philosophie des mathématiques

Paul BERNAYS
1976

éd° Vrin (2003), coll. Mathesis
titre original : *Adhandlungen zur Philosophie der Mathematik*
introd. & trad. Hourya SINACEUR

25-40 Problèmes de logique théorique (1927)

34 Règles de la pensée ?

Nous exigeons en plus qu'une fois nommés les principes de l'inférence, nous n'ayons plus besoin de réfléchir. Les règles de l'inférence doivent être constituées de telle sorte qu'elles éliminent la pensée logique. Autrement, nous devrions bien avoir préalablement de nouvelles règles logiques pour appliquer lesdites règles logiques. [Commentaire : la pensée primitive *engendre* les règles qui la décrivent et non l'inverse !]

41-82 La philosophie des mathématiques et la théorie de la démonstration de Hilbert (1930)

41 Crise des fondements ?

la discussion actuelle sur les fondements des Mathématiques ne prend pas du tout sa source dans une situation de détresse de la Mathématique elle-même. Cette science se trouve dans un état de certitude méthodique tout à fait satisfaisant. […]

L'aspect problématique, les difficultés et les différence d'opinion commencent non pas là où l'on s'interroge simplement sur les faits mathématiques, mais bien plutôt là où on cherche les raisons ou la limite de la connaissance mathématique. Ces questions à caractère philosophique ont acquis une urgence particulière depuis le changement intervenu, vers la fin du XIXe siècle, dans le point de vue méthodique de la Mathématique.

44 Prouvable vs vrai

Détacher […] la déduction [*Deduktion*] de l'affirmation [*Behauptung*] de la vérité des propositions primitives n'est nullement une sophistication futile. Bien au contraire, développer axiomatiquement une théorie sans prendre en considération la vérité des principes pris pour point de départ peut être d'une grande valeur pour notre connaissance scientifique. En effet d'une part, des hypothèses dont la justification est douteuse deviennent, grâce au développement systématique de leurs conséquences logiques, susceptibles d'être soumises à l'épreuve des faits ; d'autre part les *possibilités de construire des théories a priori*, en adoptant les points de vue de la simplicité systématique, sont explorées pour ainsi dire en stock grâce à la Mathématique.

47/53 Mathématiquement = *structurellement*

il s'avère nécessaire de délimiter le concept du mathématique indépendamment de l'état factuel des disciplines mathématiques, en caractérisant principiellement la manière de connaître propre à la Mathématique. […] On peut […] définir la connaissance mathématique comme une connaissance qui repose sur la considération de la *structure* des objets.

[…]

Nous avons établi que l'abstraction formelle, *i.e.* la focalisation sur l'aspect structurel des objets, est la caractéristique du mode de connaissance mathématique, et nous avons ainsi principiellement délimité le champ du mathématique.

48 Mathématique symbolique

Le caractère typiquement mathématique de la Théorie de la démonstration est particulièrement manifeste dans le rôle de la *symbolique* logique. La symbolique est ici le *moyen de mettre en œuvre l'abstraction formelle*. Le passage du contenu logique à l'attitude [*Einstellung*] formelle se fait de la manière suivante : nous faisons abstraction de la signification originelle des symboles logiques et tenons les symboles eux-mêmes pour représentants des objets et liaisons formels.

49-50 Les règles prennent leur sens dans leur *usage*

La comparaison employée par Weyl entre une démonstration conduite de manière purement formelle et un jeu d'échecs peut servir à éclairer la situation. Aux propositions primitives de la démonstration correspond la disposition de départ dans le jeu, aux règles d'inférence correspondent les règles du jeu. Supposons maintenant qu'un maître d'échecs sagace ait, pour une certaine disposition de départ *A*, découvert la possibilité de faire échec et mat à son adversaire en dix coups. Du point de vue usuel nous devons dire que cette possibilité est *logiquement* déterminée par la disposition de départ et les règles du jeu. D'un autre côté, on ne peut cependant pas affirmer que dans l'indication de la position de départ *A* et des règles du jeu est contenue, selon le sens, l'affirmation qu'en dix coups on pourra parvenir à un échec et mat. La contradiction apparente entre ces deux affirmations disparaît lorsque nous nous rendons compte que l'effet « logique » des règles du jeu repose sur la *combinaison* et n'est donc pas obtenu par une simple analyse de signification mais seulement par une action réelle.

53 Logicisme confusing

le concept de nombre cardinal est une *concept de structure* élémentaire. S'il semble, au vu de sa définition logique, que ce concept est obtenu à partir des éléments de la Logique, c'est que dans cette définition ce concept est associé à des éléments logiques, à savoir la forme existentielle et la relation de sujet à prédicat, éléments qui, en eux-mêmes, sont inessentiels pour le concept de nombre cardinal. Nous avons donc ici, dans le fait, un *habillement logique* d'un concept formel.

