Université Paris I Panthéon–Sorbonne
UFR de Philosophie

2014-2015

De la non-certitude en mathématique
La philosophie idoine de Ferdinand Gonseth

Marc Sage

Sous la direction de
Monsieur Marco Panza

Master 2 LoPhiSC

7 septembre 2015

Remerciements.

Nous tenons à remercier notre directeur Marco Panza qui nous a bien volontiers accordé son temps, sa culture, et mis généreusement à notre disposition ses exemplaires personnels des ouvrages de Gonseth. Des horizons se sont ouverts grâce aux références qu'ils nous a indiquées – qu'aurions-nous pu espérer retirer de mieux de notre travail ?

Nous voudrions également remercier David Waszek pour les riches échanges et discussions que nous avons eus pendant cette année initiatique.

Typographie.

Toutes les **mises en police grasse** sont de notre fait et dénotent une mise en emphase. Nous éviterons ainsi au lecteur la question récurrente « L'emphase est-elle *déjà dans le texte cité* ou bien a-t-elle été *rajoutée par le citateur* ? ».

Les guillemets anglais " " dénoteront une "façon de parler" ou une mention-étiquette, ceux français « » une citation (même de l'intérieur de son auteur, « comme une pensée que l'on n'aurait point encore formulée »).

Nous tacherons de respecter autant que possible la typographie des ouvrages cités (choix des guillemets, absence d'accents sur les majuscules, minuscules des noms propres).

Afin d'alléger les notes de bas de page, les sauts de lignes qui devraient y figurer ont été systématiquement remplacés par des alinéas.

Table des matières

0 Introduction

La grande égalité des enfants face à l'enseignement, c'est celle des traumatismes qu'on leur inflige. Les inégalités, elles apparaissent dans la possibilité qu'ils ont de les encaisser. Mais est-il bien nécessaire de pratiquer la sélection par la destruction du sens dans l'œuf ?

Stella BARUK, *L'âge du Capitaine* (1985)

La lutte contre l'idée fausse, si prompte à se glisser dans un tel enseignement, sera [...] le constant souci du maître.

Pierre DUHEM, *La théorie physique – son objet, sa structure* (1906)

Nous enseignons la mathématique et l'avons quelque peu pratiquée. C'est cette expérience de pratique et d'enseignement mathématique qui motive le travail qui suit : comment accorder l'enseignement que nous avons reçu avec notre pratique ? Comment permettre à d'autres personnes de découvrir et d'avancer sur ce territoire dont nous avons reçu quelque carte et parcouru quelques régions ?

Quelle est la signification et la légitimité des savoirs mathématiques ? Comment s'insèrent-ils dans notre connaissance du monde phénoménal ?

Frédéric PATRAS, *La pensée mathématique contemporaine* (2001)

Toute personne enseignant la mathématique devrait (selon nous) questionner sa discipline :

1. son *interlocuteur* (à *qui* s'adresse-t-elle ?) ;
2. son *objet* (de *quoi* parle-t-elle ?) ;
3. son *discours* (*comment* en parle-t-elle ?) ;
4. sa *légitimité* (*pourquoi* peut-elle en parler ainsi ?) ;
5. ses *fondements* (*sur quoi* repose-t-elle ?) ;
6. sa *place scientifique* (*quel "réseau"* déploie-t-elle au sein de la science ?).

Le programme est vaste et il n'est pas question d'espérer le cerner ni d'en faire le tour. Nous questionnerons particulièrement trois implicites de la mathématique enseignée – et parfois ainsi pratiquée :

1. la mathématique traiterait d'objets purs (détachés du matériel) ;
2. la mathématique porterait la vérité absolue (immuable) ;
3. la mathématique raisonnerait de façon parfaite (certaine).

Au-delà des aspects psychologique et didactique – dont nous n'aborderons pas l'importance colossale dans la constitution d'une connaissance chez un individu –, notre conviction est que l'enseignant doit prendre conscience des présupposés qu'il véhicule, afin de décider en pleine connaissance de cause de la marque qu'il imprimera sur ses élèves (nous parlons ici d'êtres humains) et ce d'autant plus dans une discipline dont la rigueur est souvent prétendue "universelle" et garante de "certitude". Une analogie religieuse permettra d'imaginer facilement les dégâts que pourraient causer des dogmes – surtout implicites – appris, répétés et enseignés sans approfondissement, sans compréhension, sans respect de l'intégrité de l'être humain (et, partant, de la doctrine suivie). Notre détour par les religions est à dessein : la violence des polémiques les concernant est à la hauteur de celle que réveille en nous le contact avec des élèves brisés par des vues "philosophiques" les ayant conduits à renoncer au sens.

Il suffirait d'évoquer deux domaines élémentaires de la mathématique – l'arithmétique et la géométrie – pour se rendre compte de la teneur de notre programme. Que sont donc ces "objets" – nombres, points, droites – dont parlent les énoncés de ces mathématiques "premières" ? Quelle est donc cette "vérité" qui distingue certains énoncés (« $2+3=5$ », « les deux seules puissances consécutives sont 8 et 9 », « les suites de GOODSTEIN tendent toutes vers 0 », « un triangle ayant deux bissectrices de même longueur est isocèle », « la somme des angles d'un triangle fait un plat ») des d'autres (« $1+1=3$ », « les nombres de FERMAT sont premiers », « tout triangle est isocèle », « la diagonale d'un carré rapportée à son côté est rationnelle ») ? Comment nous, êtres humains, pouvons-nous établir la "vérité" ou la "fausseté" de tels énoncés ? Et, englobant le tout, comment ces domaines s'insèrent-ils dans notre connaissance de notre environnement ?

4.112
Le but de la philosophie est la clarification logique des pensées.

La philosophie n'est pas une théorie mais une activité.

Une œuvre philosophique n'est pas de produire des « propositions philosophiques », mais de rendre claires les propositions.

La philosophie doit rendre claires, et nettement délimitées, les propositions qui autrement sont, pour ainsi dire, troubles et confuses.

Ludwig WITTGENSTEIN, *Tractacus Logico-Philosophicus* (1922)

Nous nous proposons dans un premier temps d'étudier l'apport fondamental (et semble-t-il peu connu) de Ferdinand GONSETH à ces questions.

Deux ouvrages, *Les fondements des mathématiques* [Gons1926] et *Les mathématiques et la réalité* [Gons1936], traitent globalement des mathématiques. Nous nous concentrerons sur le plus récent qui nous parait contenir et dépasser son cadet – notre discours sera de fait parsemé de notes [1] référant à [Gons1926] (ainsi qu'à [Gons1937]), visant à étayer les propos de [Gons1936]. Nous suivrons paragraphe après paragraphe la démarche de GONSETH, consacrant une sous-section à chacun des dix-huit chapitres.

Un autre travail, *La géométrie et le problème de l'espace* [Gons1945-55], se concentre sur la géométrie, étudiant le problème de (la connaissance de) l'espace. Mais c'est bien le problème plus général de la connaissance dont il traite, la géométrie n'étant qu'un archétype des processus mis en jeu lors de la constitution de cette dernière. Une deuxième partie (plus courte, vu les redondances) lui sera consacrée, chaque sous-section reprenant l'un des six tomes.

Dans un second temps, nous exposerons nos vues personnelles. Nous n'aurons pas le temps de développer chaque apport autant que nous le ferons pour notre première partie mais n'hésiterons pas pour autant à proposer une synthèse nôtre de nos recherches à travers les écrits de – outre bien évidemment Ferdinand GONSETH – Itsuo TSUDA, Henri BERGSON, Ludwig WITTGENSTEIN, Pierre DUHEM, David HUME, Maurice CAVEING, Gaston MILHAUD, Hans HAHN...

La citation du *Tractacus* donne le ton de notre démarche : plutôt que de bâtir une nouvelle "théorie", nous souhaitons épurer celles déjà en vogue. Plutôt que de rajouter, nous souhaitons démystifier. L'œuvre de GONSETH montre à quel point cela est nécessaire – et la méconnaissance de cette œuvre à quel point il est nécessaire *aujourd'hui* de poursuivre ce travail.

Tirons à présent le fil directeur de notre mémoire.

