abels caractérisant les groupes p-arithmétiques de présentation finie.

La partie la plus difficile de notre résutat est de montrer que sous réserve que le groupe n'a pas de poids positivement liés, et satisfait $H_2(n)_0 = 0$, alors sa fonction de Dehn est polynomiale. Cette démonstration a nécessité plusieurs idées nouvelles. Essayons d'en donner un aperçu général : très grossièrement, afin d'obtenir une estimation de la fonction de Dehn, il faut d'abord se donner une présentation avec laquelle travailler. Un point de départ important que l'on doit à Abels est le suivant : dans le cas où l'obstruction de rang 1 n'a pas lieu, G est –à une extension centrale près– un multi-amalgame de sous-groupes admettant une métrique invariante à courbure négative ou nulle.

Ces sous-groupes, dont la fonction de Dehn est au plus quadratique, constituent les briques de bases à partir desquelles il s'agit de démontrer (après au besoin être passé à une extension centrale) que la fonction de Dehn est polynomiale. Toutefois il faut bien avoir à l'esprit que les groupes de Lie résolubles forment une jungle inextricable et qu'il semble impossible de baser une preuve sur des calculs explicites [1]. C'est ce point qui nous a bloqué pendant plus de 2 ans. La stratégie qui nous a permis de surmonter cet obstacle consiste à déduire des estimations quantitatives d'informations à priori purement qualitatives : plus précisément, on démontre que la présentation de $G(\mathbf{R})$, qui dépend par des équations algébriques de paramètres réels, reste une présentation du groupe $G(A)$ lorsque l'on remplace $\mathbf{R}$ par une $\mathbf{R}$-algèbres quelconque A, comme par exemple $A = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

2.10 Simple connexité du cône asymptotique

En parallèle de notre étude du comportement asymptotique de la fonction de remplissage des groupes de Lie, nous nous sommes intéressés au groupe fondamental de leurs cônes asymptotiques. Plus précisément nous avons partiellement résolu la question de savoir quels sont les groupes de Lie réels et p-adiques, (et par extension, leur réseaux co-compacts) dont les cônes asymptotiques sont simplement connexes.

Rappelons brièvement ce qu'est le cône asymptotique et le lien entre cette question et la précédente. Alors que la géométrie à grande échelle s'intéresse aux espaces métriques vus "à grande distance" (c'est à dire en négligeant les propriétés locales de l'espace), le cône asymptotique est un moyen de regarder cet espace métrique à distance "infinie". Ceci implique donc un passage à la limite (à l'aide d'un ultrafiltre).

Certains liens existent entre le comportement de la fonction de Dehn et la simple connexité des cônes asymptotiques : par exemple Gromov a montré que la simple connexité de ce dernier implique une croissance au plus polynômiale de la première [G93].

Notre étude met en évidence une coincidence presque parfaite entre les groupes de Lie dont la fonction de Dehn est à croissance exponentielle, et ceux dont les cônes asymptotiques sont non simplement connexes. Tout d'abord, notons que les exemples de rang 1 (du type SOL) ont d'une part une fonction de Dehn exponentielle, d'autre part le groupe fondamental de leurs cônes possède des sous-groupes libres non-abéliens. Par contraste, dans le cas des groupes de rang supérieur satisfaisant l'obstruction homologique (par exemple Ab_1), les cônes asymptotiques ont un groupe fondamental *abélien* non dénombrable [CT12].

De plus, et de manière assez tout à fait inattendue, apparaît une nouvelle classe de groupes de Lie résolubles dont le cône asymptotique a un groupe fondamental abélien non-trivial, alors que la fonction de remplissage est polynômiale (au plus cubique). Bien que ne disposant pas de borne inférieure sur la fonction de Dehn de ces groupes, nous pouvons au moins affirmer que celle-ci n'est pas quadratique : en effet, d'après un théorème de Papasoglu [Pap], un groupe dont la fonction de

1. par exemple de type "récurrence sur la longueur de nilpotence du radical exponentiel".

Dehn est au plus quadratique a ses cônes asymptotiques simplement connexes. Le plus surprenant est que ces groupes n'ont rien de pathologique : un exemple de tel groupe [2] est en effet

$$Ab_2 = U \rtimes \mathbf{R}^2,$$

où $U/[U,U] \approx \mathbf{R}^3$, et U est le groupe correspondant au quotient de l'algèbre de Lie 3-nilpotente libre engendrée par l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, de base (X_1, X_2, X_3) par l'idéal engendré par $[X_i, [X_i, Y_j]]$ for all $i, j \in \{1, 2, 3\}$. L'action (semi-simple) de $\mathbf{R}^2$ est déterminée par ses poids principaux qui sont ceux de SOL_5 : $U/[U,U] \rtimes \mathbf{R}^2 \approx SOL_5$.

Essayons brièvement d'expliquer la raison pour laquelle les cônes asymptotiques de Ab_2 sont non-simplement connexes. Rappelons que l'existence d'une extension centrale non triviale de U en degré 0 (c'est-à-dire sur laquelle l'action de $\mathbf{R}^2$ s'étend trivialement) entraînerait que la fonction de Dehn est exponentielle, et en particulier que son cône est non-simplement connexe. Mais comme nous l'avons dit, la fonction de Dehn Ab_2 est au plus cubique... Pour autant, U admet bien une extension centrale non triviale $\tilde{U}$ en degré 0, mais qui n'est pas un groupe de Lie. Ceci se lit au niveau de l'algèbre de Lie de U par le fait que $\mathfrak{u}$ admet une extension centrale en degré 0 non-triviale, mais seulement en tant qu'algèbre de Lie sur $\mathbf{Q}$, et pas en tant qu'algèbre de Lie réelle. Comment exploiter une telle extension centrale "sauvage" au niveau du cône ? Très grossièrement, l'idée est que cette extension "induit au niveau du cône" une fibration $\phi : X \to \text{Cône}(Ab_2)$ où X est un espace métrique géodésique, dont les fibres sont toutes isométriques à un espace ultramétriques infini. Le point essentiel est que tout comme pour un revêtement, ϕ possède la propriété de relèvement des chemins, de sorte que $\pi_1(\text{Cône}(Ab_2))$ est non-trivial.