Le résultat de ces considérations c'est que l'opinion des logicistes qui affirment que la Mathématique est une connaissance purement logique s'avère, justement quand on considère de plus près la Logique théorique, dépourvue de rigueur et source de malentendus. Cette opinion n'est justifiée que si nous entendons le concept du mathématique au sens de sa délimitation historique. Mais cette détermination conceptuelle masque ce qui est essentiel du point de vue épistémologique et laisse de côté ce qui est le propre de la Mathématique.

53-4 Save Kant

Pour saisir pareillement [*via* mode de connaissance & délimitation principielle du champ] le concept du logique du point du vue épistémologique, il faut séparer du domaine entier de la doctrine des concepts, jugements et inférences [*Schlüssen*], qui est communément désigné comme logique, une partie plus étroite, la Logique *réfléchissante ou philosophique*, *i.e.* le domaine des connaissances *analytiques au sens propre*, qui ont leur source dans la pure *conscience de signification*. À cette Logique philosophique est connectée la Logique systématique, qui puise dans les résultats de la Logique philosophique ses éléments primitifs et ses principes et développe à partir d'eux une théorie par une méthode mathématique.

De cette façon, la part de connaissance vraiment analytique se trouve clairement séparée de la part de connaissance mathématique. Cela permet de mesurer ce qu'il y a de justifié d'une part dans la *doctrine kantienne de l'intuition pure*, d'autre part dans la prétention logiciste. Nous pouvons détacher l'idée fondamentale de Kant, selon laquelle la connaissance mathématique et, plus généralement, *l'application fructueuse de l'inférence logique, repose sur une évidence intuitive*, de la configuration particulière que Kant a donné à cette idée dans sa doctrine de l'espace et du temps. Cela nous permet simultanément de faire justice au caractère totalement élémentaire de l'évidence mathématique et au degré d'abstraction de l'attitude mathématique, deux faits sur lesquels l'affirmation du caractère logique de la Mathématique vise à mettre l'accent.

54 Nombres = ombre *combinatoire*

les déterminations de nombre cardinal concernent l'assemblage de parties pour constituer un tout complexe du donné ou du représenté, donc cela précisément en quoi consiste l'aspect structurel d'un objet.

44 Nombres & structures

il y a deux manières de normer [le nombre ordinal]. À la base de l'une il y a une sorte de choses et une forme d'adjonction ; les objets sont des figures qui commencent et finissent avec une chose de la sorte en question et où chaque chose qui ne constitue pas encore la fin de la figure est suivie par une chose de cette sorte adjointe. Dans l'autre façon de normer nous avons une chose primitive et un processus ; les objets sont alors la chose primitive elle-même, plus les figures obtenues en partant de la chose primitive et en lui appliquant une fois ou de manière répétée le processus en question.

Si nous voulons avoir, selon l'une ou l'autre manière de normer, les nombres ordinaux comme objets univoques, libres de tous les ingrédients inessentiels, alors nous devons chaque fois prendre pour objet le simple schéma de la figure de répétition en question, ce qui exige une très haute abstraction. Il nous est cependant loisible de représenter ces objets purement formels par des objets concrets (« signes numériques ») ; ces derniers comportent des propriétés inessentielles, arbitrairement ajoutées, mais qui sont aussi comprises comme telles, sans plus. Ce procédé résulte chaque fois d'une stipulation déterminée, qui doit être maintenue dans le cadre d'une seule et même considération [footnote]. Une telle stipulation, au sens de la première manière de normer, est par exemple celle qui prescrit de représenter les premiers nombres ordinaux par les figures 1, 11, 111, 1111. Une stipulation correspondant à la seconde manière consiste à représenter les premiers nombres ordinaux par les figures 0, 0', 0", 0"', 0"".

Que nous trouvions ainsi, en partant de l'aspect structurel, un accès simple aux nombres, apporte une nouvelle confirmation à notre conception du caractère de la connaissance mathématique. Car le rôle dominant du nombre dans la Mathématique devient compréhensible dans cette perspective et notre caractérisation de la Mathématique comme théorie des structures apparaît comme l'extension conforme à la réalité de l'affirmation, mentionnée au début, selon laquelle les nombres constituent l'objet propre de la Mathématique.

[*footnote* : Le philosophe est enclin à exprimer ce rapport de représentation comme un lien de signification. Mais on doit observer qu'ici une différence essentielle existe avec le rapport habituel de mot à signification ; c'est que l'objet représentant contient dans sa facture les propriétés essentielles de l'objet représenté, de sorte que les relations – à étudier – des objets représentés se trouvent également dans les représentants et peuvent être établies par l'examen des représentants eux-mêmes.

58 EXISTENCE FINITISTE

L'affirmation d'existence se limite aux procédures de construction exécutables dans la représentation intuitive et ne se réfère pas à une multiplicité de tous les nombres. Cette manière de procéder élémentaire, liée aux conditions de représentabilité principielle, nous la désignons par l'expression hilbertienne de « point de vue *finitiste* » et parlons similairement de méthodes finitistes, de considération finitiste, de modes d'inférence finitistes.