GONSETH dégage une *connaissance primitive* [2], sommaire, pratiquement assurée et inachevée. Il y fonde *la genèse de notre connaissance abstraite*, idéale, celle justement dont nous disions vouloir questionner en mathématique trois implicites, dénonçant ainsi *le mythe d'une sphère idéale préexistante* qui viendrait se réaliser ici-bas :

> [les lois primitives] sont pratiquement infaillibles dans leur domaine naturel de validité. Par une pente qui lui est, semble-t-il, naturelle, l'esprit imagine une infaillibilité absolue, une adéquation sans réserves à des réalités déterminées une fois pour toutes jusque dans leur essence... et en fait les attributs d'une vérité idéale. C'est alors elle qu'il voit réalisée, plus ou moins parfaitement, dans tous les cas concrets. [Gons1936] §82

À ce stade, tout est déjà dit et nos questionnements trouverons une réponse immédiate en la déchéance de ces *trois dogmes du platonisme* [3]. Mais laissons nos coquillages platoniciens se faire engloutir par les flux gonsethéens et continuons à observer ce qu'imprégnera la marée montante [4].

1. D'autres notes pourront signaler un écho avec d'autres auteurs que nous avons rencontrés, préparant ainsi le terrain pour notre troisième partie, plus personnelle.
2. GONSETH dira « intuitive ». Nous préférerons dans l'exposé de nos vues personnelles éviter le champ lexical – par ailleurs trop vaste – de l'intuition car seul compte pour nous le caractère *premier* de cette connaissance.
3. nous reconnaissons ici la marque profonde qu'a laissée sur nous la lecture des *Deux dogmes de l'empirisme* de W. QUINE (sur lesquels nous reviendrons section 3.4)
4. L'image est un souvenir d'une lecture de feu Alexandre GROTHENDIECK, qui nous a quitté il y a bientôt un an.

La genèse dont nous parlions, l'abstraction, s'opère suivant un mode *schématique* (penser au schéma des techniciens ou à la carte d'une forêt), à l'image de notre connaissance primitive : un schéma est *imparfait*, *efficace* et *en devenir*. Ce n'est pas autrement que *nous construisons* et explorons la réalité, qu'elle soit mathématique ou d'un autre ordre : par *schématisations* successives d'une signification extérieure/antérieure (l'ambigüité est pertinente). Le schéma constitue ainsi un *horizon de réalité* – mais également un *horizon de connaissance* : connaître, *c'est* construire la réalité, dans une dialectique de tels horizons successifs [5] qui reconstituent ainsi le contenu de notre intuition.

Une pré-schématisation constitue notre sphère primitive, la première schématisation notre sphère idéale (ou abstraite), la deuxième aboutit au *formalisable*, dans lequel la démarche axiomatique déploie toute sa puissance. Ici érigerons-nous un pont vers Pierre DUHEM : l'auteur de *La théorie physique – son objet, sa structure* nous décrit comment la physique est *modélisée* par la mathématique, la question de la "vérité" d'une théorie physique revenant *in fine* à son *idonéité* (hommage gonsethéen). Ce problème de la "fidélité" de la traduction du physique au mathématique, de la *concordance schématique* (pour reprendre les termes de GONSETH) est simple et central. Sa résolution ne l'est pas moins : ce principe de concordance *est lui-même idoine*, sa validité étant *consacrée par l'expérience (vécue)* – sans qu'il soit nécessaire (ni même sensé !) d'en chercher une explication. Ici même HUME se trouve pleinement réhabilité.

Notre remarque est la suivante : DUHEM *s'applique à lui-même*. La mathématique modélisante est *elle-même modélisée* par un formalisme dont les schémas axiomatiques constituent la "réalité mathématique", la sphère primitive de GONSETH permettant de fonder le jeu symbolique. Quant à la sphère idéale, ce contenu de l'intuition mathématique, nous résumerons ainsi chacun de ses objets : *être dispensable, fiction indispensable*. Tiens, un coquillage... ne l'avions-nous pas abandonné au gré des flots ? Si nous refusons une vaine ontologie à l'objet mathématique, nous lui reconnaissons toute sa *vivance*, tout ce qu'elle *anime* en le mathématicien, lui permettant ainsi de *vivre pleinement* sa discipline.

Pour ceux et celles qui interrogeraient le premier titre de ce mémoire, l'hommage est à WITTGENSTEIN. Cette sphère primitive de GONSETH, il l'a – à nos yeux – creusée plus profondément que quiconque. Et ce qu'il a trouvé, ce qu'il décrit par brefs éclairs dans *De la certitude* – des éclairs qui permettent d'entrevoir au-dessus des nuages [6] –, nous ne saurions autrement le désigner : c'est la vie. Cette vie qui *agit* et qui *connaît pour agir* [7], comme nous le décrivent si bien TSUDA et BERGSON avec qui nous engagerons notre dernière partie pour remonter le fil qui précède et engendrer les sphères primitive et idéale. Tiens, un autre coquillage... Si la certitude mathématique a été déchue par GONSETH, c'est pour redevenir *vivante*. Ainsi la négation de notre premier titre.

---

5. Le cas du problème de l'espace aborde un horizon d'un autre "type", celui de l'*expérimental*. Comme nous le signalerons (section 2.2), nous voyons ce dernier comme un prolongement du primitif et nous pensons plus clair d'opérer une synthèse dialectique de ces deux aspects *avant de* considérer un quelconque autre horizon.

6. au-dessus des nuages, il y a *tenshin*, cœur de ciel pur [Tsud1973] p. 174

7. nous proposons en annexe un peu de *reverse mathematics* pour illustrer le nombre comme fondement de notre action itérative

1 *Les mathématiques et la réalité* (commentaire suivi)

> La mathématique, dit-on parfois, est la seule science dont les lois sont vraies d'une façon absolue. Mais, d'autre part, la nécessité inhumaine et presque divine de ses conclusions, en fait une science en quelque sorte étrangère à l'homme. La réalité, nous l'avons vu, est complètement différente. Dans son essence, la mathématique n'est qu'un ensemble de vues et de procédés schématiques de notre esprit, réplique consciente de l'activité inconsciente qui crée en nous une image du monde et un ensemble de normes selon lesquelles nous agissons et réagissons. Non pas édifice ancré quelque part avec une solidité absolue, mais construction aérienne, qui tient comme par miracle : la plus audacieuse et la plus invraisemblable aventure de l'esprit. [Gons1926] §56

Ainsi GONSETH concluait-il ses *fondements des mathématiques*. Le ton démystificateur est donné : la mathématique est une activité reproduisant les processus par lesquels nous construisons notre monde et agissons dans ce monde. Le point de départ n'est donc pas quelques cieux platoniciens mais *notre activité humaine*[8].

> La « crise actuelle des mathématiques et de la logique » est au fond une crise de l'idéal platonicien dans les dernières positions qu'il occupe. Désire-t-on vraiment la dénouer : c'est aux bases mêmes qu'il faut toucher. **Il faut faire le sacrifice des notions que nous avons dites « éternellement fixées », des concepts « préalablement et exactement délimités » pour leur substituer les concepts « en devenir » et « ouverts vers leur avenir »** §8

L'expression « en devenir » est une marque typiquement gonsethéenne, nous la retrouverons à travers toute son œuvre.

Remontant l'évolution (la "devenance"), peut-on isoler un commencement ?

1.1 La connaissance intuitive : sommaire, inachevée, efficace

Dans son premier chapitre, GONSETH expose, à défaut d'un commencement, un stade embryonnaire : nous possédons une connaissance « intuitive » et portons des jugements « intuitifs », lesquels sont *sommaires* et *pratiquement sûrs* :

> L'affirmation :
>
> *b)* Il faut tenir pour existante et pour efficace une certaine concordance entre nos idées et les choses qu'elles ont pour objet
>
> n'implique [...] pas que notre connaissance des idées, des choses et de leur adéquation réciproque ait dépassé le stade embryonnaire où la convenance (même relative) et le succès (même provisoire) sont les seuls critères. Nous acceptons que cette connaissance soit encore sommaire. Que nous ne sachions nous en faire encore qu'une image informe et sans contours définis. Qu'elle soit provisoire et rien de plus qu'une ébauche encore inachevée.
>
> Mais nous affirmons en même temps que **les premières assises de toute notre connaissance ont un caractère analogue. Et si, pour commencer, nous faisons appel à ces notions grossières et primitives, à ces idées d'une justesse sommaire, à ces connaissance toutes brutes et d'une exactitude abrégée, c'est que nous voulons garder le contact le plus étroit possible avec les faits dont nous sommes *pratiquement sûrs*. Leur « contenu de réalité » est suffisamment dense pour que, si on ne les emploie pas en dehors de leur cadre naturel, leur interprétation et leur signification soient pratiquement immédiates.** §3

Ce stade embryonnaire, qu'il serait vain de vouloir cerner[9], permet à la connaissance d'évoluer, de récolter des vues sur le monde (nécessairement provisoires) :

8. j'écris consolé « Au commencement était l'action. » [Witt1949-51] 402

9. on cherche là quelque chose qu'on ne pourra jamais trouver parce qu'à cet endroit il n'y a rien, et tout se perd, devient confus et vague, dégénère en un jeu de cache-cache. [RivRou1990] p. 226. Ainsi s'exprimait HILBERT à FREGE au sujet de la définition de « point » géométrique. Sa description de cet endroit où il n'y aurait rien nous paraît très bien décrire la sphère intuitive de GONSETH (bien que les caractères qu'il dépeint le conduisent au contraire à disqualifier une telle sphère).