2.11 Projets liés à cette thématique.

Notre travail ouvre deux directions de recherches : tout d'abord, peut-on généraliser nos énoncés aux fonctions de Dehn de dimension supérieures ? D'une certaine façon, Varopoulos dans son gros article de 2000 [Var00] donne une réponse positive concernant toutes les fonctions de Dehn simultanément puisqu'il donne une caractérisation du fait que celles-ci sont polynomiales en termes de la géométrie des poids dans l'algèbre de Lie. Il serait intéressant d'interpoler entre nos deux énoncés par une caractérisation algébrique des groupes de Lie simplement connexes dont les fonctions de Dehn de dimension $\leq k$ pour un certain k croissent polynomialement. L'une des étapes cruciale serait de démontrer une version de l'astuce de Gromov permettant de se ramener à des plongements de polyhèdres de complexité combinatoire bornée, et dont les faces sont quasi-géodésiquement plongées.

Par ailleurs, le calcul de la fonction de Dehn (même de dimension 1) pour les groupes nilpotents est largement ouvert. Récemment, Stefan Wenger a montré que celle-ci peut ne pas être équivalente à un polynôme, plus précisément elle peut être strictement contenue entre n^2 et $n^2 \log n$ [We11]. Un tel comportement ne semble pas complètement étranger à celui que nous avons observé pour certaines classes d'exemples de groupes de Lie résolubles à croissance exponentielle dont la fonction de Dehn est non-quadratique et au plus cubique. Dans notre cas, l'explication est essentiellement de

2. de tels groupes ont aussi été considérés par Abels, mais ce pour des raisons purement techniques.

nature algébrique (en terme d'extension centrales "sauvages"), alors que les méthodes de Wenger sont très analytiques. Nous espérons que notre approche fournira un éclairage nouveau et peut-être de nouvelles pistes pour l'étude de la fonction de Dehn des groupes nilpotents.

Chapitre 3

Plongements uniformes dans les espaces de Banach et inégalités de Poincaré sur les espaces métriques

En général on définit la notion de plongement grossier entre deux espaces métriques, mais il sera utile d'appliquer cette notion à une famille d'espaces métriques. Etant données deux suites d'espaces métriques $(X_n, d_{X_n})_{n\in\mathbf{N}}$ et (Y_n, d_{Y_n}), une suite d'applications $\phi_n \colon X_n \to Y_n$ est un plongement grossier s'il existe deux fonctions propres $\rho, \gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x, y \in X_n$,

$$\rho(d_{X_n}(x,y)) \leqslant d_{Y_n}(\phi_n(x), \phi_n(y)) \leqslant \gamma(d_{X_n}(x,y)).$$

Dans les cas qui nous intéresseront, l'espace de départ est un graphe, et l'espace d'arrivée un espace de Banach. On vérifie facilement que dans ce cas, tout plongement grossier est automatiquement Lipschitz, et à un changement d'échelle près, $\gamma(t) = t$.

Le concept de plongement grossier a été introduit par Gromov, lequel a vaguement suggéré de possibles applications à la conjecture de Novikov. Concrétisant cet espoir, Yu est parvenu à démontrer qu'un groupe de type fini admettant un plongement grossier dans un espace de Hilbert vérifie la conjecture de Novikov [Y98, Y00]. Par ailleurs, dans [G93, p 218], Gromov pose la question de savoir si tout espace métrique séparable se plonge grossièrement dans un espace de Hilbert. En adaptant un résultat d'Enflo [E69], un premier contre-exemple est construit dans [DGLY02] : il s'agit de la famille des espaces métriques finis $X_{n,m}$, où pour chaque paire d'entiers positifs m et n, $X_{n,m}$ est le produit de n copies du graphe cyclique à m sommets, muni du max des distances. Notons que cette suite d'espaces n'est pas à géométrie bornée : le cardinal des boules de rayon donné (par exemple égal à 1) n'est pas borné. Dans [G99], Gromov découvre qu'une autre classe d'espaces métriques, cette fois à géométrie bornée, ne se plonge pas grossièrement dans un espace de Hilbert : les expanseurs.

La notion d'expanseur est devenue depuis sa découverte dans les années 80, omniprésente dans des domaines allant de l'informatique théorique à la K-théorie des C^*-algèbres. À l'origine, un expanseur est une suite de graphes finis, de valence uniformément bornée et de taille tendant vers l'infini dont la constante de Cheeger est bornée inféreurement. Toutefois, nous utiliserons la caractérisation équivalente suivante dûe à Alon [Al86] : un expanseur est une suite (X_n) de graphes connexes finis, de valence uniformément bornée et de taille tendant vers l'infini dont le Laplacien possède un trou spectral uniforme. En d'autres termes, chacun de ces graphes X_n (identifié à l'ensemble de ses sommets) satisfait une inégalité de Poincaré majorant la variance d'une fonction définie sur les sommets par la norme de son gradient :

$$\frac{1}{|X_n|^2}\sum_{x,y\in X_n}|f(x)-f(y)|^2 \leq \frac{C}{|X_n|}\sum_{x\sim y}|f(x)-f(y)|^2, \tag{3.0.1}$$

où C est une constante, pour toute fonction f définie sur X_n (il est immédiat de voir que cette inégalité s'étend à des fonctions à valeurs dans un Hilbert). On peut démontrer [M96] que ces inégalités sont en fait équivalentes à des inégalités similaires dans L^p pour $p<\infty$:

$$\frac{1}{|X_n|^2}\sum_{x,y\in X_n}|f(x)-f(y)|^p \leq \frac{C_p}{|X_n|}\sum_{x\sim y}|f(x)-f(y)|^p. \tag{3.0.2}$$

Il est facile de voir que cette suite d'inégalités de Poincaré empêche la suite de graphes de se plonger grossièrement dans un espace L^p.

3.1 Une caractérisation de la non-plongeabilité grossière en termes d'inégalité de Poincaré.

3.1.1 Expanseurs généralisés

En plus des expanseurs et de l'exemple de [DGLY02], il a également été démontré que les espaces L^p pour $p>2$ ne se plongent pas dans un espace de Hilbert [JR04]. On sait plus généralement que L^p ne se plonge pas dans L^q si $2\leq q<p$ [MN08]. Ces résultats utilisent des obstructions faisant intervenir de manière cruciale la dimension infinie. Notons d'ailleurs que l'on ne sait pas s'il existe un sous-espace métrique à géométrie bornée de L^p pour $2<p<\infty$ qui ne se plonge pas grossièrement dans L^2. Par contre il n'est pas difficile de voir (par un argument d'ultra-limite) que tout espace métrique ne se plongeant pas grossièrement dans L^2 admet une suite de parties finies qui ne se plonge pas grossièrement. En appliquant de manière astucieuse le théorème de Hahn-Banach, on peut raffiner cette observation et caractériser la non-plongeabilité en termes d'inégalités de Poincarés du type de (3.0.1). Le résultat suivant de [T09] a été démontré indépendamment par Ostrovkii [Ost] dans le cas où l'espace d'arrivée est un espace de Hilbert. L'énoncé original de ce théorème s'applique à une large classe d'espaces métriques à l'arrivée (pas forcément des espaces de Banach). Nous nous contenterons ici de l'énoncer pour un espace L^p. Pour toute fonction f définie sur une partie A d'un espace métrique X et à valeur dans un espace normé, notons $\mathrm{Lip}_A(f)=\max_{x,y\in A}(\|f(x)-f(y)\|/d(x,y))$.