[…]

Un cas particulièrement fréquent et important du dépassement du point du vue finitiste consiste en l'inférence, à partir de la négation d'une proposition valide universellement (pour tous les nombres), de l'existence d'un contre-exemple. En d'autres termes il s'agit du principe selon lequel pour tout prédicat numérique $P(n)$ on a l'alternative suivante : ou bien la proposition universelle qui énonce que $P(n)$ est vrai de tout nombre n est valide, ou bien il existe un nombre n pour lequel $P(n)$ n'est pas vrai. Du point de vue de l'inférence existentielle ce principe découle immédiatement du principe du tiers exclu, *i.e.* Du sens de la négation. Pour le point de vue finitiste la conséquence logique n'est pas bonne, parce que l'assertion de la vérité de $P(n)$ pour tous les nombres a un sens purement hypothétique, *i.e.* $P(n)$ est vrai de chaque nombre donné ; ainsi la négation de cette affirmation n'est pas le sens positif d'un énoncé existentiel.

59/61 OBJETS GÉOMÉTRIQUES VS INFINITÉ ACTUELLE DE SES POINTS

On se tromperait à bon compte en interprétant au sens d'une conception existentielle le donné intuitif spatial. Par exemple, un segment est bien quelque chose d'intuitif, non pas en tant qu'il est une multiplicité ordonnée de points, mais en tant qu'il est un tout [*Ganzes*] uniforme donné, un tout étendu en effet, à l'intérieur duquel des *places* peuvent être distinguées. La représentation d'une place sur le segment est une représentation intuitive, mais la totalité de *toutes les places* sur le segment est seulement une collection en pensée. Intuitivement nous n'atteignons que l'infini potentiel, dans la mesure où à chaque place sur le segment correspond une division du segment en deux parties, chacun des deux étant à son tour divisible en segments partiels.

[…]

Ainsi, l'apparence d'une exhibition de l'infini actuel dans le domaine des objets de l'intuition géométrique est trompeuse. Nous pouvons cependant nous rendre compte d'une manière générale qu'il ne peut être question de se défaire de la condition du fini par l'abstraction formelle, comme l'exigerait l'infini actuel. La condition de la finitude n'est certainement pas une limitation empirique contingente, mais une caractéristique essentielle d'un objet formel.

63 FINITUDE PRIMITIVE

la propriété de finitude ne constitue aucune marque restrictive particulière pour le point de vue de l'évidence intuitive. La restriction au fini est, de ce point de vue, effectuée sans plus de formes et pour ainsi dire *tacitement*. Nous n'avons besoin ici d'aucune définition particulière de la finitude, car la finitude des objets se comprend complètement d'elle-même pour l'abstraction formelle. Ainsi l'introduction intuitive-structurelle des nombres ne convient qu'aux nombres *finis*. Du point du vue de la considération intuitive-formelle, « répétition » est justement *ipso facto* répétition finie.

Cette représentation du fini implicitement donnée avec l'attitude formelle contient la raison cognitive du principe d'induction complète et de l'admissibilité de définitions récursives, deux procédures comprises, dans leur forme élémentaire, comme « induction finie » et « récursion finie ».

63 Finitisme & finitude : Gonseth :-)

notre réponse à la question de la connaissance intuitive de l'infini actuel est négative. Il en résulte aussi que la méthode finitiste est celle qui convient au point de vue de la connaissance mathématique intuitive.

65-6/7/8 Brouwer : accords & désaccords

Regardons en quoi consistent les points principaux de la position philosophique développée par Brouwer. Cette position comporte d'abord une caractérisation de l'évidence mathématique. Nos développements antérieurs sur l'abstraction formelle sont en accord avec cette caractérisation sur des points essentiels, et en particulier sur le lien lien à la doctrine kantienne de l'intuition pure.

Un écart intervient assurément dans la mesure où Brouwer conçoit le facteur-temps comme appartenant essentiellement à l'objectualité [*Gegenständlichkeit*] mathématique. Mais nous n'avons pas besoin ici d'entre dans une discussion sur ce point, car il n'a aucune influence sur la question de la méthode mathématique. Voici comment nous en décidons : ce qui, selon Brouwer, résulte comme conséquence de l'assujettissement temporel du mathématique n'est rien d'autre que ce que nous avons obtenu de l'assujettissement de l'abstraction formelle au point de départ concret-intuitif, à savoir la limitation méthodique du procédé finitiste.

[…]

[…] La constatation de l'intuitionnisme selon laquelle l'infini ne nous est pas donné intuitivement, et à laquelle nous donnons notre assentiment, nous contraint certes à modifier notre conception philosophique de la Mathématique, mais non à transformer la Mathématique elle-même.

[…]

L'intuitionnisme veut nous épargner ces devoirs [examiner la question de la consistance du système de l'Arithmétique] en restreignant la Mathématique au domaine du traitement du fini. Mais le prix à payer pour exclure cette problématique est trop haut : le problème devient caduc mais sont perdues aussi la simplicité systématique et la transparence [*Übersichtlichkeit*] de l'Analyse.