> Tout cet amas de connaissances fondamentales et imparfaites ; toutes ces vues justes, mais seulement de façon approchée ; toutes ces idées inachevées sur lesquelles s'exerce notre activité mentale, nous voulons les appeler les *éléments de la connaissance intuitive.*
>
> [...]
>
> que la « sphère de l'intuitif » n'est pas étroitement délimitée ; qu'on ne sait pas exactement où elle s'arrête et tout ce qu'elle embrasse
>
> [...]
>
> la définition de l'intuitif qui précède doit être considérée comme une définition modèle. Car toute son imprécision ne l'empêche pas d'être opérante, adéquate, efficace, — entre certaines limites naturellement. **Et nous n'en exigeons pas davantage**.
>
> [...] Il ne s'agit plus de savoir si les notions et les jugements que je viens d'appeler intuitifs ont un sens plein. C'est en quelque sorte leur nature qui est maintenant en question. Je ne puis me les représenter que comme *des ébauches encore en* ***constant état de devenir***, tandis que Parfait[10] ne se les imagine qu'appuyées sur des concepts immuablement fixés. [...] En un mot : ***Pour être effective, la connaissance n'a pas besoin d'être portée à la perfection dans aucune direction.*** §5

L'*accès* à cette connaissance, lequel nous pourrions qualifier de "démonstration", est tout éloigné de l'idée qu'aurait un mathématicien, car est avant tout – et il ne pourrait en être autrement – *pratique* :

> On démontre le mouvement en marchant. **Démontrer, c'est rassembler les éléments de la certitude pratique** (même en n'excluant pas la possibilité de circonstance singulières où elle pourrait être démentie). Et c'est dans ce sens que nous invoquons le témoignage des faits.
>
> [...] *nous savons que nos idées sur le monde est objets physiques méritent d'être crues.* Elles nous trompent rarement si nous n'en forçons pas la portée.
>
> [...]
>
> nous ne sommes pas sans savoir quelque chose de notre propre connaissance des choses
>
> [...]
>
> **La connaissance positive est celle qui**, informant nos pensées et nos actions, **ne se voit pas démentie par le développement des pensées et les conséquences des actions**. Même si le succès n'est que relatif, et que des circonstance nouvelles ou imprévues le remettent toujours en question §6

La question – inévitable – de l'objectivité de ces jugements intuitifs est également posée et se résout dans une perspective *pratique*[11] :

> pratiquement, le sens du mot « objectif » s'épuise dans le fait que le jugement qualifié d'objectif n'est pas démenti par le déroulement des circonstances ultérieures.
>
> PARFAIT. — Et toute votre démonstration, dans le cas des jugements [qui ont pour objet les notions et les jugements de la sphère intuitive] consiste à dire : « Le signe de leur objectivité, c'est le sentiment de sécurité qui accompagne leur constante intervention... »
>
> IDOINE. — Parce que ce sentiment me garantit que les jugements en question ne tombent en général pas à faux. Et **c'est là, au fond, tout le sens pratique de l'objectivité d'un jugement**.
>
> [...] Vous avez réalisé comment l'idée d'objectivité peut être prolongée et étendue par un emploi extensif du mot objectif, emploi qui doit rester plus ou moins conforme aux significations primitives et restreintes, mais qui pourra peut-être aussi réagir sur ces dernières. Or **cette puissance de devenir, cette faculté d'être constamment projetée au delà et en avant de sa signification présente, vient s'intégrer dans l'idée d'objectivité**. Elle en devient un des éléments essentiels ; elle fait partie de sa « substance significative ». (**Et tous les concepts sont plus ou moins soumis à la même loi d'extension.**) §7

---

10. le livre suit l'évolution de trois personnages qui se mettent occasionnellement à dialoguer : Parfait le platonicien, Sceptique l'anti-philosophie et Idoine le gonsethéen.

11. ce sont les techniques de l'expérimentation et de la pensée rationnelle qui ont forgé le concept « objectif » ; elles en jugent aussi en dernière instance. [...] l'opposition de l'objectif au subjectif n'est jamais complètement achevée ; qu'elle est **en devenir** sous la poussé d'une réflexion critique inséparable de toute activité scientifique [...] « Nous rencontrons l'élément objectif quand il y a un **accord de prévisions**, quels que soient les moyens employés par une ou plusieurs personnes pour les acquérir. « L'élément subjectif apparaît dans la **pluralité de** ces **moyens** possibles. [...] Ramassons dans un jugement les résultats de cette discussion ! [. . .] **Pour connaître, il faut insérer les nécessités subjectives dans les nécessités objectives**. [Gons1937] §34 §37

Au milieu de ce dernier §7, GONSETH expose, en lien avec le langage, des vues qui ne sont pas sans rappeler celles du contemporain WITTGENSTEIN :

> un mot peut être légitimement employé en faisant voir que les circonstances existent où je puis l'employer conformément à sa signification. Et ceci pour l'excellente raison que **sa signification est en définitive fixée par les modalités de son emploi**[12]. *C'est parce qu'on l'emploie comme on l'emploie qu'il a la signification qu'il a*[13] *!* §7

Revenant à l'objet de son livre, GONSETH nous rappelle que les notions mathématiques tombent dans le cadre préliminaire qu'il vient d'exposer et que la mathématique constitue « le terrain naturel de [sa] discussion » :

> Les notions mathématiques sons souvent considérées comme le type même des notions définitivement arrêtées et parfaitement délimitées. Or [...] c'est là une idée fausse ou du moins beaucoup trop sommaire. L'une des propriétés naturelles de l'objet mental « concept » est d'être essentiellement en état de devenir. §9
>
> *toute* analyse un peu approfondie des rapports du réel et du rationnel doit tôt ou tard toucher au problème de l'application des mathématiques aux sciences physiques et naturelles. §10

Si GONSETH développe longuement la connaissance intuitive, c'est qu'elle fait partie des implicites que l'on aurait facilement tendance à oublier – pourtant, sans elle, que pourrait-il bien émerger[14] ? On se fourvoierait lourdement à sous-estimer l'importance de la mise à jour par GONSETH de cet implicite – aussi simple fût-il.

Un autre type de connaissance, dite *empirique*, vient prolonger l'intuitive. Elle s'en distingue en cela que le sujet prend une part *active* dans sa constitution : c'est la démarche expérimentale, limitée aux instruments « intuitifs ». Elle peut réviser la connaissance intuitive et reste ainsi tournée vers le concret.

Une deuxième connaissance, dite *rationnelle*, est à mettre en regard de l'intuitive-empirique : elle se rapproche bien plus de celle dont la tradition mathématique se réclame, tournée vers l'abstrait.

Se pose alors d'elle-même la question de la *réconciliation* de ces connaissances : en d'autres termes, comment retrouver l'unité de cette connaissance tripartite ? Il est temps de rappeler le sous-titre de ce livre : *Essai sur la méthode axiomatique*. GONSETH en appelle ainsi aux *axiomes* :

> Si l'on a compris le rôle et le sens des axiomes, si l'on a réalisé l'intégrité de leurs deux faces, dont l'une regarde vers le concret, tandis que l'autre est tournée vers l'abstrait, on peut [...] poser sur une base commune la connaissance intuitive, la connaissance expérimentale ou empirique et la connaissance rationnelle. §10

Décrire et exposer la méthode axiomatique sera donc au coeur de son travail afin de comprendre quel rôle joue la mathématique dans la connaissance de la réalité.