Théorème 14. Etant donné $1\leq p<\infty$, un espace métrique X ne se plonge pas grossièrement dans un espace L^p si et seulement s'il existe une suite de parties finies $A_n\subset X$ et une suite de mesures de probabilités symétriques μ_n sur $A_n\times A_n$ tel que

– il existe $c > 0$ et une suite $r_n \to \infty$ telle que

$$\mu_n\left(\{(x,y),\ d(x,y) \geq r_n\}\right) \geq c;$$

– il existe $C < \infty$ tel que pour toute fonction $f : A_n \to L^p$,

$$\sum_{x,y \in A_n} \|f(x) - f(y)\|^p \mu_n(x,y) \leq C\mathrm{Lip}_{A_n}(f)^p. \tag{3.1.1}$$

Nous dirons alors que la suite (A_n, μ_n) est un *p-expanseur généralisé* (pour $p = 2$, nous dirons simplement expanseur généralisé).

3.1.2 Une amélioration pour les graphes de Cayley finis

Notons que la suite d'inégalités de Poincaré (3.1.1) est significativement plus faible que celle satisfaite par un expanseur :

(i) d'une part, le terme de gauche est la variance par rapport à une mesure de probabilité symétrique essentiellement quelconque sur $X \times X$;

(ii) d'autre part le terme de droite est remplacé par la norme Lipschitz de la fonction.

Concernant le point (i), James Lee m'a confié au cours d'une discussion qu'il serait crucial de savoir s'il on peut choisir $\mu_n = \nu_n \times \nu_n$, où ν_n est la mesure de probabilité uniforme sur une partie $B_n \subset A_n$. Nous verrons à la section suivante des exemples montrant que c'est en fait impossible en général.

A propos du point (ii), nous avons le résultat suivant, résolvant ce problème pour une classe d'exemples déjà très riche.

Théorème 15. Soit (G_n, S_n) une suite de graphes de Cayley de groupes finis, avec $|S_n| < \infty$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(1) La suite (G_n, S_n) ne se plonge pas grossièrement dans L^p.

(2) Quitte à extraire une sous-suite, (G_n, S_n) est un p-expanseur généralisé.

(3) Quitte à extraire une sous-suite, (G_n, S_n) est un p-expanseur généralisé en un sens renforcé : l'inégalité (3.1.1) pouvant être remplacée par

$$\sum_{g,g' \in G_n} \|f(g) - f(g')\|^p \mu_n(g,g') \leq \frac{C}{|G_n|} \sum_{g \sim g'} \|f(g) - f(g')\|^p, \tag{3.1.2}$$

où la mesure μ_n peut de plus être prise invariante à gauche par G_n : telle que $\mu_n(xg_1, xg_2) = \mu_n(g_1, g_2)$ pour tout $x, g_1, g_2 \in G_n$.

Démonstration. Notons que cet énoncé est une observation récente qui n'apparaît dans aucun de mes articles. L'équivalence entre (i) et (ii) découle du théorème précédent. Il reste donc à montrer que (ii) implique (iii). Il s'agit donc de démontrer que l'inégalité de Poincaré (3.1.1), à savoir

$$\sum_{g,g' \in G_n} \|f(g) - f(g')\|^p \mu_n(g,g') \leq \frac{C}{|G_n|} \mathrm{Lip}(f)^p. \tag{3.1.3}$$

implique l'inégalité renforcée (3.1.2) (quitte à changer la mesure μ_n). L'idée, très simple, est la suivante : on commence par définir la mesure $\tilde{\mu}_n$ comme suit :

$$\tilde{\mu}_n(g, g') = \frac{1}{|G_n|} \sum_{x \in G_n} \mu_n(xg, xg').$$

Puis, étant donnée une fonction $f : G_n \to L^p$, on considère la fonction $\tilde{f} : G_n \to \ell^p(G_n, L^p)$ définie par $\tilde{f}(g) = f(\cdot g) - f$. Notons que

$$\mathrm{Lip}(\tilde{f}) = \max_{s \in S_n} \left(\sum_{g \in G_n} \|f(g) - f(gs)\| \right)$$

En appliquant (3.1.3) à $\tilde{f}$, on obtient comme attendu

$$\sum_{g, g' \in G_n} \|f(g) - f(g')\|^p \tilde{\mu}_n(g, g') \leq \frac{C}{|G_n|} \sum_{g \sim g'} \|f(g) - f(g')\|^p,$$

ce qui achève la démonstration. □

Nous verrons plus loin que ce résultat est un un certain sens optimal.

3.1.3 Expanseurs faiblement plongés

Jusqu'à présent, il existait une seule manière de produire des espaces à géométrie bornée (e.g. des graphes à degré borné) ne se plongeant pas grossièrement dans un espace de Hilbert : de tels espaces possèdent un expanseur faiblement plongé. Rappelons qu'une suite d'espaces métriques Y_n possède un expanseur X_n faiblement plongé s'il existe une suite d'applications K-Lipschitziennes $\phi_n \colon X_n \to Y_n$ pour un certain $K > 0$, et telles que pour tout $R > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X_n} \frac{|\phi_n^{-1}(B(\phi_n(x), R))|}{|X_n|} = 0, \tag{3.1.4}$$

où $B(y, R)$ désigne la boule de rayon R centrée en y. Il est aisé de déduire de (3.0.1) qu'une telle suite (Y_n) n'admet pas de plongement grossier dans un Hilbert. Gromov a réussit à démontrer par des méthodes aléatoires l'existence de groupes de type fini possédant un expanseur faiblement plongé, et donc ne se plongeant pas grossièrement dans un espace de Hilbert [G99, AD08].

Dans son livre sur les plongements d'espaces métriques dans les espaces de Banach, Ostrovskii pose la question de la réciproque : un espace métrique à géométrie bornée ne se plongeant pas grossièrement dans un Hilbert admet-il un expanseur faiblement plongé ? De même qu'à la question de Lee mentionnée plus haut, nous apporterons une réponse négative à cette question.