75 Combinatoire aux lois immuables

L'édifice arithmétique est élevé sur le fondement de pensées d'une signification absolument décisive pour la systématique scientifique : le principe de *conservation* (*permanence) des légalités*, qui apparaît ici comme le postulat de l'application non bornée des formes logiques usuelles du jugement et de l'inférence ; l'exigence d'une conception purement *objective*, qui détache la théorie de toute référence à notre *pouvoir de connaître.*

76 Consistance *primitive* de Peano

Il ne reste encore ici qu'à remplacer la confiance purement empirique, gagnée par de multiples essais, en la consistance de la Théorie arithmétique, *i.e.* en la concordance permanente de ses résultats, par un véritable aperçu de cette consistance et parvenir à cela est la tâche de la preuve de non-contradiction.

La situation n'est donc pas telle que le système de pensées de l'Arithmétique doive être établi seulement par la preuve de sa non-contradiction. Mais la tâche de cette preuve consiste exclusivement à nous procurer la certitude pleine et éclairée que ce système de penses, déjà motivé par des raisons internes de la systématique et éprouvé le mieux possible dans son efficacité en tant qu'outillage de l'esprit, ne puisse être ruiné par une discordance dans ses conséquences.

77 Consistance *primitive* de Peano *et* de la logique

[Le *premier principe directeur de la théorie hilbertienne de la démonstration*] dit que dans la preuve de la non-contradiction de l'Arithmétique, nous devons comprendre les lois de la Logique, telles qu'elles sont appliquées dans l'Arithmétique, dans le domaine de ce dont la non-contradiction est à prouver : ainsi la preuve de non-contradiction doit porter *simultanément sur la Logique et l'Arithmétique*.

[…]

[…] Le Calcul logique a montré que les constructions conceptuelles et les modes d'inférence appliqués dans la théorie de l'Analyse et la Théorie des ensembles sont réductibles à un nombre limité de processus et de règles, de telle sorte qu'on parvient à formaliser complètement ces théories dans le cadre d'une symbolique exactement délimitée.

De la possibilité de cette formalisation, entreprise à l'origine dans le seul but de préciser plus exactement l'analyse logique des démonstrations, Hilbert a tiré la conséquence – et c'est le *second principe directeur de sa Théorie de la démonstration* – que la tâche de la preuve de la non-contradiction de l'Arithmétique est un *problème finitiste*.

80 Ce que ne *crée* pas le formalisme

Nous devons pour le moment nous en tenir seulement au fait que le formalisme des propositions et démonstrations qui nous sert à exposer nos constructions idéelles ne coïncide pas avec le formalisme de la structure attendue dans la construction de pensée. Le formalisme suffit à formuler nos idées de multiplicités infinies et en tirer les conséquences logiques, mais il ne permet pas, en général, de produire combinatoirement, à partir de lui, la multiplicité.

105-111 Points de vue sur le problème de l'évidence (1946)

107 Créations de l'intuition

la dialectique a si fort pénétré notre esprit qu'elle dirige notre imagination intuitive, *i.e.* qu'elle influence la manière dont nous nous représentons intuitivement certains genres d'objets. Ainsi les intentions conceptuelles de la dialectique se trouvent en quelque sorte intuitivement réalisés par des interprétations spontanées. Cela rend clair également le fait que de l'intuition peuvent surgir des concepts, qui surpassent les possibilités d'un contrôle effectif et dont le déploiement entraîne l'ajout de structure infinies.

109 Émergence de la dialectique

Nous employons ici [en Arithmétique pour transformer $(a+b)(a-b)$ en a^2-b^2] tant le concept général de nombre naturel que les modes d'inférence de l'induction complète et les définitions récursives, qui se rattachent les uns et les autres à ce concept de nombre. Nous avons déjà ici toute une dialectique, qui n'existe certainement pas d'emblée pour la pensée, mais que nous avons dû plutôt rajouter et risquer à un certain stade.

110 L'évidence participe aux fondements

la possibilité d'éliminer l'évidence pour fonder une science est un fait digne de remarque. – De notre analyse de l'évidence conquise, il résulte, au demeurant, que pour appliquer une dialectique, il n'est pas essentiel d'exiger qu'elle ait en propre une évidence spécifique.

On pourrait avoir l'idée d'exclure totalement l'évidence de la fondation des sciences en ne lui laissant que le rôle qu'elle a pour l'heuristique, les analogiques et les interprétations. Cependant, on remarque aussitôt qu'en tout cas (pour les fondements) on ne peut se passer des évidences primitives des relations formelles ; celles-ci sont requises en effet, et pour contrôler le fonctionnement d'une dialectique et pour établir l'existence de contradictions.

110 Échec de l'évidence finitiste

En Mathématique Hilbert s'est efforcé, dans la conception originelle de sa Théorie de la démonstration, de réduire toute connaissance mathématique à l'évidence formelle primitive. Cela signifiait déjà un compromis qu'il dût se servir de toute la dialectique finitiste (qui comprend le concept général de chiffre) ; et comme on sait, ce fondement méthodique s'est avéré lui-même insuffisant.

