Ceci est une transcription de l'exposé sur les polytopes réguliers convexes en dimension 4, que j'ai préparé en automne 2007 pour le Séminaire Mathématique des Elèves de Louis-le-Grand. Ce document ne se suffit pas à lui-même, il est prévu pour aller avec les transparents que j'ai également préparés — ils contiennent toutes les figures, et j'y renvoie constamment. Les transparents tous seuls ne suffisent pas non plus — ils ont souvent besoin d'explications, et il y a des choses que je mentionne à l'oral (et ici) qui n'ont aucune trace sur les transparents. Mais il y a nécessairement beaucoup de redondance entre les deux. J'ai essayé de transcrire le plus fidèlement possible ce que j'ai dit au tableau, mais j'ai sans doute détaillé un peu plus sur le papier. Pour le lecteur qui voudrait découvrir ce sujet sans avoir assisté à l'exposé, je conseillerais de parcourir les transparents, et en parallèle, de lire ce texte en diagonale, en s'attardant uniquement sur les explications qui lui paraîtraient nécessaires ou les digressions qui n'apparaîtraient pas dans les transparents.

Vous êtes sans doute familiers avec les cinq solides platoniciens : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. Ce sont ce qu'on appelle les polytopes réguliers convexes en trois dimensions. Je vais vous parler aujourd'hui des polytopes réguliers convexes en quatre dimensions. Je vais commencer par un rappel sur les solides platoniciens, puis définir proprement tout ce dont je vais parler par la suite, et enfin vous décrire les objets que j'ai promis.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On appelle *polyèdre régulier* un solide délimité par plusieurs faces, en forme de polygones réguliers, toutes égales, et tel que tous ses sommets sont entourés de la même façon. En d'autres termes, il faut que chaque face soit un p-gone et que chaque sommet soit entouré par q faces. D'autre part, étant donné p et q, si le polyèdre correspondant existe, alors il est uniquement déterminé par ces valeurs. On le note alors $\{p\ q\}$: c'est ce qu'on appelle le *symbole de Schläfli* du polyèdre.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Pour que le polyèdre $\{p\ q\}$ existe, il faut que la somme des angles de tous les angles qui bordent un sommet soit strictement inférieure à un tour complet. D'autre part, on a les contraintes $p \geq 3$ (un « digone » n'existe pas), et $q \geq 3$ (si on essaye de mettre deux faces autour d'un sommet, les deux se retrouvent confondues). On peut donc énumérer toutes les valeurs possibles de p et q :

- L'angle d'un triangle régulier vaut 60^o, on peut donc disposer 3, 4, ou 5 triangles autour d'un sommet du polyèdre.
- L'angle d'un carré vaut 90^o, on peut donc disposer seulement 3 carrés autour d'un sommet.
- L'angle d'un pentagone régulier vaut 108^o, on peut donc disposer 3 pentagones.
- L'angle d'un hexagone régulier vaut 120^o, il est donc impossible de construire un polyèdre avec des hexagones. Si on prend des polygones encore plus grands, l'angle sera encore plus obtus et ce sera évidemment toujours impossible.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On a donc cinq valeurs possibles pour p et q ; reste à s'assurer que tous ces polyèdres existent effectivement. En voici la construction :

- Le $\{3\ 3\}$, c'est le *tétraèdre* : une pyramide à base triangulaire. Il a 4 sommets, 6 arêtes et 4 faces.
- Le $\{3\ 4\}$, c'est l'*octaèdre* ; on peut le construire de deux façons : comme une bipyramide à base carrée (c'est-à-dire deux pyramides accolées par leur base), ou comme un antiprisme à base triangulaire. Pour obtenir un antiprisme sur une base donnée, on prend deux de ces bases, situées dans des plans parallèles, de sorte que les sommets de l'une soient en face des arêtes de l'autre et vice-versa, et on relie tous ces sommets en zigzag. L'octaèdre a 6 sommets, 12 arêtes et 8 faces.
- Le $\{3\ 5\}$, c'est l'*icosaèdre* ; pour le construire, il faut prendre un antiprisme à base pentagonale, et surmonter ses deux bases d'une pyramide. Il a 12 sommets, 30 arêtes et 20 faces.

  Transparent suivant, s'il-vous-plaît.
- Le $\{4\ 3\}$, c'est le *cube* : un prisme à base carrée. Il a 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces.