3.2 Expansion relative

3.2.1 Expanseurs et propriété T

Les premiers exemples explicites d'expanseurs, dus à Margulis, proviennent de la théorie des groupes. Etant donné un groupe discret G et $(\mathcal{H},\pi)$ une représentation unitaire de G. On dit que π admet presque des vecteurs invariants si pour toute partie finie $Q \subset G$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur unitaire $v \in \mathcal{H}$ tel que $\|\pi(g)v - v\| \leq \varepsilon$, pour tout $g \in Q$. Rappelons que G a la propriété T de Kazhdan si toute représentation unitaire $(\mathcal{H},\pi)$ admettant presque des vecteurs invariants, admet un vecteur non nul invariant.

Soit S une partie génératrice finie de G et soit G_n une suite de quotients finis de G. On note $\ell^2_0(G_n)$ l'orthogonal dans $\ell^2(G_n)$ des fonctions constantes. Soit π_n la représentation unitaire de G sur $\ell^2_0(G_n)$: notons que celle-ci n'a pas de vecteurs invariants. Supposons que G ait la propriété T, et appliquons celle-ci à la représentation $\pi = \oplus_n \pi_n$: on en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $v_n \in \ell^2_0(G_n)$, on a

$$\max_{s\in S} \|\pi_n(s)v_n - v_n\| \geq c\|v_n\|.$$

En utilisant la définition de π_n, on en déduit l'inégalité suivante sur le graphe de Cayley de (G_n, S_n), où S_n est la projection de S : pour tout $f_n \in \ell^2(G_n)$,

$$\sum_{x\in G_n} \left| f(x) - \frac{1}{|G_n|}\sum_{y\in G_n} f(y)\right|^2 \leq \frac{1}{c^2}\sum_{x\sim y}|f(x)-f(y)|^2,$$

que l'on convertit aisément en l'inégalité de Poincaré (3.0.1) :

$$\frac{1}{|G_n|^2}\sum_{x,y\in G_n}|f(x)-f(y)|^2 \leq \frac{2}{c^2|G_n|}\sum_{x\sim y}|f(x)-f(y)|^2.$$

Nous en déduisons donc que pour peu que le cardinal de G_n tende vers l'infini, la suite (G_n, S_n) forme un expanseur. On sait grâce à Kazhdan [Ka67] que tout réseau dans $\mathrm{SL}(n,\mathbf{R})$ pour $n \geq 3$ a la propriété T. Comme de plus ces groupes sont résiduellement finis, on en déduit une large classe d'exemples d'expanseurs. Il découle par ailleurs d'un résultat difficile de Selberg qu'en dépit du fait que $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ n'a pas la propriété T, la suite de ses quotients finis $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ forme également un expanseur [Se65].

3.2.2 Un contre-exemple aux questions de Lee et d'Ostrovskii

Le résultat suivant apporte une réponse négative aux questions de Lee et d'Ostrovskii. Nous dirons qu'un expanseur généralisé (A_n,μ_n) est un expanseur faible au sens de Lee si la mesure μ_n sur A_n^2 est un produit $\nu_n \times \nu_n$, et que ν_n est comparable à la mesure uniforme sur A_n :

$$\inf_{n,a\in A_n} \nu_n(a) > 0.$$

Théorème 16. [AT] Il existe une suite (explicite) de graphes de Cayley (G_n, S_n), avec $|S_n| = 3$, telle que

- (G_n, S_n) n'admet de plongement grossier dans aucun espace L^p pour tout $1 \leq p < \infty$;
- (G_n, S_n) n'admet pas d'expanseur faiblement plongé, ni ne contient d'expanseur faible au sens de Lee.

Ce contre-exemple (ou plutôt cette famille de contre-exemples) se base sur une idée très simple : utiliser de la propriété T relative au lieu de la propriété T, afin de produire des inégalités de Poincaré "relatives". Rappelons qu'une paire de groupes (G, H), où G est groupe de type fini et H un sous-groupe infini de G, a la propriété T relative si toute représentation de G possédant presque des vecteurs invariants possède des vecteurs H-invariants. Clairement, la paire (G, G) a la propriété T relative si et seulement si G a la propriété T. Mais cette notion offre plus de flexibilité : par exemple, la paire $(\mathbf{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}^2)$ a la propriété T relative, alors que ni $\mathbf{Z}^2$, ni $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ n'ont la propriété T. Une première approche naïve consisterait à prendre la suite de quotients finis $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, en appliquant :

Proposition 3.2.1. Soit $1 \to H \to G \to Q \to 1$ une suite exacte, où G est de type fini, et telle que la paire (G, H) a la propriété T relative. On se donne une partie génératrice finie S de G, et une suite de quotients finis (G_n, S_n). Alors la suite de graphes de Cayley (G_n, S_n) satisfait la suite d'inégalités de Poincaré suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute suite $h_n \in H_n$, et toute suite de fonctions $f_n : G_n \to \mathcal{H}$ à valeurs dans un espace de Hilbert,

$$\sum_{g \in G_n} \|f(gh_n) - f(g)\|^2 \leqslant C \sum_{g \in G_n, s \in S_n} \|f(gs) - f(g)\|^2, \tag{3.2.1}$$

En d'autres termes (G_n, μ_n) est un expanseur généralisé, avec $\mu_n(g, g') = 1/|G_n|$ si $g'g^{-1} = h_n$ et 0 sinon.

Cette proposition est certes facile à démontrer, mais elle ne résout pas tous les problèmes : en effet comment s'assurer que G_n ne contient pas d'expanseurs ? Concernant notre exemple précédent, on a le désagrément de réaliser que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ contient la suite $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ qui est un expanseur. Pour parvenir à nos fins, une solution consiste à trouver une suite de groupes finis T_n se surjectant vers $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, mais qui se plonge grossièrement dans un espace de Hilbert. Cette construction, non-triviale, est fournie par [AGS12]. Le reste de la démonstration n'est pas complètement évident, mais élémentaire.

3.2.3 Questions ouvertes et projets

Une question demeure largement ouverte : existe-t-il un espace métrique à géométrie bornée se plongeant grossièrement dans L^p pour p assez grand (fini), mais pas dans L^2 ? Il serait particulièrement agréable d'obtenir un tel exemple comme suite de graphes de Cayley de groupes finis. D'ailleurs, une variante de la construction du théorème 16 fournit une suite de groupes finis qui ne se plonge pas dans un espace de Hilbert, mais pour laquelle nous ne savons pas montrer si elle se plonge ou pas dans un espace L^p pour $p > 2$. Ces graphes exhibent en particulier des inégalités de

Poincaré encore plus exotiques que celles de la proposition 3.2.1, reposant cette fois sur le fait que le groupe G a la propriété T relative par rapport à une partie infinie qui n'est pas un sous-groupe...