110-1 Évidence & *sens primitif*. Concepts *pratiquement* émergents

nous nous voyons conduits en tout cas à discuter de la possibilité de genres de dialectique qui n'ont pas proprement un caractère d'évidence. Pour manier une telle dialectique une certaine compréhension est nécessaire ; nous devons être en mesure d'attribuer un sens à certains termes et de concevoir des relations résultat du sens des termes. (Là les exigences du maniement de la dialectique ne sont certainement pas les seules !).

Nous reconnaissons ainsi la nécessité de quelque chose comme l'intelligence ou la raison, que l'on n'a pas à regarder comme réservoir de connaissances *a priori*, mais comme activité de l'esprit consistant à réagir à des situations données par la construction, à titre d'essai, de catégories adaptées.

[…] Il valait la peine de défaire le lien de cette pensée [que l'on fît de l'intuition l'unique instance de la connaissance] avec l'apriorisme traditionnel. C'est ce qui a été tenté dans ce qui précède, en consonance avec la pensée idonéiste de Gonseth. Cette philosophie idonéiste nous conduit aussi à reconnaître que les évidences seules ne suffisent pas et que l'on a besoin plutôt de la tonalité [des activités] de l'esprit.

113-127 Existence mathématique et non-contradiction (1950)

122-3 Approche de Gonseth sur les fondements

le cadre usuel de l'opérationalité mathématique est, à vrai dire, suffisamment déterminé pour l'usage dans les théories classiques ; restent, toutefois, certaines indéterminations sur la délimitation et le genre de fondation. Lorsqu'on veut lever ces indéterminations, on se trouve devant des alternatives et trancher entre elles implique des conceptions différentes et divergentes. La diversité des conceptions se laisse voir, en particulier, dans l'effort de fonder la Mathématique d'un point de vue dégagé de toute hypothèse, de telle sorte que l'on s'appuie seulement sur ce qui va absolument de soi ou est absolument évident. Il appert alors que sur la question de savoir ce qui est à considérer comme allant absolument de soi ou (respectivement) absolument évident, il n'y a pas du tout d'accord.

La diversité des opinions est assurément moins irritante, si on se libère de la pensée de la nécessité d'obtenir une fondation libre de toute hypothèse, construite à partir d'un point de départ déterminé complètement *a priori*. On peut, pour cela, adopter le point de vue épistémologique de la philosophie de Gonseth : selon lui, le caractère d'une dualité résultant de l'action simultanée de facteurs rationnels et de facteurs conformes à l'expérience ne se limite pas à la connaissance physique de la nature, mais se retrouve dans tous les domaines de la connaissance. En ce qui concerne spécifiquement le domaine abstrait du mathématique et du logique cela signifie que là aussi les constructions de pensée ne sont pas établies purement *a priori*, mais croissent plutôt à partir d'une sorte d'expérimentation mentale. Cette conception est confirmée si nous considérons la recherche en fondements des Mathématiques. De fait, il appert ici que l'on se voit contraint d'ajuster par des essais le cadre méthodique aux nécessités du problème. Une telle expérimentation, qui doit être jugée, du point de vue de la conception traditionnelle, comme expression d'échec, apparaît sous le point de vue de l'expérience mentale comme tout à fait naturelle. En particulier, de ce point de vue, les tentatives qui se sont révélées non réalisables ne sont pas à aborder *eo ipso* comme des fautes méthodiques, mais peuvent (si elles sont faites conformément au sens et conduites avec conséquence) être apprécies comme des étapes de l'expérimentation mentale. La pluralité des entreprises concurrentes de fondation n'a, dans cette conception, rien de choquant non plus ; au contraire, elle apparaît analogue à la multitude de théories concurrentes qui se rencontrent dans quelques uns des stades de développement de la recherche en sciences de la nature.

123-4 Invention & découverte

l'analyse descriptive à laquelle Roland Wavre a soumis le rapport entre invention et découverte dans la recherche mathématique. Ce qui est indiqué ici c'est l'entrelacement des deux aspects : d'un côté l'invention de constructions de concepts, de l'autre la découverte de relations légales entre les objectualités conçues, et, de plus, le fait que l'invention conceptuelle a pour base la découverte.

125 Émergence des êtres mathématiques

Nous pouvons [...] concevoir l'idée d'une factualité mathématique qui est indépendante de ce qui, chaque fois, est particulier dans l'établissement du cadre déductif. La pensée d'une telle factualité mathématique ne signifie pas, d'autre part, un retour à la conception d'une existence autonome des objets mathématiques. Il ne s'agit pas là d'un être-là [*ein Dasein*], mais de liaisons structurelles corrélatives (être-induit) d'objets idéels à partir d'autres objets idéels.

126 Formalisme hilbertien vs formalisme radical

soulignons encore, en ce qui concerne l'entreprise hilbertienne de procéder, dans sa Théorie de la démonstration, d'un point de vue opératoire (constructif), que l'intérêt scientifique théorique de cela n'est absolument pas lié à ce dogme philosophique nommé « formalisme », excroissance de la façon originelle de poser le problème de la Théorie de la démonstration. En particulier, pour apprécier la fécondité méthodique de la Théorie de la démonstration, nous n'avons pas besoin de la conception qui voudrait égaler purement et simplement les théories, dès lorsque qu'elles sont soumises à formalisation symbolique (pour servir le but de la Théorie de la démonstration), au schéma de leur formalisme symbolique et les considérer, par conséquent, comme un simple appareil technique.