Les plus perspicaces d'entre vous auront remarqué que le fait d'inverser p et q semble échanger le nombre de sommets avec le nombre de faces, et ne pas modifier le nombre d'arêtes. Ce n'est pas un hasard, et comme on peut s'y attendre, le $\{5\ 3\}$ est un solide qui a 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces ; il s'appelle le *dodécaèdre*. Cependant, c'est plus difficile d'en donner une construction directe que pour les quatre précédents. Pour montrer qu'il existe, on va utiliser une notion fondamentale que je vais introduire tout de suite : la *dualité*.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Pour construire le *dual* d'un polyèdre, on commence par placer un sommet au milieu de chacune de ces faces. Ensuite, on relie par des arêtes les sommets situés sur des faces adjacentes, de sorte que chaque arête du dual traverse une arête du polyèdre original. Enfin, chaque sommet de l'original se retrouve ainsi encerclé par un circuit d'arêtes, sur lequel on tend une face. Par exemple, sur la figure, on fait correspondre le sommet rouge à la face rouge, l'arête verte à l'arête verte et la face bleue au sommet bleu.

Vous pouvez vérifier que la dualité est une opération involutive, c'est-à-dire que le dual du dual d'un polyèdre, c'est le polyèdre lui-même. De plus, le dual d'un polyèdre régulier est encore régulier. Plus précisément, $\{p\ q\}$ se transforme en $\{q\ p\}$. En effet, à chaque face p-gonale correspond un sommet dont partent p arêtes, donc qui est entouré par p faces — et vice-versa.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Ainsi, le dual d'un tétraèdre est un autre tétraèdre, inscrit dans le premier. Le dual d'un octaèdre est un cube. Le dual d'un icosaèdre est un dodécaèdre, et on justifie ainsi l'existence de ce dernier.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voici une dernière construction que je voudrais mentionner, car elle me servira pour les figures en 4D. Imaginez que je prends un cube, et que je colorie un sommet sur deux en noir et un sommet sur deux en blanc, de sorte qu'une arête relie toujours des sommets de couleur différente. C'est possible : la figure indique comment le faire. Que se passe-t-il si on garde uniquement les sommets blancs ? Il reste alors 4 sommets, dont deux quelconques sont situés dans les coins opposés d'une face ; comme toutes les diagonales sont égales, ces 4 points sont donc disposés aux sommets d'un tétraèdre régulier. Ainsi, le tétraèdre est un « demi-cube » !

Cela veut dire aussi qu'on peut prendre deux tétraèdres réguliers égaux, et les superposer de telle sorte que les sommets occupent tous les sommets d'un cube. La figure obtenue est plus symétrique que chaque tétraèdre tout seul : elle a toutes les symétries d'un cube. Cette figure de deux tétraèdres interpénétrés a été découverte par Kepler ; il l'a appelée *stella octangula* — « étoile à huit angles ».

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Avant de passer à la suite, je voudrais m'attarder brièvement sur la notion générale d'espace à quatre dimensions — un concept avec lequel tout le monde n'est pas forcément à l'aise.

Pour cela, je vais d'abord parler de Flatland — un monde qui a non pas quatre, non pas trois, mais seulement deux dimensions. Imaginez que vous êtes un habitant de Flatland ; vous connaissez la notion d'espace à zéro dimensions (le point), d'espace à une dimension (la droite), d'espace à deux dimensions (le plan dans lequel vous vivez), et c'est tout. Imaginez maintenant que quelqu'un essaye de vous parler de notre espace à trois dimensions. Vous seriez évidemment incapables de visualiser cet espace, car votre cerveau ne disposerait pas des « logiciels » pour voir en 3D, et vous pourriez même douter de son existence. Mais un habitant de notre monde à nous pourra vous convaincre qu'il n'y a aucune raison que la suite « point, droite, plan » s'arrête là, et qu'on peut très bien imaginer un espace où on peut tracer trois axes deux à deux perpendiculaires. Vous ne pourriez sans doute jamais voir directement les objets à trois dimensions, mais vous pourriez quand même les étudier en raisonnant sur leurs projections, leurs patrons, leurs coupes par un plan etc., ou alors simplement par analogie.