Une autre question serait de savoir s'il est possible de produire une suite de graphes finis à degré borné satisfaisant la conclusion du théorème 16 et qui de plus ait un tour de taille non borné. Ceci pourrait constituer une première étape vers la preuve de l'existence de groupes de type fini satisfaisant le théorème 16 (en effet la construction des “monstres” de Gromov utilise de manière cruciale des expanseurs dont le tour de taille est non borné [G99, AD08]).

Finalement, il serait très intéressant de produire des exemples d'expanseurs généralisés à partir de méthodes aléatoires. J'aimerais notamment mieux comprendre quels types d'inégalités de Poincaré du type de (3.1.1) sont effectivement “réalisables” pour des espaces métriques finis, et plus particulièrement pour des graphes finis dont le degré est uniformément borné, voire sur des suites de graphes de Cayley.

3.3 Etude quantitative des plongement grossiers : compression

On se donne un espace métrique X (généralement un graphe à degré borné), un espace de Banach E, et une applications Lipschitz $\phi : X \to E$. La “fonction compression” de ϕ, définie comme étant la borne supérieure de toute les fonctions ρ satisfaisant $\rho(d(x,y)) \leqslant \|\phi(x) - \phi(y)\|$ pour tout $x, y \in X$. Rappelons que ϕ est un plongement quasi-isométrique s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que $\rho(t) \geq C^{-1}t - C$.

L'ensemble des comportements asymptotiques possibles de fonctions compression associées à un plongement grossier dans une classe fixée d'espace de Banach est un invariant de quasi-isométrie. Guentner et Kaminker ont défini un invariant de quasi-isométrie plus simple : le taux de compression $\alpha(X)$ est la borne supérieure de tous les $\alpha \geq 0$ tel qu'il existe un plongement grossier de X dans un Hilbert dont la fonction compression $\rho(t)$ est asymptotiquement minorée par t^{α}.

Le taux de compression Hilbertien encode une information plus restreinte : en effet, un arbre 3-régulier T admet un taux maximal $\alpha(T) = 1$ [GK04]. Pourtant il découle d'un résultat de Bourgain [Bou86] que T ne se plonge pas quasi-isométriquement dans un espace de Hilbert. Plus précisément, on peut montrer (en adaptant la démonstration de Bourgain) que

Théorème 17. [T11] Une fonction croissante $\theta : (0, \infty) \to [0, \infty)$ satisfait $\theta \preceq \rho_f$ pour un plongement grossier $f : T \to \mathcal{H}$ si et seulement si

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{\theta(t)}{t}\right)^2 \frac{dt}{t} < \infty. \tag{3.3.1}$$

Il existe par ailleurs plusieurs constructions de groupes de type finis G tels que $\alpha(G) = 0$ mais qui admettent des plongements grossiers (voir par exemple [ADS09]). L'idée générale est de plonger une suite de graphes expanseurs dans un groupe de type fini tout en contrôlant la constante Lipschitz (qui tend vers l'infini) de ces plongements.

3.3.1 Plongements grossiers de groupes nilpotents

Un de mes principaux travaux de thèse a été de relier la compression hilbertienne des groupes moyennables à la première valeur propre du Laplacien dans les boules. Cela m'a permis de construire des plongements optimaux pour les groupes de Lie et leurs réseaux uniformes, et de montrer en particulier que $\alpha(G) = 1$ pour tous ces groupes. J'avais établi l'optimalité de ces plongements pour les groupes de Lie à croissance exponentielle en exhibant (avec Cornulier) des arbres 3-réguliers plongés quasi-isométriquement [CT08] et en appliquant le théorème 17.

Mon approche permettait d'obtenir des bornes inférieures de la compression pour les groupes nilpotents mais ne fournissait aucune borne supérieure. Une question préliminaire déjà non-triviale concerne l'existence de plongements quasi-isometriques d'un groupe nilpotent non virtuellement abélien dans un espace de Hilbert, ou plus généralement dans un espace de Banach uniformément convexe. Une première approche, initiée par Pansu consiste à remarquer qu'un tel plongement induit un plongement bi-Lipschtitz du cône asymptotique, qui se trouve être un groupe de Lie simplement connexe nilpotent, équipé d'une métrique invariante de Carnot. En se basant sur un résultat de différentiabilité presque partout des applications bi-Lipschitziennes (essentiellement dû à Pansu [Pan89]), Pauls [Pau01] et plus récemment Cheeger et Kleiner [CK] ont démontré l'impossibilité de tels plongements. Toutefois leur approche ne produit pas d'estimation quantitative.

3.3.2 Plongements grossiers et actions affines

Une approche concurrente initiée par Cornulier, Valette et moi-même [CTV07] durant ma thèse se base sur l'observation (due à Gromov) qu'un plongement grossier de groupe moyennable dans un espace de Hilbert peut se "moyenner" et donner lieu à un plongement "équivariant" possédant les mêmes propriétés métriques. Par plongement équivariant, nous entendons un plongement donné par une orbite d'une action du groupe par isométries affines sur un Hilbert. L'avantage de cette réduction est de mettre à notre disposition des outils d'analyse harmonique. Rappelons en effet qu'une action affine se décompose en la somme d'une partie linéaire (i.e. une représentation orthogonale) et d'un 1-cocycle, que l'on peut interpréter comme la partie "de translation" de l'action. En appliquant un théorème élémentaire dû à Guichardet [Gu72] portant sur la 1-cohomologie réduite à valeurs dans une représentation orthogonale d'un groupe nilpotent, nous donnons une preuve assez simple du fait qu'un tel groupe admet un plongement quasi-isométrique dans un espace de Hilbert si et seulement s'il est virtuellement abélien.

Nous ne pensions pas à l'époque que cette méthode avait une chance de donner des estimations quantitatives. C'est cependant ce que nous sommes parvenus à faire avec Austin et Naor pour le groupe de Heisenberg [ANT13]. L'idée est de décomposer la partie linéaire en une intégrale directe d'irréductibles. Pour peu que la "contrainte métrique" que l'on souhaite démontrer sur le cocycle se comporte bien par somme directe (comme par exemple une inégalité de Poincaré), il suffit de l'établir pour un cocycle à valeurs dans une représentation irréductible. Cette approche est bien adaptée au groupe de Heisenberg réel car ses représentations irréductibles sont particulièrement simples à décrire. Le résultat final que nous décrivons plus bas est donc une inégalité de Poincaré sur les boules assez originale, impliquant que tout plongement Lipschitz contracte les longueurs dans la direction du centre.