129- La mathématique comme familière et inconnue à la fois (1955)

130 Apparition du formalisme

au commencement de l'époque moderne […, l]a nature, mathématiquement structurée et dominée par les formes de notre intuition, gagna le caractère de ce qui est nous familier.

132 Confusion des caractères intuitif & formel de l'objet

Récemment, Monsieur Heyting a discuté la situation de la recherche sur les fondements des mathématiques dans son exposé au Congrès de Bruxelles. Il en vient là à parler de la question de l'objet de la Mathématique ; à son avis, cette question n'aurait pas reçu de réponse satisfaisante pour la Mathématique classique (*i.e.* pour la Mathématique développée au XIX[e] siècle). Il en voit la raison dans le fait que dans la Mathématique classique éléments intuitifs et éléments formels sont combinés sans être clairement distingués. Par ailleurs, il lui semble que faire ressortir plus nettement les deux aspects, comme y parviennent l'intuitionnisme de Brouwer pour l'aspect intuitif, la théorie hilbertienne de la démonstration pour l'aspect formel, ne suffit pas à épuiser le débat avec la problématique épistémologique actuelle, et il voit en cela un indice du fait que la question de l'objet est mal formulée et doit être remplacée posée en termes plus adéquats.

Nous pouvons assurément approuver ce constat.

132 Compromis intuitif & formel

pas besoin de considérer comme un défaut le mélange d'éléments intuitifs et formels dont Monsieur Heyting a relevé la présence dans la Mathématique classique. Souvent, le rôle d'importantes élaborations conceptuelles et méthodiques consiste précisément à fournir un compromis entre visées intuitives et visées théoriques formelles.

132-3 À la conquête de l'évidence idéele

Nous devons comprendre clairement que déjà dans la Théorie des nombres finitiste nous ne nous trouvons plus dans le domaine du concret, au sens propre ; les grands nombres ne peuvent plus, en effet, être présentés dans la représentation ou la perception. En particulier, du point de vue d'une considération limitée au concret proprement dit, le sens d'un énoncé universel portant sur des nombres quelconque n'est pas évident. […]

[…] Que cette représentation de la suite infinie des nombres soit réalisable ne va absolument pas de soi au prime abord, et c'est seulement sur la base de l'expérience mentale du succès que se construit ici un sentiment de familiarité, et même de naturalité, en tant qu'**évidence conquise.**

La philosophe des mathématiques tend le plus souvent à substituer à une évidence conquise de cette sorte une évidence *ab ovo*. Ce qui entraîne soit à étendre exagérément l'évidence dans le but d'inclure tous les degrés éventuellement atteints – mais cela conduit aux antinomies –, soit à poser comme absolu un degré déterminé d'évidence, ce dont résulte **une exigence de restreindre la Mathématique** et cela **d'une manière telle que nous perdons inutilement la liberté de décision de l'esprit**.

Nous pouvons échapper à ces inconvénients, si nous renonçons à considérer la Mathématique comme une chose allant de soir pour elle-même. Le facteur de familiarité que nous trouvons dans les domaines mathématiques, en particulier dans la Mathématique élémentaire, est une familiarité conquise. Certes la Mathématique est, par excellence, un concevoir [*ein Begreifen*] mais non quelque chose de conçu [*etwas Begriffenes*]. La possibilité d'extrapoler avec succès des lois mathématiques rigoureuses à partir des relations de nombres et de figures prolongeables dans la représentation est, au fond, aussi peu naturelle que la possibilité de découvrir des lois physiques de la nature.

134- Réalité mathématique ? Pas si simple…

il n'est guère pertinent [de penser] que le moment du mathématique n'intervient dans la considération de la nature que par la forme [*Art*] de notre pouvoir de représentation intuitive. Nous pouvons sûrement reconnaître que l'univers mathématique s'oppose à nous comme un domaine phénoménal*, de telle sorte que l'on peut parler à propos de la la Mathématique d'une phénoménologie de l'esprit, en un sens modifié de l'expression hegelienne. Ce [domaine] phénoménal dépasse certainement ce que nous pouvons accepter comme inscrit de prime abord dans l'individu, ne serait-ce que parce qu'il s'agit de quelque chose d'ouvert structurellement. Si l'on parle d'« esprit », d'« entendement » ou de « forme de l'intuition » comme de quelque chose qui dépasse la constitution psychique concrète, alors il n'y a plus aucune différence évidente entre ce qui appartient au sujet et n'importe quel élément de l'ordre du monde. [**commentaire* : *cf.* Alain Connes & la « matière » mathématique]

La spéculation philosophique sur la Mathématique conduit effectivement à de si hautes sphères. Si nous ne considérons pas la Mathématique du point de vue de l'usage immédiat, où elle crée pour nous l'épreuve du familier et de l'évidence, et si nous voulons nous occuper philosophiquement de ses raisons, alors nous ne sommes, ma foi !, pas autorisés à nous faire de la Mathématique une représentation trop simple.