Mais alors pourquoi s'arrêter à trois ? Pourquoi ne pas imaginer un monde où on peut tracer quatre, cinq, six axes deux à deux perpendiculaires ? Il n'y a aucune raison pour avoir des angoisses existentielles face à ces espaces : s'ils sont difficiles à voir, ils ne sont pas plus difficiles à définir que l'espace à trois dimensions qu'on connaît. Et pour étudier les objets en 4D, comme on ne peut pas les visualiser directement, on doit également trouver des figures en 3D qui permettent de les décrire.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On va à présent poser les définitions des objets qu'on va décrire. Un *polytope*, c'est la généralisation de la notion de polygone ou polyèdre à n dimensions. L'idée intuitive qu'on peut en avoir sera suffisante pour suivre le reste de l'exposé, mais par principe, on va quand même le définir proprement.

On définit un polytope par récurrence :

- L'unique polytope de dimension -1, c'est l'ensemble vide, qu'on appelle dans ce contexte le *nullitope*.
- L'unique polytope de dimension 0, c'est le point ; on considère qu'il contient le nullitope.
- Un polytope de dimension n, avec $n > 0$, est la donnée d'un certain nombre (fini et non nul) de polytopes de dimensions inférieures, disposés dans l'espace euclidien à n dimensions, de telle sorte que :
  - chaque polytope de dimension $n-2$ (appelé aussi *crête* du grand polytope) soit contenu dans exactement deux polytopes de dimension $n-1$ (appelés aussi *facettes*

du grand polytope).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

– deux crêtes ne soient jamais coïncidentes (sinon, on a du mal à déterminer comment s'agencent les facettes autour).
– deux facettes adjacents n'appartiennent jamais au même hyperplan (sinon, le polytope est dégénéré).
– aucun sous-ensemble propre du polytope ne forme lui-même un polytope.

Ainsi, avec cette définition, un polytope de dimension 1 est constitué d'un certain nombre de points, non confondus (à cause de la deuxième restriction), et tels que chaque nullitope soit partagé par exactement deux points. Comme le nullitope est unique, on obtient donc un couple de points distincts, soit un segment. De même, on peut vérifier qu'en dimension 2 et 3, on retombe sur la définition usuelle d'un polygone et d'un polyèdre.

On commence à voir ici l'utilité du nullitope, dont l'introduction peut paraître artificielle au premier abord. Une autre conséquence est que la formule d'Euler (qu'on ne va pas démontrer ici) s'écrit alors beaucoup plus joliment :

$$\sum_{i=-1}^{n} (-1)^i N_i = 0,$$

où N_i est le nombre d'éléments de dimension i — en comptant le nullitope et le polytope tout entier.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On introduit ensuite la notion de *symétrie* d'un polytope : il s'agit d'une isométrie de l'espace ambiant qui laisse invariant le polytope. Ces symétries forment alors un groupe. On définit alors récursivement un *polytope régulier* :

– on convient que le nullitope est régulier ;
– on dit qu'un polytope de dimension $n \geq 0$ est régulier si toutes ses facettes sont régulières, égales et si son groupe de symétries est transitif sur ses sommets (c'est-à-dire que pout tout couple de sommets, il existe une symétrie du polytope qui transforme l'un en l'autre).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Une conséquence immédiate de cette définition est que tout polytope régulier est inscriptible dans une hypersphère. En effet, soit O le centre du polytope, c'est-à-dire l'isobarycentre de ses sommets. Comme toute symétrie permute les sommets, elle laisse O invariant. Ensuite, si on se donne deux sommets A et B, il existe une symétrie qui transforme A en B. Enfin, toute symétrie conserve les distances, d'où $OA = OB$. Ainsi, tous les sommets sont situés à la même distance du centre, donc sur une hypersphère de centre O.

Ceci permet de projeter un polytope régulier sur sa sphère circonscrite, et d'obtenir un pavage régulier de la sphère. Cet objet est parfois plus agréable à étudier que le polytope lui-même.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Ainsi, le dual d'un polytope (qu'on peut définir, dans le cas général, d'une façon similaire au cas de la dimension 3) est en fait défini seulement à une homothétie près — alors que pour un polytope projeté sur une hypersphère, cette ambiguïté n'existe plus.

La dernière notion que je voudrais introduire est celle de *polytope convexe*. Pour cela, on doit aussi définir l'intérieur d'un polytope convexe ; on définit ces deux notions simultanément par récurrence :

– On convient que le nullitope est convexe, et que son intérieur est vide.
– On convient que le point est convexe, et que son intérieur, c'est le singleton qui contient le point lui-même.
– Pour qu'un polytope de dimension $n > 1$ soit convexe, on demande d'abord que toutes ses facettes soient convexes et d'intérieurs disjoints. A partir de là, on admet que la réunion des intérieurs des facettes délimite une partie bornée de l'espace, qu'on définit comme étant l'intérieur du polytope. On dit alors que le polytope est convexe si son intérieur est convexe, c'est-à-dire que tout segment dont les extrémités sont contenues dans le polytope est aussi contenu dans le polytope.