Ce premier chapitre, intitulé *Explications préliminaires*, nous paraît d'une importance considérable. Plutôt que chercher à partir de concepts "déjà en usage" de chercher à en cerner "le" sens "figé" (objets mathématiques, vérité, loi logique, causalité, universaux...), GONSETH part de l'être humain connaissant par son *action*, à un stade embryonnaire *pragmatique*, et révèle le caractère à la fois sommaire, inachevé et pratiquement infaillible de ces éléments de la connaissance intuitive. Ce ne sera que par une *idéalisation*, une « abstraction » (que GONSETH qualifie de « première *axiomatisation* »), que ces éléments "mouvants" (osons le dire : vivants !) se trouveront projetés dans la sphère abstraite – traditionnellement royaume de la mathématique. Ces abstraits ne se trouveront néanmoins nullement projetés, cristallisés – disons-le : "fossilisés" –, dans des cieux platoniciens où ils pourront se parer de leur toge d'absoluité et se couper ainsi de leurs racines empiriques (le problème de leur *accès* devenant alors critique) : ils continueront à évoluer dans la sphère idéale. En particulier, dès une « seconde[15] axiomatisation » (une *logicisation*, que nous décririons plutôt comme une *formalisabilisation*[16]),

12. Une signification d'un mot est un mode d'emploi du mot. Car elle est ce que nous apprenons lorsque le mot est incorporé dans notre langage. [Witt1949-51] 61

13. Nos paroles acquièrent leur sens du reste de nos actions. [Witt1949-51] 229

14. la philosophie dont il s'agit ici pourrait aussi être appelée : *Systématique de la connaissance préliminaire à toute connaissance scientifique*. [Gons1937] §3

15. GONSETH écrit toujours « seconde » : dans le doute d'un choix stylistique, nous préférons laisser ouverte la possibilité d'axiomatisations ultérieures (une troisième par exemple conduirait aux catégories) et écrire plutôt « deuxième ».

16. qui rend *formalisable* (et non : qui rend *formel*). Le point est d'importance pour ne pas faire de GONSETH un formaliste qui, partant de la sphère intuitive, axiomatiserait des abstraits pour ensuite mieux s'en débarrasser une fois ces derniers formalisés (une position qui plairait *in fine* certainement à Sceptique).

nous pourrons construire des réseaux (formels) prêts à recevoir et faire circuler le sens (le « contenu intuitif »), sans que par ce mot quelque abstrait que ce soit (qui continuerait à évoluer dans la sphère mathématique, à subir des axiomatisations ultérieures) ne soit précisément délimité autrement que par ces canaux formels.

Seront ainsi revues les notions :

1. de *signification*, déjà esquissée dans ce premier chapitre (chapitre II) ;
2. de *réalité*, construction permettant notre action (chapitre III) ;
3. de *nombre entier*, simple propriété physique d'un groupe d'objets (chapitre VI) ;
4. de *loi logique*, émergeant d'une « physique de l'objet quelconque » (chapitre VIII) ;
5. d'*universel*, corrélat d'une « physique intuitive des qualités » (chapitre IX) ;
6. de *vérité*, décrite dans une « Logique élémentaire du Vrai et du Faux » (chapitre XI) ;
7. de *quantification*, surtout universelle, intimement reliée à l'infini (chapitre XII) ;
8. de *causalité*, à travers l'*explication* (chapitre XVI) ;
9. de *déduction* et *démonstration* (chapitre XVII).

> Porterons-nous par là atteinte au prestige justifié de la spéculation mathématique ? Nous ne le croyons pas. Nous avons, au contraire, le sentiment de contribuer à lui rendre la place qu'elle a une fois occupée et qu'elle mérite toujours : au centre même de toute connaissance. §1

1.2 L'efficacité intuitive du langage

> Le problème qu[e le langage] pose à l'esprit est celui de son efficacité.
>
> L'explication la plus naïve consisterait à admettre
>
> « Que derrière chaque substantif il y a un concept bien défini, derrière chaque adjectif une qualité déterminée, derrière chaque verbe une opération précise et invariable, etc. Que ces concepts, ces qualités et ces opérations sont adéquats à certains objets, à certaines façons d'être, à certains liaisons du monde des choses ou du monde de nos pensées. Que grâce à cette correspondance prédonnée entre le réel et le pensé, deux esprits s'accordent parce qu'ils participent tous deux, par l'intermédiaire du langage, à la même réalité. »
>
> Cette façon de voir appelle toutes les réserves et toutes les critiques que nous avons formulées au chapitre précédent : elle suppose que le réel et le pensé se réalisent chacun pour son propre compte et dans son propre plan, jusqu'à la parfaite détermination, et que leur connexion est elle-même prédéterminée. Il est clair que nous ne pouvons l'adopter. Non qu'elle soit absolument sans force explicative : mais elle est trop sommaire et ses faiblesses sont trop évidentes.
>
> Cette première tentative gagne singulièrement en souplesse et en efficacité si l'**on interpose, entre la représentation mentale et la réalité correspondante, une entité abstraite qui doit être conçue par l'esprit et réalisée par les choses**.
>
> Dans cette théorie améliorée, la réalisation mentale de l'entité pourrait être plus ou moins incomplète et la réalisation physique s'affaiblirait alors d'autant, mais ne cesserait pas d'être possible. Ainsi s'expliqueraient, en même temps que le rôle éminemment positif du langage, certaines de ses insuffisances. C'est maintenant sur les termes intermédiaires que doivent être reportés tous les attributs de l'existence absolue, en particulier l'immuable fixité et la nette délimitation. On pourrait avec A. N. Whitehead [...] nommer ces entités des « objets éternels » ; et la tentative d'explication dont nous parlions pourrait être dite une « explication par les objets éternels interposés ».
>
> [...]
>
> « Dans l'essence de l'objet éternel, il y a une détermination en ce qui concerne ses relations avec les autres objets éternels, et une indétermination quant à ses relations avec les cas réels. Comme les relations d'un objet éternel avec les autres objets éternels sont déterminées par l'essence du premier, il en résulte que ce sont des relations intérieures, etc. » [cité de *La Science et le monde moderne* de A. N. Whitehead, Payot, Paris, Chap. X : L'abstraction]
>
> Ces quelques citations suffisent déjà pour mettre en lumière l'antagonisme profond qui existe entre ce point de vue et celui qui met l'accent principal sur les concepts en « constant état de devenir ». **Au fond, les objets éternels n'interviennent que pour recueillir les attributs absolus qui sont refoulés de l'objet mental ou de l'objet physique**. §11

La tentative "platonicienne" des objets éternels était séduisante mais se retrouve *de facto* destituée par la démarche gonsethéenne de sens en devenir. Laquelle se pose immédiatement comme problématique quant à notre capacité à *communiquer* :

> si les mots n'ont pas un sens précis et donné d'avance, comment puis-je être certain que le lecteur puisse en extraire un sens suffisamment conforme à mes intentions ? [...] La position est sans issue pour celui qui réclame un point de départ parfaitement assuré.
>
> Ceci une fois reconnu, la question suivante se pose tout naturellement : « Comment est-il possible que le langage, sans aucun appui d'ordre absolu, possède tout de même l'efficacité qu'on lui reconnaît ? » Il faut bien se rendre compte qu'en l'absence de tout éclaircissement sur ce point, on ne dispose d'aucun principe, d'aucune norme, qui permette d'apprécier la signification d'une construction verbale, pour peu qu'elle vise plus haut que les constatations immédiates et grossières. Et pourtant il ne semble pas que la pensée philosophique moderne se soit consciemment arrêtée sur cette question de principe. §12

C'est pourquoi Gonseth présente quelques apports à la question.

Tout d'abord la phénoménologie de F. Kaufmann dont il cite *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung* :

> « Dire que, dans une certaine langue, certaines combinaisons de sons ont une significations précise, cela ne veut nullement dire que cette signification habite ces sons comme une qualitas occulta, mais simplement qu'un certain nombre de personnes, les membres d'une même communauté linguistique, se servent d'un schéma de correspondance commun. »
>
> [...]
>
> « ...Avant de nous tourner vers la logistique symbolique, il nous faut être parfaitement au clair sur la signification de l'expression : l'objectivité « du langage ou de certains signes linguistiques ». Cette expression comporte en effet un double sens qui est de nature à provoquer la confusion.
>
> « D'une part, on entend par signification objective du langage les pensées dont il est, dans un certain milieu, l'expression unanimement acceptée. **L'objectivité revient donc ici à une unanimité de subjectivité**...
>
> « D'autre part et dans un sens plus restreint, on dit aussi qu'une expression a un sens objectif si elle exprime une pensée elle-même adéquate. **Ici l'objectivité consiste en ce que les pensées exprimées se rapportent à la « réalité objective »**, aux objets et aux états et faits du monde. » §13

Mais « le problème de l'efficacité de la parole tel nous cherchons à le poser n'est, ici, pas même effleuré ».