135-140 Considérations sur le paradoxe de Thoralf Skolem (1957)

139 L'infini indénombrable ne peut être exhibé

Le relativisme ne veut certainement pas dire que, dans *un* cadre ensembliste le continu est établi comme non dénombrable et dénombrable dans un *autre* cadre. La discordance consiste seulement en ce que la totalité des choses qui, dans un système ensembliste, représente par exemple l'ensemble des parties d'ensembles de la suite des nombres, peut être dénombrable dans un système plus vaste ; mais alors cette totalité ne fonctionne plus comme représentation dudit ensemble des parties d'ensembles et demeure alors aussi l'impossibilité d'appliquer biunivoquement les nombres sur les ensembles de nombres. Ainsi, en dépit de la relativité des concepts ensemblistes, les théorèmes de puissance de la théorie cantorienne des ensembles restent invariants par rapport au cadre axiomatique.

On doit certes avouer que cette relativité nous rend plus fortement conscients du fait que les puissances [les cardinaux] supérieures dans la Théorie des ensembles sont pour ainsi dire visées seulement, mais non construites à proprement parler. En ce sens, une certaine impropriété est attachée aux graduations de l'échelle des puissances.

La prise de conscience de cet état de choses est plus souvent exprimée en déclarant que dans la « réalité effective » [*Wirklichkeit*] tout en Mathématique est dénombrable. Cette formulation est toutefois trompeuse dans la mesure où elle ne tient pas compte du fait essentiel, qui se manifeste tant dans la Mathématique opératoire que dans la considération de systèmes formels d'axiomes, à savoir que la pensée mathématique va principiellement au-delà de tout système dénombrable.

141-62 Considérations sur les *Remarques sur les fondements des mathématiques* de Ludwig Wittgenstein (1959)

158-9 Arithmétique finitiste utilise une part d'idéal

Occasionnellement, Wittgenstein pose la question de savoir si un calcul qui réussit dans le système décimal est également valide pour comparer des nombres à l'aide de la représentation directe par des suites de traits. Cette questions trouve sa réponse dans la fondation de la méthode de calcul avec des chiffres décimaux. Du reste, Wittgenstein touche ici à quelque chose de fondamental : les démonstrations pour justifier les règles du calcul décimal reposent en effet, quand elles sont faites de manière finitiste, sur l''hypothèse que tout nombre que nous voulons construire dans le système décimal peut également être obtenu par le mode direct d'écriture et que sur les suites de traits on peut également toujours effectuer les opérations d'addition, etc., ainsi que les comparaisons. Cela montre que même l''Arithmétique finitiste n'est pas « concrète » au plein sens du terme, mais recourt à des idéalisations.

193-8 Remarques pour la philosophe de la mathématique (1969)

197-8 Conclusion : intuition, concept, certitude, expérience

Les développements précédents recommandent pour la philosophe des Mathématiques les points suivants, qui ont aussi leur importance pour l'épistémologie générale :

1. […] Dans l'idéalisation, l'intuitif entre en contact avec le conceptuel. (Il n'est donc certainement pas adéquat d'opposer violemment intuitivité et conceptualité, comme cela est fait dans la philosophie kantienne).

La signification de la Mathématique pour la Physique théorique consiste en la représentation approximative des processus de la nature par des objectualités mathématiques.

2. Différencier la Mathématique de la recherche empirique ne dit pas que nous avons en Mathématique une connaissance d'emblée assurée (*a priori*). Il apparaît nécessaire de concéder que même dans les domaines mathématique nous devons apprendre et avoir une expérience *sui generis* (nous l'appellerons « expérience spirituelle »). La rationalité mathématique n'éprouve aucune rupture. Au contraire, il apparaît comme un préjugé de présupposer que nécessairement rationalité doive être liée à certitude. De connaissance plus sûre, au sens simple et plein du terme, nous n'en avons presque jamais. C'est la vieille idée socratique, qui est revalorisée aujourd'hui, en particulier dans les philosophies de F. Gonseth et K. Popper.

Il faut certainement accorder que nous possédons une sorte particulière de certitude dans la réflexion mathématique, la réflexion mathématique élémentaire en particulier ; car là, les objets sont d'une part clairs intuitivement et d'autre part l'idéalisation dépouille à peu près l'objectualité de tout ce qui peut conduire à la subjectivité. – Mais si nous parlons, au sens populaire, de la certitude que 2+2=4, c'est que nous pensons aux applications concrètes de cette proposition. L'application de propositions arithmétiques au concret repose sur des conditions empiriques, pour la satisfaction desquelles nous n'avons aussi qu'une **certitude empirique**, même si **pratiquement** elle est suffisante.

Si nous laissons tomber le couplage de la rationalité et de la certitude, nous gagnons, entre autres, **la possibilité d'apprécier la *rationalité heuristique***, dont le rôle dans les science est essentiel.