Maintenant qu'on a définit tous les termes, je vais, comme promis, parler des polytopes réguliers convexes en dimension 4. Cependant, c'est un sujet assez restrictif, et je vais d'abord vous présenter — très rapidement — quelques objets qui dépassent le cadre de cet exposé, mais s'en rapprochent, en espérant qu'ils éveilleront votre curiosité.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voici le petit dodécaère étoilé. C'est un polyèdre régulier, mais non convexe — eh oui, ça existe ! Ses faces sont 12 pentagrammes (ou étoiles à 5 branches), qui s'entrecroisent, de telle sorte que la partie centrale de chaque face est cachée à l'intérieur.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Le cuboctaèdre. C'est un polyèdre uniforme, c'est-à-dire que son groupe de symétries est transitif sur ses sommets et que ces faces sont régulières, mais pas nécessairement égales.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Une section 3D du « Grand Prismosaure » — un polytope uniforme non convexe en 4D.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Le pavage régulier du plan par des hexagones, avec son symbole de Schläfli : chaque sommet est entouré par 3 hexagones.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Un pavage régulier du plan hyperbolique par des triangles, où chaque sommet est entouré par 7 triangles réguliers. Je n'en dis pas plus.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Un polygone régulier à 18 côtés, mais non planaire.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Un composé régulier. Le groupe de symétries est transitif sur les sommets, toutes les faces sont régulières et égales, mais ce n'est pas un polyèdre : il se décompose en 5 morceaux en forme de tétraèdre. (La stella octangula est un autre objet du même genre).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On en vient enfin au sujet annoncé. Un *polychore*, c'est simplement un raccourci pour désigner un polytope en 4D. C'est donc un objet à quatre dimensions délimité par un certain nombre de sommets, d'arêtes, de faces (qui sont des polygones) et de *cellules* (qui sont des polyèdres).

Dans un polychore régulier, toutes les cellules sont régulières et égales, et tous les sommets sont équivalents. On en déduit que toutes les arêtes et toutes les faces sont aussi équivalentes. Ainsi, autour de chaque arête, il y aura r cellules, avec $r \geq 3$. Si chaque cellule est un $\{p\ q\}$, on note le polychore obtenu $\{p\ q\ r\}$; comme précédemment, on peut reconstruire sans ambiguïté l'objet à partir de ces trois valeurs (pourvu qu'il existe). Et comme précédemment, une condition nécessaire pour que l'objet existe est que la somme des angles diédraux autour de chaque arête soit strictement inférieure à 2π.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

La notion de dualité s'étend naturellement à la dimension 4. Les sommets correspondent alors aux cellules, et les arêtes aux faces. C'est toujours une opération involutive, qui préserve la dualité et qui transforme $\{p\ q\ r\}$ et $\{r\ q\ p\}$.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Comme précédemment, on cherche toutes les valeurs théoriquement possibles de p, q et r. Pour cela, il faut calculer l'angle diédral entre les faces adjacentes de chaque solide platonicien. Voici, par exemple, comment on procède pour un tétraèdre ; on prend 1 pour la longueur de ses arêtes. L'angle qu'on cherche, c'est l'angle α sur la figure, qui se trouve dans le triangle formé par deux sommets et le milieu de l'arête opposée. C'est un triangle isocèle, dont les deux côtés égaux sont des hauteurs de faces, donc font $\frac{\sqrt{3}}{2}$, et dont la base fait 1. On peut alors exprimer α par la formule que vous voyez ici, puis calculer sa valeur numérique — environ $70^o32'$. Pour les autres polyèdres, le calcul est à peine plus difficile ; je ne vais pas le détailler, mais seulement donner directement les valeurs numériques auxquelles je vais vous demander de croire sur parole.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Avec les valeurs qu'on trouve, on constate qu'on peut caser 3, 4 ou 5 tétraèdres autour d'une arête, mais au maximum 3 cubes, au maximum 3 octaèdres, au maximum 3 dodécaèdres, et on ne peut rien faire avec des icosaèdres ; ce qui donne six possibilités : $\{3\ 3\ 3\}$, $\{3\ 3\ 4\}$, $\{3\ 3\ 5\}$, $\{4\ 3\ 3\}$, $\{3\ 4\ 3\}$ et $\{5\ 3\ 3\}$.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voilà pour la partie théorique ; à présent, nous allons enfin découvrir à quoi ressemblent concrètement les polychores réguliers convexes. Pour construire les plus simples d'entre eux, on va raisonner par analogie. On va commencer par le *pentachore* $\{3\ 3\ 3\}$, qu'on peut aussi appeler *hypertétraèdre*.