Gonseth se tourne alors vers la démarche historique et cite *L'Expérience humaine et la causalité physique* de L. Brunschvicg :

> « ...Définir l'expérience humaine, c'est en retracer la genèse et le développement. D'une part, en effet, l'expérience ne s'étale pas sur un seul plan : elle a une histoire et cette histoire n'est pas close. D'autre part, la raison, dont l'objet est d' « informer » l'expérience ne peut, non plus, étaler son contenu sur un plan unique : la raison se constitue et continue à se constituer, en fonction des péripéties de l'expérience, et, si originales que soient ses constructions, celles-ci perdent leur sens une fois sorties de leur contexte historique. Bien plus, l'expérience et la raison ne sont pas deux termes que l'on puisse séparer : c'est la raison qui règle l'expérience et c'est l'expérience qui adapte la raison. La seule réalité concrète sur laquelle puisse porter la critique, c'est donc l'histoire de la pensée : c'est l'histoire des interactions de l'expérience et de la raison. Isoler une étape et la prendre pour absolue, ce serait en effet fausser la perspective tout à la fois de la réalité et de la raison, car ces deux termes ne se présentent tels qu'ils sont durant cette étape qu'en fonction des expériences des stades antérieurs. » §14

Cependant, l'apport de Brunschvicg ne peut satisfaire Gonseth car celui-ci efface la *génialité*[17] du langage :

17. c'est-à-dire ce qu'il a de *créateur* [Berg1907] p. 165

Naturellement, il ne peut être question de mettre en doute les mérites évidents de la méthode que préconise M. Brunschvicg. Elle ne peut cependant pas nous satisfaire complètement. [...] Il y a un élément instantané que l'histoire prépare et soutient, mais ne détermine pas. Cet élément doit être saisi en lui-même : rien ne peut en dispenser. [...]

Il est donc tout naturel de se demander, avant de se tourner vers l'histoire, comment se constituent les instantanés dont la succession fait l'histoire. Or c'est là justement ce que la méthode historique n'explique pas. §14

GONSETH peut alors synthétiser les apports précédents avec ses propres vues :

Pour une très forte part, le sens des mots est fonction des façons de parler et de penser d'autrefois ; mais pour une autre part, il est fonction de la façon de parler de penser d'aujourd'hui. [...] Dans la vie de la pensée, c'est toujours dans les vieilles outres du langage qu'il faut mettre le vin nouveau de l'esprit.

[...] une histoire authentique de la pensée humaine, où systèmes et théories revivraient avec leurs caractères véritablement spécifiques, est une chose impossible. Lorsque je pense, et lorsque je formule ma pensée, ce sont mes images intuitives, mes représentations, mes réalisations, mes abstraction qui interviennent. **C'est ma mentalité qui s'exprime, à travers mes vues et mes idées sur le monde** et sur l'esprit humain, et sur la façon dont celui-ci saisit celui-là. Il est possible que mon être intellectuel ait fait sa proie d'idées fort disparates, rencontrées ici et là, qu'il contienne de l'Aristote et du Platon aussi bien que du Kant et du Poincaré. Il n'en forme pas moins à chaque instant une totalité qui régit et oriente mon activité pensante. Je pense et j'interprète la pensée des autres en fonction de cette totalité. **Or il y a des idées et des constructions intellectuelles avec lesquelles elle est incompatible**. Je ne sais pas alors quelle réalité ces idées visent et je manque des normes nécessaires pour les formuler de façon adéquate. [...] en général trop d'éléments me manquent pour restituer son véritable sens à une pensée qui fut autrefois vivante, au sein d'une civilisation qui la soutenait de toutes parts. [...]

En d'autres termes, s'il est vrai que toute notion nouvelle, pour naître et pour se formuler, se serve de mots et par conséquent d'idées déjà existantes, s'il est donc vrai qu'elle nous parvienne sur les flots du passé, il n'est pas toujours également vrai que ce passé continue à la soutenir. Il peut au contraire arriver qu'elle s'en détache et prenne son sens et son contenu de réalité dans les conditions en partie nouvelles de son emploi. §14

Le caractère (typiquement gonsethéen) « en devenir » des notions langagière nous semble témoigner de l'aspect *vivant* de leur praticiens, ce qui n'est pas sans rappeler BERGSON [18].
Et GONSETH de conclure sur un paradoxe pleinement mis à jour :

Ce que nous venons de dire met, croyons-nous, suffisamment au clair ce que nous appelons le *paradoxe du langage*. C'est **qu'il soit possible de conférer à certains mots et en se servant de ces mots eux-mêmes, un sens qu'ils n'ont encore jamais eu**. C'est le fait que **formuler une pensée** ne consiste pas seulement à établir des relations bien déterminées entre des notions parfaitement précises, relations et notions dont nous disposerions par avance, mais qu'au contraire **c'est faire jouer tout un monde d'évocations et de suggestions**, et que c'est malgré tout réussir.

Expliquer l'efficacité du langage, c'est découvrir les règles de ce jeu. §15

Le paradoxe ne sera pas résolu ici. Mais la destination est donnée :

Le problème des relations des mots aux choses, que ce soient les choses du monde physique ou du monde de nos pensées, est en effet analogue, quoique dans un plan différent, au problème des relations de la géométrie à l'espace dit physique et plus généralement de la mathématique à la réalité.

18. que chaque instant soit un apport, que du nouveau jaillisse sans cesse, qu'une forme naisse dont on dira sans doute, une fois produite, qu'elle est un effet déterminée par ses causes, mais dont il était impossible de supposer prévue ce qu'elle serait, attendu qu'ici les causes uniques en leur genre, font partie de l'effet, ont pris corps en même temps que lui, et sont déterminées par lui autant qu'elles le déterminent : c'est là quelque chose que nous pouvons sentir en nous et deviner par sympathie hors de nous, mais non pas exprimer en termes de pur entendement ni, au sens étroit du mot, penser. [Berg1907] p. 165

> [...] C'est sur le terrain mathématique que pourront être rassemblés les éléments intellectuels, images et idées, que nécessite [son] analyse. §15

Destination dont, conclura GONSETH, on ne doit pas perdre de vue qu'elle n'est qu'un point de départ vers un retour sur le paradoxe du langage :

> toute analyse des rapports du rapports du rationnel et du réel qui ne nous apporterait rien sur cette question, nous paraîtrait avoir manqué son but. §15

1.3 La connaissance de la réalité : une construction intuitive

> N'y aurait-il pas avantage à dire plus simplement la « connaissance de la réalité » ?
>
> Non ! Répondrons-nous, car l'expression que vous nous proposez suggère l'idée que la réalité telle que nous la concevons, existe déjà toute faite et toute prête, en dehors de nous. [...]
>
> [...]
>
> En d'autres termes, **la réalité telle que nous l'apercevons est une construction de plus ou moins autonome de notre esprit, dont les fins essentielles sont de rendre l'action possible**. §16

Le ton est encore une fois donné et démystifie une conception que GONSETH qualifie de *précritique* (nous comprenons : irrémédiablement appelée à devenir proprement *critique*) :

> Nous appellerons « précritique » une attitude intellectuelle universelle jusqu'à Kant et qui se caractérise essentiellement par le trait suivant : elle imagine que la connaissance puisse aller toucher, par tel ou tel biais, à une réalité, abstraite ou concrète, déterminée de façon parfaite et définitive.[...]
>
> [...]
>
> Sur la question centrale de l'*a priori*, le développement de la science a [...] mis le kantisme partout en échec. Mais la portée de la découverte fondamentale de Kant n'en reste pas moins entière. L'évolution actuelle des mathématiques et des sciences naturelles ne la dément pas. [...]
>
> [...]
>
> Il ne peut y avoir aucun doute à cet égard : les mathématiques pures et la logique classique sont encore fermement établies et plein territoire précritique. Le moment viendra d'ailleurs où elles en devront sortir. §17

Suivant la ligne d'une connaissance intuitive (présentée au chapitre premier), GONSETH nous décrit le terrain intuitif où les germes de la *science* – en tant que *connaissance de la réalité* – pourront prendre racine :

> En général, les qualités élémentaires ne sont [...], comme toute autre notion, que des *apparences globales*, à travers lesquelles nous ne savons pas distinguer une réalité plus complexe, — apparences dans lesquelles s'exprime *notre façon* de concevoir et de connaître.
>
> [...] Les racines de toute connaissance sont — il est vrai — dans l'intuitif ; mais il n'est pas possible de *déduire verbalement ou rationnellement* toue la connaissance de quelques notions premières. [...]
>
> [...] **Nous reconnaissons donc la légitimité et même la nécessité d'une physique rudimentaire, qui ne tiendrait compte que des caractères les plus apparents des phénomènes, d'une physique toute naïve, dans laquelle nos impressions sensorielles seraient directement interprétées comme les symptômes évidents de *réalités pratiquement assurées*.** La loi naturelle que voici, par exemple : « Deux objets différents ne peuvent pas occuper en même temps la même place dans l'espace » pourrait fort bien intervenir dans une physique de ce genre. Nous acceptons, en un mot, tout ce qui, dans la phénoménologie, répond à l'idée d'**une *science naturelle des vérités élémentaires pratiquement assurées***. Il est d'ailleurs clair que ce premier chapitre de la science ne saurait être constitué en doctrine autonome (ce qui serait revenir à l'attitude précritique), mais qu'il devrait être ouvert à la fois du côté des sciences exactes et de la psychologie. §18