3.3.3 Une inégalité de Poincaré spécifique au groupe de Heisenberg

Rappelons que le groupe de Heisenberg,

$$H(\mathbf{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u & w \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \; u, v, w \in \mathbf{Z} \right\}.$$

a pour centre le sous-groupe engendré par

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part le groupe $H(\mathbf{Z})$ est engendré par $S = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$, où

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le centre est quadratriquement distordu, c'est-à-dire que

$$|c^n|_S \approx \sqrt{n}.$$

Théorème 18. [ANT13] Le groupe $H(\mathbf{Z})$ satisfait l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\sum_{x \in B_R} \sum_{k=1}^{R^2} \frac{|f(xc^k) - f(x)|^2}{k^2} \lesssim \sum_{x \in B_{22R}, s \in S} |f(xs) - f(x)|^2. \tag{3.3.2}$$

pour toute fonction f définie sur $H(\mathbf{Z})$.

On en déduit notamment

Corollaire 19. Une fonction croissante $\theta : (0, \infty) \to [0, \infty)$ satisfait $\theta \preceq \rho_f$ pour un plongement grossier $f : H(\mathbf{Z}) \to \mathcal{H}$ si et seulement si

$$\int_1^\infty \left(\frac{\theta(t)}{t} \right)^2 \frac{dt}{t} < \infty. \tag{3.3.3}$$

On retrouve ainsi un résultat identique à celui que j'avais établi pour les groupes de Lie connexes à croissance exponentielle (et les arbres) dans ma thèse.

3.3.4 Autres résultats et projets

La principale limitation de cette approche est qu'elle ne permet pas de traiter le cas de plongements dans des espaces de Banach plus généraux. En revanche elle permettra sans doute de s'étendre aux groupes de Lie nilpotents simplement connexes quelconques. En suivant une démarche différente, cette fois-ci basée sur le théorème ergodique de von Neumann, nous sommes parvenus à donner des estimations de la distorsion des boules presque optimales [ANT13]. Une généralisation de l'inégalité de Poincaré du Theorème 18 à valeurs dans un espace uniformément convexe quelconque impliquant les résultats optimaux sur la compression a été démontrée très récemment par Lafforgues et Naor [LN13]. La preuve, très différente, repose sur de l'analyse harmonique classique assez sophistiquée.

D'une manière générale, la conjecture suivante, formulée par Cornulier, Valette et moi-même dans [CTV07], reste largement ouverte dans le cas des groupes moyennables.

Conjecture 3.3.1. Un groupe de type fini qui se plonge quasi-isométriquement dans un espace de Hilbert (ou même un espace de Banach uniformément convexe) est virtuellement abélien.

De manière plus précise, est-il vrai que la fonction compression d'un plongement grossier d'un groupe de type fini qui n'est pas virtuellement abélien dans un Hilbert doit automatiquement satisfaire la condition d'intégrabilité :

$$\int_1^\infty \left(\frac{\rho(t)}{t}\right)^2 \frac{dt}{t} < \infty?$$

Signalons enfin en quelques mots que contrairement aux arbres, le groupe de Heisenberg (et très probablement tout groupe nilpotent non virtuellement abélien) n'admet pas de plongement quasi-isométrique dans L^1 [CK06]. On dispose même de résultats quantitatifs, mais non optimaux [CKN11]. Il serait souhaitable de trouver une démonstration moins élaborée techniquement qui puisse d'une part s'adapter aux autres groupes nilpotents et d'autre part fournir les bonnes estimations de la compression.

Bibliographie

[Ab72] H. ABELS. *Kompakt definierbare topologische Gruppen*. Math. Ann. 197 (1972), 221–233.

[Ab74] H. ABELS. *Specker-kompaktifizierungen von lokal kompakten topologischen gruppen*. Math. Z. 135 (1974), no. 4, 325–361.

[Ab87] H. ABELS. "Finite presentability of S-arithmetic groups. Compact presentability of solvable groups". Lecture Notes in Math. 1261, Springer, 1987.

[Al86] N. ALON, *Eigenvalues and expanders*, Theory of computing (Singer Island, Fla., 1984), Combinatorica 6 (1986), no. 2, 83–96.

[Alo91] J. M. ALONSO, et al. *Notes on word hyperbolic groups.* Edited by H. Short. Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), 3–63, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.

[AD08] G.N. ARZHANTSEVA, T. DELZANT. *Examples of random groups* Preprint, 2008.

[ADS09] G. N. ARZHANTSEVA, C. DRUTU and M. SAPIR. *Compression functions of uniform embeddings of groups into Hilbert and Banach spaces.* Crelle's Journal, 633 (2009), 213–235.

[AFW12] M. ASCHENBRENNER, S. FRIEDL, H. WILTON. *3-manifold groups.* arXiv :1205.0202

[AGS12] G. N. ARZHANTSEVA, E. GUENTNER, and J. ŠPAKULA. *Coarse non-amenability and coarse embeddings*, Geom. Funct. Anal. 22 (2012), no. 1, 22–36.

[AG66] L. AUSLANDER, L. W. GREEN. *G-induced flows.* Amer. J. Math. 88 (1966), 43–60.

[ANT13] T. AUSTIN, A. NAOR, R. TESSERA. *Sharp quantitative nonembeddability of the Heisenberg group into superreflexive Banach spaces.* Groups, Geometry and Dynamics 7 (3) (2013), 497–522.

[AS82] R. ALPERIN, P. SHALEN. *Linear Groups of Finite Cohomological Dimension.* Invent. Math. 66 (1982), no. 1, 89–98.

[AT] G. N. ARZHANTSEVA, R. TESSERA. *Relatively expanding box spaces with no expansion.* arXiv :1402.1481.

[B64] D. BARDEN. *h-cobordisms between 4-manifolds.* Notes, Cambridge University, 1964.

[B03] A. BARTELS. *Squeezing and higher algebraic K-theory.* K-Theory 28 (2003), no. 1, 19–37.

[BBBMP] L. BESSIERES, G. BESSON, M. BOILEAU, S. MAILLOT, J. PORTI. *Geometrisation of 3-manifolds*, EMS Tracts in Mathematics, volume 13. European Mathematical Society, Zurich, 2010.

[BD01] G. Bell, A. Dranishnikov. *On asymptotic dimension of groups.* Algebr. Geom. Topol. 1 (2001), 57–71 (electronic).

[BH99] M. R. Bridson, A. Haefliger. Metric spaces of non-positive curvature. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[BL12] A. Bartels, W. Lück, *The Borel Conjecture for hyperbolic and CAT(0)-groups*, Ann. of Math. 175 (2012), 631–689.