Comment construit-on un tétraèdre ? La façon la plus logique consiste à partir d'un triangle équilatéral de côté 1 (en noir sur la figure), trouver un point dans l'espace qui est à la distance 1 de chaque sommet du triangle (en rouge sur la figure), et le relier à chaque sommet (en gris sur la figure). On peut ainsi compter ses faces, arêtes et sommets :

– les trois sommets du triangle de départ, plus le sommet qu'on a rajouté, font 4 ;
– les trois côtés du triangle de départ, plus les trois lignes qui relient le nouveau sommet aux anciens, font 6 arêtes ;
– le triangle de départ, plus les trois nouveaux qui ont pour base les côtés de l'ancien et pour sommet le point rajouté, font 4 faces.

Et d'ailleurs, qu'est-ce qu'un triangle équilatéral ? On peut l'obtenir en prenant un segment de longueur 1 (en noir sur la figure), en trouvant un point dans le plan qui est à la distance 1 de chaque extrémité (en rouge sur la figure) et en le reliant à ces extrémités (en gris sur la figure).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On peut répéter la même procédure en dimension 4 : on part d'un tétraèdre d'arête 1 (en noir sur la figure), on trouve un point, dans l'espace à quatre dimensions, qui est à la distance 1 de chacun des sommets (en rouge sur la figure), et on le relie à tous les sommets (en gris sur la figure). Certains pourraient rétorquer que le point rouge se trouve certes à la même distance de tous les autres, mais que cette distance vaut seulement $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et pas 1. Mais il ne faut pas oublier que ce que vous voyez ici, ce n'est qu'une projection du pentachore dans l'espace à 3 dimensions ; le point rouge, ce n'est pas le centre du tétraèdre, mais il est décalé dans la 4-ième dimension (c'est là qu'il faut faire un effort d'imagination).

Combien le pentachore a-t-il d'éléments ?

- le tétraèdre a 4 sommets, et on en rajoute 1, ce qui fait 5 au total ;
- il y a deux types d'arêtes : les arêtes du tétraèdre (noires), au nombre de 6, et les arêtes qui relient les sommets du tétraèdre au nouveau sommet (grises), au nombre de 4 (une par sommet), soit 10 au total ;
- il y a deux types de faces : les faces du tétraèdre, en forme de triangles équilatéraux et au nombre de 4, et les faces qui ont pour base une arête noire et pour sommet le sommet rajoutée, également en forme de triangles équilatéraux et au nombre de 6 (une par arête), soit 10 au total ;
- il y a le tétraèdre original, et 4 autres cellules, également en forme de tétraèdre régulier, qui ont pour base une des faces originales et pour sommet le nouveau sommet, soit 5 au total. Cela justifie son nom : tout comme « tétraèdre » signifie « quatre faces » en grec, « pentachore » signifie « cinq cellules ».

Par ailleurs, on peut vérifier qu'autour de chaque arête — qu'elle soit noire ou grise — il y a toujours exactement 3 cellules, ce qui justifie que ce polychore est régulier et qu'il s'agit bien du $\{3\ 3\ 3\}$.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Je vais maintenant vous présenter l'*hypercube*. On l'appelle aussi parfois *tesséracte* — un joli nom qu'on trouve souvent en anglais, mais que je n'ai jamais vu employé en français, ce que je trouve bien dommage.

Comment construit-on un cube ? On part d'un carré de côté 1 (en bleu), et on le translate pour obtenir un deuxième carré (en rouge) qui est à la distance 1 du premier, et enfin on relie les sommets correspondants des deux carrés (en gris). On peut construire un carré de la même façon : on part du segment bleu, on le translate pour obtenir le segment rouge et on relie les deux par les côtés gris.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On peut faire la même chose en 4D : on part d'un cube (en bleu), on le translate dans la quatrième dimension pour obtenir un deuxième cube (en rouge), et on relie les sommets correspondants (en gris). Ses éléments sont les suivants :

- chacun des deux cubes a 8 sommets, ce qui fait 16 sommets au total ;

– chacun des deux cubes a 12 arêtes, et il y a 8 arêtes grises (une par sommet de chaque cube), ce qui fait 32 arêtes au total ;
– chacun des deux cubes a 6 faces, et il y a aussi les 12 faces délimitées par une arête bleue, une arête rouge correspondante et deux arêtes grises, soit 24 faces au total.
– on a les deux cubes de départ, et une cellule cubique pour chaque paire de faces correspondantes, soit 8 cellules au total.