L'activité scientifique, qui se confond pour une part avec la construction de la réalité, se fonde sur une *aperception* – mais non aperception *de quelque chose* (ce qui serait mettre la charrue avant les bœufs et nous placerait à contresens complet de la perspective gonsethéenne). Empruntant au langage kantien, GONSETH donne l'exemple de la couleur : « *La couleur est une forme de notre aperception* ». Ce qui l'amène plus généralement à décrire ce qu'il nomme nos *formes intuitives*[19]. L'écho kantien est légitime depuis les formes *a priori* de la perception mais ne doit pas nous amener à partir en vogue vers quelque sirène : contrairement aux formes kantiennes *figées* de l'espace et de temps[20], le qualificatif "intuitif" renvoie comme toujours à quelque *sommaire inachevé* (et donc en devenir) :

> les formes intuitives peuvent être comparées à des représentations partielles et schématiques d'une réalité qui, d'ailleurs, **ne nous est point donnée autrement**. Elles nous fournissent les premiers éléments pour la construction de toute réalité. §19

Ces formes intuitives sont amenées à recevoir des *qualités intuitives* : par exemple "rouge" sera une qualité intuitive s'insérant dans la forme intuitive "couleur". Insistons dès à présent : malgré le séduisant appel platonicien, on commettrait une lourde erreur en prenant ces qualités *intuitives* (donc sommaires et inachevées) pour des *universaux* (figés). Ce sont nos sens qui permettent, à travers leur perception, en fait l'*élaboration* de ces qualités intuitives. Il est alors naturel de chercher à *structurer* ces qualités (tout du moins celles s'insérant dans une *même* forme intuitive), d'où émerge la mathématique comme outil *abstrait* et *structurant* (GONSETH dira *schématisant*)[21] :

> Les qualités intuitives n'étant perçues que du fait de leur insertion dans « les formes intuitives » correspondantes, ces dernières doivent être conçues comme possédant une certaine « étendue » qui correspond au champ de variation de la qualité. La couleur peut varier par la nuance autant que par l'intensité ; le son par la hauteur autant que par le volume, la forme par chacune de ses dimensions, etc. **Préciser les données des sens, c'est introduire un système de repères aussi invariables et aussi serrés que possible, par rapport auxquels les variations des qualités devront être « objectivement » appréciées : C'est le chemin qui mène directement à la schématisation mathématique et à la mesure**. §19

La connaissance intuitive construit la réalité avec son outil premier qu'est *notre corps*, garant de nos capacités sensorielles. Au vu de ce qui précède, la connaissance *expérimentale*, qui rappelons-le prolonge et dépasse celle intuitive, est tout naturellement amenée à se parer de l'outil abstrait mathématique :

> [...] **On expérimente avec son corps, ses sens[22] et ses membres, avant d'expérimenter avec des instruments[23]**. La physique expérimentale est en continuité avec ce qu'on pourrait appeler la physique de l'intuition. La science commence où le bon sens finit.

19. Non pas que nous estimions que cette conception [de l'espace et du temps comme formes a priori de l'intuition] puisse être reçue sans un profond remaniement par un esprit moderne. Mais un fait essentiellement nouveau reste acquis, probablement à jamais : *il ne peut plus être ignoré que, dans l'investigation du monde, nous apportons une structure intellectuelle propre, dont n'est pas indépendant cela même que nous appelons connaissance.* [Gons1937] §24

20. Nous croyons que les quelques indications qui précèdent permettent déjà d'indiquer, en quelques mots, ce que l'Esthétique et la Logique transcendantales apportent à l'évolution de l'idée de la logique. Elles ne visent à rien moins qu'à établir une nouvelle **Doctrine des vérités élémentaires** [en gras dans le texte]. Où prennent-elles, elles-mêmes, la justification de leur argumentation ? Dans **l'idée générale que le nécessaire, de par sa nature même, doit s'imposer à l'esprit ; et dans l'emploi en conséquence d'une série de jugements que l'ambiance de l'époque faisait tenir pour tels. Or, pour la plupart d'entre eux, nous n'en sentons plus la contrainte. Ce qui entraîne cette conséquence radicale : qu'aucun de nos jugements ne comporte probablement cette nécessité absolue et transcendante**. Ce qui disjoint, en un coup, toutes les articulations de la synthèse kantienne. [Gons1937] §27

21. Nous retrouvons ainsi la définition de W. THURSTON de la mathématique comme « the theory of formal patterns » ([Thur1994] p. 1). Ou encore la réponse de Nathan dans le film $X+Y$ (2015) : « I like patterns ».

22. All human knowledge of matters of fact is in part caused by perception. [Russ1940] p. 170

23. au fur et à mesure que la technique de mesure est raffinée, l'observateur est progressivement remplacé par des appareils de plus en plus complexes. Or cela n'est certainement pas vrai dans le cas présent ; il n'est pas remplacé progressivement : il l'est **depuis le début**. [...] l'observateur n'est jamais entièrement remplacé par les instruments : [...] Les sens de l'observateur doivent en fin de compte entrer en jeu. **L'enregistrement le plus soigné ne nous dit rien s'il n'est pas analysé**. [...] Galien nous a préservé un fragment (Diels fr. 125) dans lequel Démocrite présente l'intellect (*διάνοια*) discutant avec les sens (*αἰσθήσεις*) à propos de ce qui est « réel ». Le premier dit : « **Apparemment, il y a la couleur, apparemment le doux, apparemment l'amer, en fait il y a seulement des atomes et le vide** », à quoi les sens répondent : « **Pauvre intellect, espères-tu nous vaincre alors que tu empruntes tes preuves de nous ? Ta victoire est ta défaite.** » [Schr1956] p. 302-305

> Mais ce qu'il importe de souligner, c'est que la mathématisation dont s'accompagne le passage à l'expérimental, ne se réduit pas à l'introduction d'une échelle graduée ; le rôle des mathématiques ne s'épuise pas dans l'emploi de l'échelle des nombres.
>
> [...] **La qualité intuitive est la forme de l'aperception** ; il nous ajouter maintenant : **L'abstraction mathématique** — ou du moins schématique — **est la forme de l'expérimentation**.
>
> [...] « **Les grandeurs sont, en dernier lieu, définies par la façon dont nous en prenons connaissance, au moment où nous les rencontrons dans le monde qui nous entoure**... §20

Continuant à citer EDDINGTON, à travers l'exemple de la forme intuitive "longueur", GONSETH nous définit l'*abstrait* "distance" et dénonce sur-le-champ une rupture entre la grande variabilité de cet abstrait et le caractère intrinsèquement limité des sens par et dans lesquels – nous le disions – sont élaborées les qualités intuitives "longueur" originelles :

> « ...**On obtient une définition de la distance en décrivant toute simplement le procédé exact qui permet de la mesurer** et c'est cette définition-là qui, évidemment, doit être la définition primitive... [...] Toutefois, [...] il faut observer une certaine prudence. Je me trouverais dans un cruel embarras, si on me demandait d'expliquer sur-le-champ par quelle série de manipulations et de calculs, la longueur de 10^{-15} cm. est à définir. — Et pourtant, le cas échéant, je n'hésiterai pas à me servir de grandeurs de cet ordre, comme si leur définition était à notre immédiate portée ; on ne peut pas s'attarder indéfiniment à l'examen des fondements. » §20

Ce décalage témoigne en fait de l'étape *schématisante* qui vient transformer les éléments de notre connaissance intuitive :

> En un mot, **aussitôt que l'expérimentation intervient dans la construction de la réalité, les notions intuitives évoluent sous l'influence de la schématisation mathématique**. La durée, l'espace, la couleur, le son, etc., comme éléments de connaissance, apparaissent dès maintenant liés à toute une série de théories plus moins autonomes. §20

Non seulement la schématisation transforme-t-elle, fait-elle évoluer notre connaissance intuitive de la réalité, sa construction, mais elle les fait également *progresser* :

> Il peut arriver que l'expérimentation révèle des aspects de la réalité que nous ne savons pas interpréter intuitivement, parce que les formes d'intuition où elles pourraient s'insérer nous font défaut. Nous n'en prenons connaissance qu'indirectement, par l'intermédiaire des effets que certains dispositifs et certains instruments nous rendent perceptibles. Par exemple, nous ne disposons ni de l'appareil sensoriel ni de la forme intuitive correspondante pur enregistrer la pression atmosphérique ou le potentiel électrostatique.
>
> [...] **Si, dans la connaissance d'un objet quelconque, on veut dépasser la sphère d'expérimentation assez grossière où s'exerce l'intuition, cette connaissance plus profonde des réalités ne s'obtient, ne se constitue que par l'entremise, qu'en fonction de théories de plus en plus nombreuses, de schémas abstraits intervenant successivement et progressivement**.
>
> Le concret n'est jamais donné en lui-même. La description d'une réalité concrète, pour être de plus en plus précise, nécessite des concepts de plus en plus abstraits, tels que l'atome, l'électron, le spin, la probabilité d'existence... Le réel ne se laisse serrer de près qu'à l'aide de l'idéal et du schématique. §21