[BMS93] G. Baumslag, C.F. Miller, H. Short. Isoperimetric inequalities and the homology of groups. Invent. Math. 113 (1993), no. 3, 531–560.

[Bou86] J. Bourgain. *The metrical interpretation of superreflexivity in Banach spaces.* Israel J. Math. 56 (2) (1986).

[Bo95] B. Bowditch. *A short proof that a subquadratic isoperimetric inequality implies a linear one.* Michigan Math. J. 42 (1995), no. 1, 103–107.

[Bri02] M. Bridson. The geometry of the word problem. Invitations to geometry and topology, 29–91, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 7, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[Bro72] W. Browder. Surgery on simply connected manifolds. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 65, Springer, 1972.

[BRS07] N. Brady, T. Riley, H. Short. The Geometry of the Word Problem for Finitely Generated Groups. Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona, Birkhäuser, Basel, 2007.

[C80] C. Ching. *Elementary amenable groups.* Illinois J. Math. 24 (1980), no. 3, 396-407.

[C08] Y. Cornulier. *Dimension of asymptotic cones of Lie groups.* J. of Topology 1 (2008) 342–361.

[CFY08] S. Chang, S. Ferry, G. Yu. *Bounded rigidity of manifolds and asymptotic dimension growth.* J. K-Theory 1 (2008), no. 1, 129–144.

[CG04] G. Carlsson, B. Goldfarb. *The integral K-theoretic Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension.* Invent. Math. 157 (2004), no. 2, 405–418.

[CK] J. Cheeger, B. Kleiner. Differentiability of Lipschitz maps from metric measure spaces to Banach spaces with the Radon Nikodym property. arXiv :0808.3249.

[CK06] J. Cheeger, B. Kleiner. *Differentiating maps into L_1 and the geometry of BV functions.* To appear in Ann. Math., preprint available at http ://arxiv.org/abs/math/0611954, 2006.

[CKN11] J. Cheeger, B. Kleiner and A. Naor. *Compression bounds for Lipschitz maps from the Heisenberg group to L_1*, Acta Mathematica, 207 2 (2011), 291–373.

[CP95] G. Carlsson, E. Pedersen. *Controlled algebra and the Novikov conjectures for K- and L-theory.* Topology 34 (1995), no. 3, 731–758.

[CT08] Y. de Cornulier and R. Tessera. *Quasi-isometrically embedded sub-semigroups.* Geom. Topol. 12 (2008), 461–473.

[CT10] Y. Cornulier and R. Tessera. *Metabelian groups with quadratic Dehn function and Baumslag-Solitar groups.* Confluentes Math. Vol. 2, No. 4 (2010) 431–443.

[CT12] Y. Cornulier and R. Tessera. *Dehn function and asymptotic cones of Abels' group.* ArXiv 1203.4696 (2012), to appear in J. Topology.

[CT13] Y. Cornulier and R. Tessera. *Geometric presentations of Lie groups and their Dehn functions.* arXiv :1310.5373.

[CTV07] Y. de Cornulier, R. Tessera, Alain Valette. (2005). *Isometric group actions on Hilbert spaces : growth of cocycles.* Geom. Funct. Anal. 17 (2007), 770-792.

[D83] M. Davis. *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space.* Ann. of Math. 117 (1983), no. 2, 293–324.

[DGLY02] A. Dranishnikov, G. Gong, V. Lafforgue, G. Yu. Uniform embeddings into Hilbert space and a question of Gromov. Bulletin of Canadian Math. Society, Vol. 45, 1 (2002) 60-70.

[Dh12] M. Dehn. *Transformationen der Kurven auf zweiseitigen Flächen.* Math. Ann. 2 (1912). 413–421.

[Dh] M. Dehn. Papers on group theory and topology. Translated from the German and with introductions and an appendix by John Stillwell. With an appendix by Otto Schreier. Springer-Verlag, New York, 1987.

[DFW03] A. Dranishnikov, S. Ferry, S. Weinberger. *Large Riemannian manifolds which are flexible.* Ann. of Math. (2) 157 (2003), no. 3, 919–938.

[Dr04] C. Drutu. *Filling in solvable groups and in lattices in semisimple groups.* Topology 43 (2004), no. 5, 983–1033.

[DS06] A. Dranishnikov, J. Smith. *Asymptotic dimension of discrete groups.* Fund. Math. 189 (2006), no. 1, 27–34.

[ECHLPT92] D. Epstein, J. Cannon, D. Holt, S. Levy, M. Paterson, W. Thurston. Word processing in groups. Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1992. xii+330 pp.

[E69] P. Enflo, *On a problem of Smirnov*, Arkiv Mat. 8 (1969), 107–109.

[FJ89] T. Farrell, L. Jones. *A topological analogue of Mostow's rigidity theorem.* J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no. 2, 257–370.

[FJ90] T. Farrell, L. Jones. *Classical aspherical manifolds.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 75. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[FJ93] T. Farrell, L. Jones. *Topological rigidity for compact non-positively curved manifolds.* Differential geometry : Riemannian geometry (Los Angeles, CA, 1990), 229–274, Proc. Sympos. Pure Math., 54, Part 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[FRR95] S. Ferry, A. Ranicki, J. Rosenberg. Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity, London Math. Soc. Lecture Notes, vols. 226 and 227 (approx. 380 pages each), Cambridge Univ. Press, 1995.

[FP93] S. Ferry, E. Pedersen. *Epsilon surgery theory.* Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 2 (Oberwolfach, 1993), 167–226, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 227, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[FW91] S. Ferry, S. Weinberger. *Curvature, tangentiality, and controlled topology.* Invent. Math. 105 (1991), no. 2, 401–414.

[FW93] S. Ferry, S. Weinberger. *A coarse approach to the Novikov conjecture.* Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993), 147–163, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 226, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[Go] B. Goldfarb. Weak coherence of groups and finite decomposition complexity, http ://arxiv.org/pdf/1307.5345.

[G87] M. Gromov. *Hyperbolic groups, Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987, pp. 75–263.

[G93] M. Gromov. *Asymptotic invariants of infinite groups.* Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[G99] M. Gromov. *Spaces and questions.* GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I, 118–161.

[G03] M. Gromov. *Random walks in random groups.* Geom. Funct. Anal. 13 (2003), no. 1, 73–146.

[Gu10] E. Guentner, *Permanence in coarse geometry.* Preprint 2010.

[GHW05] E. Guentner, N. Higson, S. Weinberger. *The Novikov Conjecture for Linear Groups.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 101 (2005), 243–268.