Il est clair que ce polychore est régulier. On peut vérifier qu'autour de chaque arête (bleue, rouge ou grise), il y a toujours 3 cellules : c'est donc le $\{4\ 3\ 3\}$.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Si vous avez essayé de compter les cellules autour de chaque arête, vous avez peut-être constaté que la figure de l'hypercube qu'on a jusque là n'est pas très lisible. Posons-nous d'abord la question, comment représenter un cube d'une façon qui est claire pour un habitant de Flatland ? La figure en haut à droite offre une solution possible : c'est une projection du cube en perspective, comme si on le voyait à travers une de ses faces devenue transparente. On voit ici très clairement la face rouge — le « fond de la boite » — entourée des quatre faces latérales ; seule la face bleue — le « couvercle » — se superpose aux autres.

En bas à droite, j'ai présenté une projection similaire du tesséracte. On voit ici la cellule rouge — le « fond de l'hyperboite » — entourée des six cellules « latérales » ; seul le « couvercle » (bleu) se superpose aux autres sur ce dessin. Sur cette figure, il est beaucoup plus facile de visualiser comment les différents sommets, arêtes, faces et cellules s'agencent les uns par rapport aux autres.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

La vue en projection, c'est bien pour avoir une vision globale de l'objet, mais pour faire des raisonnements un peu plus détaillés et précis, on aura besoin de l'aborder d'une autre façon : en examinant ses coupes par des hyperplans. Mais comment trouver à quoi ressemblent ces coupes ? Comme précédemment, on va d'abord chercher à trouver les coupes d'un cube.

Si on pose le cube horizontalement sur une table, alors tout est clair : ses sommets sont répartis entre deux plans horizontaux, celui de la face bleue, et celui de la face rouge. Mais essayons maintenant de couper le cube par des plans perpendiculaires à sa grande diagonale ; autrement dit, essayons d'examiner le cube comme s'il était accroché au plafond par une ficelle attachée à l'un de ses sommets. Si on voit bien en 3D, on voit tout de suite que les sommets se répartissent entre 4 plans horizontaux : un sommet tout seul, trois sommets disposés en forme de triangle équilatéral, trois sommets disposés en forme de triangle équilatéral dans l'autre sens et le dernier sommet tout seul. Mais si on n'est pas capable de voir directement en 3D, comment le trouver ?

Une solution consiste à déterminer séparément dans quelles couches se trouvent les sommets du carré bleu, puis ceux du carré rouge. On sait que les sommets d'un carré orienté de cette façon se répartissent en trois couches : un sommet tout seul, la diagonale, et un sommet tout seul. Mais comme les deux carrés sont inclinés par rapport à la verticale, chaque section successive est légèrement décalée. Enfin, pour des raisons de symétrie, on sait que le sommet supérieur du carré bleu est dans la même couche que la diagonale du carré rouge. La figure de droite montre comment on peut rassembler toutes ces informations pour retrouver les sections successives du cube.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Maintenant qu'on sait décomposer un cube de cette façon, on peut faire le même travail pour l'hypercube. On obtient quatre couches : un sommet tout seul, puis quatre sommets disposés en tétraèdre régulier, six sommets disposés en octaèdre régulier (deux triangles parallèles en sens opposés), encore un tétraèdre mais dans l'autre sens, et un sommet tout seul.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On en vient maintenant à l'équivalent de l'octaèdre. Pour construire un octaèdre, on prend un carré (en vert), un point en dessous (en bleu), un point au-dessus (en rouge), et on relie chacun de ces deux points à chaque sommet du carré (en gris). De même, pour construire un carré, on part de sa diagonale (en vert), on prend un point en dessous (en bleu), un point au-dessus (en rouge), et on relie chacun des deux à chaque extrémité (en gris).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

On peut faire la même chose en 4D : on part d'un octaèdre (en vert), on rajoute deux points qui sont situés de part et d'autre dans la quatrième dimension (en bleu et en rouge), et on les relie à chaque sommet de l'octaèdre (en gris). Voici ses éléments :

- les 6 sommets de l'octaèdre, et les 2 points rajoutés, ce qui fait 8 au total ;
- les 12 arêtes (vertes) de l'octaèdre, et les 12 arêtes grises (deux pour chaque sommet de l'octaèdre), ce qui fait 24 au total ;
- les 8 faces de l'octaèdre, et les 24 faces obtenues en prenant une des arêtes vertes pour base et le point bleu ou rouge pour sommet, ce qui fait 32 faces au total — toutes triangulaires.
- toutes les cellules obtenues en prenant une des faces de l'octaèdre pour base, et le point bleu ou rouge pour sommet ; il y en a donc 16, et elles sont toutes tétraédriques.