Ce progrès peut également prendre la forme d'une *renversement* :

> Il n'y a [...] pas seulement une voie, une direction déterminée, dans laquelle le processus qui part de l'intuitif et dont le terme est la constitution de la réalité peut s'engager. Il y en a plusieurs et qui, peut-être, divergent.
>
> **Il peut arriver que la mathématisation renverse les vues intuitives qu'on croyait les plus légitimes**. C'est ainsi que la cinématique d'Einstein a renversé l'idée trop simple de la simultanéité universelle, pour la remplacer par une liaison temporelle plus compliquée et mieux adaptée à l'explication des phénomènes.
>
> **Il peut arriver, enfin, que le schéma soit incompatible avec l'intuition**, que celle-ci lui soit un obstacle plus qu'une alliée. C'est actuellement le cas dans la physique de la matière radiante, où la théorie des quanta n'arrive pas à s'intégrer parfaitement dans la forme espace-temps. §22

Sa *réussite* étant de fait constatée, se pose alors la question de la *nature* de l'appui que le schéma mathématique prête à l'expérience. Comme au chapitre précédent, GONSETH laissera le problème ouvert, en dénonçant la vanité de l'attitude naïve qui cherche l'*exactitude* :

> « Est-il exact ou non que l'arête d'un cristal soit une droite ? » Il n'y a aucune raison [...] de poser l'alternative. L'exactitude ne peut être que relative à certaines fins. Il suffit parfois de changer de point de vue pour que, indéniable jusque-là, elle disparaisse complètement. Il suffit, disions-nous, de descendre à l'échelle atomique pour que la notion même d'arête continue devienne inadéquate...
>
> [...] En un mot, **l'opposition exact-inexact ne suffit en aucune façon à rendre compte de l'efficacité ou de la non-convenance d'une théorie**. §23

Et cela sans perdre de vue le problème du langage :

> Il y a entre le rôle des schémas dans la description de la réalité d'expérience et l'emploi des mots à la désignation des choses, un parallélisme évident. L'exactitude d'une théorie telle que nous l'avons formulée correspond simplement à l'adéquation d'un concept à la chose pensée. Nous venons de le constater : Sur le terrain des rapports de la théorie et de l'expérience, l'insuffisance de cette attitude est particulièrement évidente. §23

1.4 La dualité concret-idéal

Le chapitre précédent décrivait quelques aspects du terrain intuitif dans lequel prenait racine la connaissance expérimentale (en particulier celle de l'espace) et esquissait le rôle naturel de la mathématique dans cette dernière. GONSETH franchit à présent le « seuil d'abstraction » et appelle à l'exemple la géométrie (*i. e.* la science de l'espace) :

> demandons-nous pour commencer d'où viennent les notions géométriques les plus simples, telles qu'on les introduit dans les premiers éléments. Chacun peut retrouver dans ses souvenirs les façon dont elles lui furent suggérées.
>
> Le maître propose à l'élève certaines « réalisations physiques » : le faîte d'un toit, l'arête d'une règle à dessiner, ou encore la trajectoire d'un rayon lumineux, la ligne de visée ; et il lui demande d'y apercevoir la notion à définir. Il exige de savoir distinguer dans chacun de ces exemples concrets une chose idéale qu'ils ont en commun : *la droite géométrique*.
>
> De même il lui demande d'imaginer un objet de plus en plus petit, plus petit encore que tout objet qu'il aurait déjà imaginé, pour conduire son esprit à la notion de lieu précis : de point géométrique.
>
> Il lui demande encore d'apercevoir dans les objets proposés les premières propriétés des êtres abstraits qu'il vient d'imaginer : qu'une droite est déterminée par deux points, etc.
>
> En un mot, il exige de l'élève un acte de véritable création mentale, dont il faut se garder de diminuer l'importance. Remarquons bien que ce passage de la notion intuitive : la ligne de visée, à la notion idéale : la droite, est quelque chose de tout à fait indescriptible. Une fois qu'on l'a conçu,

il peut être évoqué. Mais notre pouvoir d'explication s'arrête là. Il y a là un fait d'une essence tout à fait *sui generis*[24].

[...] Si ce sont les réalisations physiques qui nous ont suggéré les notions de droite, de point, etc., il faut reconnaître que c'est par le fait d'une connaissance incomplète de la réalité, par un *heureux malentendu*. On rend en partie compte de ces circonstances en disant que la droite est image schématique de la réalité. Dans un schéma, la réalité ne se trouve pas représentée dans tous ses détails. Seuls certains traits sont conservés, et certains rapports évoqués. Un schéma n'est en aucun façon une représentation fidèle en un sens absolu : il n'est compréhensible que si on en possède la clef explicative. Tous ces caractères se retrouvent dans le parallélisme existant entre la notion de droite et ses réalisations. §24

Ce passage *sui generis* de l'intuitif à l'*idéal* constitue pour Gonseth une première *axiomatisation* (au sens de *épisode de la démarche axiomatique* – il n'est pas encore question d'*axiomes* à ce stade). Gonseth donne ensuite d'autres idéalisations d'un certain géométrique (par exemple : des cercles en un point O fixé, appelés "droites", la distance entre deux points A et B d'une telle "droite" se définissant par $\cot \frac{\widehat{BO}}{2} - \cot \frac{\widehat{AO}}{2}$), qui conduisent toutes à des modèles isométriques (au modèle euclidien). Lorsque l'on oublie les objets géométriques pour ne regarder que les "catégories" qu'ils constituent (points, droites) et les "relations" qu'ils peuvent vérifier (incidence, concourance...), on passe à un nouveau stade où les axiomes sont explicités à l'aide de ces catégories et de relations uniquement. Le passage à cette structure *logique* (au sens : indépendante du sens des objets)[25] consacre la *deuxième* axiomatisation :

D'images fondées dans l'intuition spatiale, [**les notions fondamentales**, la droite, le point, etc.,] **doivent tomber (ou monter !) au rang de choses logiques, c'est-à-dire de choses dont seules les relations logiques avec d'autres objets de même nature doivent être retenues**. Cette dégradation des images géométriques représente une étape essentielle de l'axiomatisation de la géométrie. §25

l'introduction des relations logiques n'est pas autre chose qu'une nouvelle schématisation axiomatique. Pour passer du géométrique au logique, il faut franchir un nouveau seuil d'axiomatisation. Tout à l'heure, le géométrique était un abstrait par rapport à l'intuitif. Maintenant c'est un concret par rapport au logique. Abstraction il y a un instant, c'est maintenant une réalisation d'un abstrait plus subtil. §26

Dans cette double axiomatisation *intuitif* $\longrightarrow$ *idéal* $\longrightarrow$ *logique*, le géométrique prend donc tour à tour plusieurs visages : tantôt concret, tantôt abstrait, il est au stade idéal *les deux à fois*. Et c'est à ce stade que réside l'abstrait proprement géométrique (les "vraies" droites, *etc.*) :

Ayant ainsi constaté ce que les différents modèles ont en commun, nous pouvons revenir à la question : En quoi consiste leur individualité ? C'est justement dans ce que la seconde axiomatisation a fait disparaître qu'il faut aller la chercher : Cette individualité consiste avant tout dans **le souvenir des réalisations où les notions ont été primitivement aperçues**.

[...] le monde physique n'[offre de la notion de droite] que des réalisations imparfaites, et [...] par conséquent **ce n'est pas le fait « d'être réalisée », au sens ordinaire du mot, qui nous fournit la garantie de « l'existence mathématique » de cette notion**. Par une réaction assez naturelle, l'esprit éprouve la tentation de se porter immédiatement aussi loin que possible dans la direction opposée, et de dire : « C'est donc une affaire de pure logique. » Or, nous constatons maintenant qu'il n'en est rien non plus : la logique pure ne connaît pas la droite, ne connaît ni le point ni l'espace : L'origine du géométrique n'est pas en pays de Logique pure.