La reconnaissance de la rationalité heuristique fournit en particulier la solution de la difficulté épistémologique élevée au rang de problème par David Hume : nous pouvons reconnaître le caractère rationnel de la supposition de connexions nécessaires dans la nature, sans devoir affirmer que l'ajout de telles connexions garantisse le succès ; **pour ce succès nous sommes**, en fait, **renvoyés à l'expérience**.

199-210 La correspondance schématique et les structures idéalisées (1970)

203 Schémas & Mathématique

Il y a une sorte de relation réciproque entre le concret et les schémas, dans la mesure où d'un côté les schémas ne présentent en général le concret qu'approximativement, et où d'un autre côté les schémas ne sont en général réalisés qu'approximativement par des objets concrets.

Dans cette relation réciproque s'exprime le fait que nous avons devant nous dans les schémas une objectualité *sui generisi*, l'objectualité du *Mathématique*.

La Mathématique, en général, peut être comprise comme la théorie des schémas selon leur facture interne.

211-0 Symposium sur les fondements des mathématiques (1971)

211 Brouwer nomme !

trois directions désignées – à la suite de L. E. J. Brouwer – par les noms de « logicisme », « intuitionnisme », « formalisme ».

213 Supercherie de la théorie des modèles

Un grand domaine de recherches Métamathématiques sans restriction méthodique fut, [après quelques considérations très fécondes pour la Mathématique auquel le théorème de complétude de Gödel donna lieu], ouvert par la théorie des modèles, cultivée par Tarski et son École, et bientôt élargie en une théorie des systèmes de relations. Ces recherches font intervenir de manière forte des concepts **ensemblistes**, en particulier ceux de nombres transfinis ordinaux et cardinaux, et cela non seulement dans les méthodes de démonstration mais aussi dans la détermination des objets à étudier. Ainsi on explora des langues formelles contenant des noms pour une infinité d'individus, et même pour des totalités d'individus de cardinalités transfinie arbitrairement grande. On considéra également des formules propositionnelles de longueur infinie.

217-8 De l'objet mathématique

il n'y aucun obstacle de principe à reconnaître aux objets mathématiques une objectualité *sui generis*. Cette objectualité est celle des structures idéalisées, l'idéalisation consistant en une médiation entre concept et intuition. […]

Beaucoup de philosophes et de mathématiciens sont choqués par cette reconnaissance d'une objectivité spécifique des objets mathématiques, par ce « platonisme », mais cela vient en grande partie de ce qu'on imagine cette objectivité dans une large mesure analogue à celle de la réalité effective naturelle.

R. L. Goodstein a, dans son article « Empiricism in mathematics », souligné expressément et rendu clair le fait que les objets et états de choses mathématiques ont principiellemment un autre caractère que celui des objets et états de la science de la nature.

219 Finitisme hilbertien & intuitionnisme

Dans ses « Two notes on the foundations of set-theory », Kreisel débat avec toux ceux qui rejettent en général la Théorie des ensembles […]. L'enthousiasme illimité qu'il représente n'est pas chez lui, comme chez certains théoriciens des ensembles, lié à une faible estime pour le point de vue constructif. Au contraire, Kreisel entre en détail dans la Mathématique finitiste et la Mathématique intuitionniste, à la recherche d'une caractérisation plus exacte de ces deux disciplines.

220 Axiome fondation

L'idée de l'axiome de fondation revint, en premier lieu, à D. Miriamanoff, qui trouva là-dessus (à peu près en même temps que Zermelo et von Neumann) la théorie indépendante des nombres ordinaux.

231 Démo 2^e théorème Gödel est *directe*

la démonstration de Gödel de l'indérivabilité de sa proposition n'est pas du tout indirecte. Un procédé est donné permettant, pour un système formel *F* satisfaisant certaines conditions préliminaires, de dériver, à partir de la production d'une démonstration de contradiction de *F* effectuée dans *F* lui-même, une contradiction dans *F*. Les conditions préliminaires auxquelles doit satisfaire *F* concernent la capacité d'expression, la force déductive et le caractère strictement formel. En revanche, on n'utilise pas l'hypothèse que le système *F* est non-contradictoire. C'est seulement par contraposition ultérieure que, dans le cas où le système *F* est non contradictoire, il suit qu'il n'est pas possible d'exhiber une preuve effectuable de la non-contradiction de *F* dans le cadre de *F*.

Cependant, le résultat peut être obtenu sans appliquer cette contraposition. Si un système formel *F* satisfait les conditions mentionnées, alors à partir d'une démonstration de non-contradiction de *F*, fait dans *F* lui-même, on dérive une contradiction dans *F*.

233 INEXHAUSTABILITÉ DE LA CRÉATION CONCEPTUELLE

que la Mathématique, dans la potentialité de ses constructions conceptuelles, n'est épuisée par aucun système formel […] et que la Théorie axiomatisée des ensembles ne peut pas complètement remplacer la manipulation intuitive de représentations ensemblistes comme méthode de notre pensée. [Fin de l'article]