On peut vérifier qu'autour de chaque arête (verte ou grise), il y a quatre cellules. C'est un polychore régulier : l'*hexadécachore*, ou hyperoctaèdre, de symbole de Schläfli $\{3\ 3\ 4\}$. C'est donc le dual du tesséracte.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Tout comme l'octaèdre peut alternativement être vu comme un antiprisme triangulaire, l'hyperoctaèdre a aussi une interprétation similaire. On peut l'obtenir en prenant deux tétraèdres situés dans des hyperplans parallèles et en sens opposés, et en reliant deux à deux tous les sommets de ces deux tétraèdres sauf les couples de sommets correspondants. Il y a plusieurs façons de le voir : par exemple, on peut examiner attentivement la figure que je viens de décrire et constater que c'est aussi un polychore régulier avec 4 cellules tétraédriques autour de chaque arête ; ou alors on peut essayer de voir ce qui se passe quand on découpe l'hexadécachore par des hyperplans parallèles à une cellule.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Enfin, voici une dernière observation dont on aura besoin pour la suite. On a vu que si on prenait un sommet sur deux sur un cube (de sorte à ne retenir qu'une extrémité de chaque arête), on obtenait un tétraèdre. Que se passe-t-il si on fait la même chose pour le tesséracte ? Un rapide coup d'oeil à la figure vous convaincra que ces sommets forment précisément un hyperoctaèdre ; on peut donc décomposer un hypercube en deux hyperoctaèdres.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Considérons maintenant un hypercube superposé à son hyperoctaèdre dual, de sorte que les deux soient inscrits dans une même hypersphère. On vient de voir que l'hypercube peut se décomposer en deux hyperoctaères, ce qui en fait 3 au total. Appelons l'hyperoctaèdre dual (1), et les deux « demi-hypercubes » (2) et (3) ; ils sont représentés sur la figure en « vue éclatée » — couche par couche.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Maintenant que se passe-t-il si, au lieu de réunir (2) et (3), on réunit (1) et (2), ou (1) et (3) ? En regardant la figure, on reconnaît la vue éclatée d'un hypercube, dans le sens de sa grande diagonale ; ainsi, chacune des trois paires d'hyperoctaèdres forme un hypercube. Il n'est pas difficile de se convaincre que le troisième hyperoctaèdre est alors toujours son dual. En d'autres termes, (1), (2) et (3) jouent des rôles complètement symétriques.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

La question qui vient naturellement est alors : que se passe-t-il si on réunit les trois hyperoctaèdres ? On obtient un ensemble de points qui a une symétrie extrêmement riche : non seulement toute symétrie de l'hypercube le préserve, mais en plus, il y a aussi des rotations qui permutent (1), (2) et (3) entre eux. Mais avant de dire que c'est un polychore régulier, il faut encore trouver ses arêtes, ses faces et ses cellules.

L'objet en 3D qui se rapproche le plus de celui qu'on cherche à construire est ce qu'on appelle le *dodécaèdre rhombique*. Ses sommets sont ceux d'un cube et de son octaèdre dual réunis, ses arêtes relient chaque sommet de l'octaèdre à chacun des quatre sommets de la face correspondante du cube, et ses faces sont des losanges qui ont pour diagonales une arête du cube et une arête correspondante de l'octaèdre. Mais ce polyèdre-là n'est pas régulier : il a deux types de sommets bien distincts (les sommets du cube sont entourés par 3 faces alors que ceux de l'octaèdre sont entourés par 4 faces), et ses faces sont des losanges et pas des carrés. La situation est beaucoup plus jolie en 4D.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