[GK04] E. Guentner, J. Kaminker. *Exactness and uniform embeddability of discrete groups.* J. London Math. Soc. 70 (2004), 703-718.

[GTY12] E. Guentner, R. Tessera, G. Yu. *A notion of geometric complexity and its applications to topological rigidity.* Inventiones Math. 189 2012), no. 2, 315-357.

[GTY] E. Guentner, R. Tessera, G. Yu. *Discrete groups with finite decomposition complexity.* À paraître à Groups, Geometry, and Dynamics.

[Gu72] A. Guichardet. *Sur la cohomologie des groupes topologiques. II.* Bull. Sci. Math. 96 (1972). no. 2, 305–332.

[Gui73] Y. Guivarc'h. *Croissance polynômiale et périodes des fonctions harmoniques.* Bull. Sc. Math. France 101 (1973), 333-379.

[H] F. Hirzebruch. Topological methods in algebraic geometry (3rd edition). Springer, 1966.

[JR04] W. B. Johnson and N. L. Randrianarivony. *ℓ_p $(p > 2)$ does not coarsely embed into a Hilbert space.* Manuscript, 2004.

[Ka67] D. Kazhdan. *On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*. Funct. Anal. Appl. 1 (1967), 63-65.

[Ke65] M. A. Kervaire. *Le théorème de Barden-Mazur-Stallings.* Comment. Math. Helv., 40 (1965). 31–42.

[KM63] M.A. Kervaire, J.W. Milnor. *Groups of homotopy spheres I. Ann. of Math.* 77 (1963), 504–537.

[KL97] B. Kleiner and B. Leeb, *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 86 (1997), 111–197.

[KrLu05] M. Kreck, W Lück. The Novikov Conjecture : Geometry and Algebra. (ebook) Birkhauser Basel, 2005, ISBN : 3764371412, 266 pages.

[KrLu09] M. Kreck und W. Lück. *Topological rigidity for non-aspherical manifolds.* Pure Appl. Math. Q., 5(3, Special Issue : In honor of Friedrich Hirzebruch. Part 2) (2009). 873–914.

[KS77] R. Kirby, L. Siebenmann. *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations.* With notes by John Milnor and Michael Atiyah. Annals of Mathematics Studies, No. 88. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1977.

[LN13] A. Naor, V. Lafforgue. *Vertical versus horizontal Poincare inequalities on the Heisenberg group.* To appear in Israel Journal of Mathematics.

[LP04] E. Leuzinger, C. Pittet. *On quadratic Dehn functions.* Math. Z. 248 (2004), no. 4, 725–755.

[M96] J. Matousek. *On embedding expanders into ℓ_p spaces.* Israel J. of Math. 102 (1996), 189–197.

[Ma63] B. Mazur. *Differential topology from the point of view of simple homotopy theory.* Publ. Math. I.H.E.S. 15 (1963), 5–93.

[Mi61] J.W. Milnor. *A procedure for killing the homotopy groups of differentiable manifolds.* In Proc. Symp. in Pure Math. 3 (Differential Geometry). Amer. Math. Soc. (1961), 39–55.

[Mi65] J.W. Milnor. Lectures on the h-cobordism theorem. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.

[MN08] M. Mendel and A. Naor. *Metric cotype.* Ann. of Math. 168 (2008), no. 1, 247–298.

[Mo68] G. D. Mostow, *Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of the hyperbolic space forms.* Publ. Math. IHES 34 (1968) 53–104.

[Ost] M. Ostrovskii. *Coarse embeddability into Banach spaces*, Topology Proceedings 33 (2009), 163-183.

[Pan89] P Pansu. *Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un.* Ann. of Math., II. Ser. 129 (1989), No.1, 1–60.

[Pap] P. Papasoglu. *On the asymptotic cone of groups satisfying a quadratic isoperimetric inequality.* J. Differential Geom. Volume 44, Number 4 (1996), 789-806.

[Pau01] S. D. Pauls. *The large scale geometry in nilpotent Lie groups.* Comm. Anal. Geom. 9 (5) (2001), 951-982.

[PQR03] E. K. Pedersen, F. Quinn, A. Ranicki. *Controlled surgery with trivial local fundamental groups, from : High-dimensional manifold topology.* World Sci. Publishing, River Edge, NJ (2003). 421–426.

[R02] A. Ranicki. Algebraic and Geometric Surgery, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, 2002.

[RTY13] D. Ramas, R. Tessera, G. Yu. Finite decomposition complexity and the integral Novikov conjecture for higher algebraic K-theory. To appear in Crelle.

[RY95] A. Ranicki, M. Yamasaki. *Controlled K-theory.* Topology Appl. 61 (1995), no. 1, 1–59.

[RY06] A. Ranicki, M. Yamasaki. *Controlled L-theory.* Exotic homology manifolds—Oberwolfach 2003, Geom. Topol. Monogr. 9 (2006), 105–153.

[R96] J. Roe. *Index theory, coarse geometry, and topology of manifolds.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 90. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Se65] A. Selberg, *On the estimation of Fourier coefficients of modular forms.* Proc. Symp. Pure Math. VII, Amer. Math. Soc. (1965), 1–15.

[Sm61] S. Smale, *Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than 4.* Ann. of Math. 74 (1961), 391–406.

[T11] R. Tessera. *Asymptotic isoperimetry on groups and uniform embeddings into Banach spaces.* Comment. Math. Helv. 86 3, (2011), 499-535.

[T09] R. Tessera. *Coarse embeddings into a Hilbert space, Haagerup Property and Poincare inequalities.* Journal of Topology and Analysis 1 (2009), 87–100.

[Th54] R. Thom. *Quelques propriétés globales des variétés différentiables.* Comm. Math. Helv. 28 (1954), 17–86.

[Var00] N. Varopoulos. *A geometric classification of Lie groups.* Rev. Mat. Iberoam. 16(1) (2000) 49–136.

[W] C. T. C. Wall. Surgery on compact manifolds. Academic Press, London, 1970. London Mathematical Society Monographs, No. 1.

[Wa60] A. H. Wallace. *Modifications and cobounding manifolds*, Canadian J. Math. 12. (1960). 503–528.

[We11] S. Wenger. *Nilpotent groups without exactly polynomial dehn function.* Journal of Topology, 4 1 (2011), 141–160.

[Wh78] G. W. Whitehead. Elements of homotopy theory. Springer-Verlag, New York, 1978

[Y98] G. Yu. *The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension.* Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 2, 325–355.

[Y00] G. Yu. *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space.* Invent. Math. 139 (2000), no. 1, 201–240.