De même que précédemment, on relie par une arête chaque sommet de l'hyperoctaèdre à chacun des sommets de la cellule correspondante de l'hypercube dual, mais on garde aussi les arêtes de l'hypercube. (Remarquez que les extrémités de chaque arête se trouvent toujours dans deux hyperoctaèdres différents parmi (1), (2) et (3) !) Comme faces, on prend tous les triangles qu'on peut construire en prenant un sommet de l'hyperoctaèdre pour sommet et une arête de la cellule correspondante de l'hypercube pour base. Enfin, comme cellules, on prend tous les octaèdres construits avec une face de l'hypercube et l'arête correspondante de l'hyperoctaèdre — voir la figure.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Cette fois-ci, tout marche bien : toutes les arêtes ont la même longueur, les cellules sont toutes régulières, et autour de chaque arête, il y a toujours 3 cellules. C'est un polychore régulier : le $\{3\ 4\ 3\}$; j'ai essayé de représenter sur cette figure l'agencement des cellules autour d'un des sommets. Comptons ses éléments :

- 3 groupes de 8 sommets, soit 24 au total ;

- les 32 arêtes de l'hypercube, et les arêtes qui relient chacun des 8 sommets de l'hyperoctaèdre à chacun des 8 sommets de la cellule correspondante, soit 96 au total ;
- une face pour chacun des 8 sommets de l'hyperoctaèdre et chacune des 12 arêtes qui sont autour, soit 96 au total ;
- une cellule par face de l'hypercube, ou par arête de l'hyperoctaèdre — soit 24 au total.

Son nom est donc le *tétracosachore*. Comme il n'a qu'un équivalent imparfait en 3D, on ne peut pas vraiment l'appeler « hyper-quelque chose ». Comme si la symétrie de cet objet n'était pas déjà assez riche, il est, en plus, son propre dual.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Si vous avez bien suivi, on a construit pour le moment 4 polychores, et on a vu qu'il y avait 6 possibilités. J'aurais adoré construire les deux autres : ces objets sont encore plus beaux et plus riches que tout ce qu'on a vu jusque là. Malheureusement, ils sont aussi beaucoup plus complexes, et leur présentation détaillée prendrait trop de temps : je vais devoir me contenter de les évoquer brièvement.

D'abord, il y a l'*hexacosichore* $\{3\ 3\ 5\}$, équivalent de l'icosaèdre. Il n'a pas moins de 120 sommets, 720 arêtes, 1200 faces (triangulaires) et 600 cellules (tétraédriques). J'ai représenté ici une infime partie de ce monstre : l'agencement des cellules autour d'un sommet donné.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voici — sans justification évidemment — une vue éclatée de l'hexacosichore. Dans l'ordre : un point, un icosaèdre, un dodécaèdre, un icosaèdre un peu plus grand, un icosidodécaèdre, puis la même chose dans l'ordre inverse.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voici une projection de tout l'objet dans le plan, pour donner une idée de sa complexité.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Enfin, il y a son dual : l'*hécatonicosachore* $\{5\ 3\ 3\}$, équivalent du dodécaèdre. Je n'ai pas mis d'image, car de toute façon, on n'y verrait pas grand chose. Il a donc 600 sommets, 1200 arêtes, 720 faces (pentagonales) et 120 cellules (dodécaédriques).

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Voici les références dont je me suis servi et inspiré pour préparer cet exposé, mais que je vous conseille aussi si vous voulez en savoir plus. Le livre de François Lo Jacomo est une excellente introduction en la matière. Celui de Coxeter est un classique, très complet, mais aussi très long à lire. *Flatland* est en fait un roman, écrit au XIXième siècle ; mais c'est aussi un excellent texte de vulgarisation, qui, même s'il n'a pas de véritable contenu mathématique, introduit très bien la notion d'espace à plusieurs dimensions et permet de s'y habituer. George Olshevski est un mathématicien contemporain, qui a pour projet d'énumérer tous les polytopes uniformes en dimension 4. L'image du « grand prismosaure » provient de son site Internet. Il contient beaucoup d'informations très intéressantes — c'est notamment là que j'ai trouvé la définition propre d'un polytope et celle d'un polytope régulier. Enfin, les deux grandes encyclopédies mathématiques en ligne — Wikipedia et Wolfram Mathworld — contiennent aussi un certain nombre de renseignements ; c'est là que j'ai pris la plupart des images en couleur pour la partie « culturelle » de l'exposé.

Transparent suivant, s'il-vous-plaît.

Je tiens à remercier M. Yves Duval, l'organisateur du Séminaire Mathématique des Elèves de Louis-le-Grand, qui était également mon professeur de mathématiques en MP, et sans qui cet exposé n'aurait sans doute jamais vu le jour. Merci à tous pour votre attention !