L'idée du géométrique a sa source dans l'intuitif. Mais la sphère d'existence spécifique est comprise entre la première axiomatisation qui lui faisait un visage abstrait face au côté intuitif de

24. Voici notre expérience en la matière. Cours de 6e (ou 5e) avec Mme Riou qui nous explique la différence entre *un* diamètre et *le* diamètre d'un cercle et qui finit par préciser qu'il a y une *infinité* de diamètres. Nous sommes surpris du haut de nos dix ans : quand l'on trace un diamètre, mettons vertical, nous pouvons tracer le *prochain* diamètre dans le sens horaire (dont le coin haut-gauche coïncide avec celui haut-droit du premier), en itérant on finira bien par faire le tour, tel un escalier de planchettes Kapla. Et notre professeure de nous répondre qu'en géométrie les lignes sont infiniment fines – nous venions alors d'idéaliser la droite.

25. Notons par prévention qu'à ce stade il n'est pas explicitement question de logique purement *formelle*. Quand bien même Gonseth aurait ici cette dernière en tête (et l'émergence des catégories, troisième axiomatisation, semble le démentir), il utilise le terme "logique" dans l'acception courante, qu'il entreprendra justement de démystifier.

> notre connaissance et la seconde qui en fait un concret face au côté « purement » logique. En deçà, et au delà, elle n'existe pas encore et n'existe plus. C'est dans ce double rôle que s'épuise l'existence géométrique, dans ce double visage que se révèle son vrai caractère. §27

Observons ici que le stade idéal est problématique : autant l'intuitif est un départ (à défaut d'un fondement), autant le logique sera fondé par le formel (ce qui reviendra *in fine* à de l'intuitif sur des symboles), autant rien d'autre ne semble donner accès à ce monde idéal que ce « moment où se fait le saut du signe à ce qu'il dénote » [26]. C'est donc en négatif que GONSETH décrit sa genèse, entre le monde physique de notre action corporelle et celui (formel-)logique de l'action sur les symboles :

> [certains caractères, dont nous affirmons l'existence, qui appartiennent en propre au géométrique et lui confèrent son existence autonome] sont encore engagés dans nos vues intuitives, liés à toute **notre activité sensorielle et musculaire**. C'est par les racines qu'ils plongent de ce côté que leur vient l'essentiel de leur signification, signification que soutiennent encore le faisceau des intentions dont s'accompagne tout effort de connaître.
>
> Envisagées spécialement sous cet angle, **les notions géométriques sont des images idéales appuyées sur le réel objectif, des représentations schématiques dont le sens n'est intelligible qu'en tenant compte de la réalité qu'elles visent**. Il n'y a pas de notion de droite sans connaissance préliminaire de certaines réalisations plus ou moins grossières, telles que l'arête d'une règle ou le trait qu'elle permet de tracer, il n'y a pas de notion de point sans l'intention de désigner un endroit précis, pas de notion d'espace sans l'image intégrale inscrite dans nos formes d'intuition.
>
> D'autre part, **ces notions ne prennent leur aspect rationnel que du fait de** l'axiomatisation, c'est-à-dire de **l'acte mental qui aboutit à la création du *schéma abstrait***.
>
> Ce n'est que par action et réaction de ces deux tendances de la faculté de connaître et de comprendre, à la fois par association et dissociation de ces deux orientations antagonistes que prend naissance la notion complète de la géométrie : deux visages où l'on peut distinguer tour à tour des traits semblables sous des expressions dissemblables ou une même expression sous des traits différents. §29

Pourquoi s'être concentré sur le *géométrique* plutôt que sur un autre élément de notre connaissance ? Cet exemple est pour GONSETH *typique* de toute constitution épistémique :

> quelque intérêt que puisse présenter pour un mathématicien une réintégration du géométrique dans son autonomie, et une appréciation renouvelée de la rigueur des considérations dites intuitives, ce n'est pas dans cette direction que nous apercevons le gain véritable de **notre analyse**. Celle-ci **a pour nous la valeur d'un exemple-type. Dans les rapports du géométrique à l'intuitif et au logique nous apercevons l'image même des rapports du concret et de l'abstrait, l'image qui se reflète dans chacune des faces que nous présente le processus de la superposition des schémas dans la construction progressive de la réalité**. [...]
>
> Insistons d'abord sur le fait qu'un concept n'a pas une forme donnée une fois pour toutes et un contenu *ne varietur*. [...]
>
> [...] même après avoir pris sa forme la plus épurée, le concept droite continue à vivre parallèlement de ses existences antérieures [27]. Il se fait une espèce de projection des plans d'existence l'un sur l'autre, sans que ni l'un ni l'autre ne renonce à son rôle. **Le concept comprend à la fois l'amalgame et la dissociation de ses trois formes**. §30

Revenant à la question de l'individualité, renommée "définition", GONSETH finit le chapitre en nous désillusionnant sur la capacité de la démarche axiomatique à *définir* ce qu'elle prétend saisir, la pluralité de modèles isomorphes détruisant cette prétention que l'on aurait pu accorder aux axiomes. Mais c'est la notion même de "définition" qui est transformée par la démarche axiomatique :

26. [Witt1930] 26
27. En mathématique, si la "droite" traditionnelle est celle *numérique* $\mathbf{R}$, on lui substituera volontiers en algèbre linéaire la droite *vectorielle* (un corps k) puis (en géométrie algébrique) la droite *affine* $Speck[t]$ (lorsque k est algébriquement clos, on obtient les idéaux engendrés par les binômes $t - \lambda$ lorsque λ décrit k).

> il existe plusieurs « modèles » satisfaisant tous également à tout le système des axiomes. Ce qui est droite dans l'un est peut-être cercle dans l'autre : les axiomes ne suffisent donc pas à eux seuls pour conférer une individualité parfaite à chacune de ces deux notions. D'autre part, il n'est pas douteux que d'une certaine façon nous réalisons cette individualité, et que nous avons le moyen de distinguer entre les différents modèles. Le fondement de cette individualisation se trouve donc dans « l'idée même » de la droite et du cercle, c'est-à-dire dans nos représentations intuitives, dans la sphère qui précède l'axiomatisation.
>
> — **Si nous persistons à vouloir définir la droite par les axiomes, c'est tout au plus comme relation logique que nous avons quelque chance d'y parvenir. Mais alors la définition ne saisit plus rien de ce qui est en elle image et représentation idéalisées : la droite dans la plénitude de son sens échappe à l'étreinte des seuls axiomes**.
>
> [...] il ne peut y avoir [dans la seconde étape de l'axiomatisation] de définition véritable que si les notions à définir sont individualisées par là même. [...]
>
> Ainsi la notion de définition va s'évanouir dans l'indéterminé lorsqu'on veut lui conférer une signification indépendante du processus par lequel les notions vont se constituant. C'est au fond ce processus seul qui nous fournit une définition, à travers l'intuitif et le géométrique. [...] §31

1.5 L'indépendance de l'idéal ?

> je ne nie pas que notre pensée trouve, dans ses moindre démarches, un appui dans l'idée de la vérité. Mais je me sens libre d'examiner si le vrai n'est pas lui aussi une idée-schéma. §34

Le stade idéalisateur ayant été mis à jour, se pose la question du devenir des notions intuitives une fois idéalisées et tout particulièrement celle de leur *autonomie* (par rapport à *ce qu*'elles ont idéalisé).

Ce chapitre s'intéresse au cas de la *vérité*, attribuée naïvement aux énoncés géométriques idéaux du chapitre précédent, et à la *logique*, système de jugements et déductions par excellence. Signalons à propos le sous-titre de ce cinquième chapitre : *La méthode déductive en géométrie*.

> Par quelle voie la notion de vérité vient-elle prendre place dans une construction axiomatique ? [...] comment les faits géométriques viennent-ils s'ordonner en une théorie déductive ? §32

Sans surprise, nous voyons apparaître une logique et une vérité *intuitives*, desquelles émergent les concepts idéaux correspondants :

> la réalité — ce qui est ! — ne nous est pas donnée intégralement et dans toute son essence. C'est pourquoi la vérité des jugements où elle s'exprime, ne sera jamais non plus intégrale.
>
> [...]
>
> **les jugements qui sont vrais parce qu'ils expriment ce qui est ou ce qui fut, ne le sont que *pratiquement*. Ils ne nécessitent pas l'intervention d'une vérité fixée définitivement ; il suffit d'une vérité elle-même pratique et sommairement délimitée. Je ne chercherai pas à analyser indéfiniment l'idée que je m'en fais, parce que ce *serait la détruire*[28] ; je connais pour les besoins de la pensée et de l'action les conditions de son emploi ; je l'appelle la** *notion intuitive de vérité*. §33

Le cas de la mathématique est explicite :

> Vous me demandez, au fond si je reconnais la nécessité de recourir à une logique préalablement établie, à laquelle il faudrait accorder une valeur absolue ; aux principes fondamentaux de laquelle tout le contenu des mathématiques resterait suspendu. Il est bien clair que je ne saurais ratifier cette *primauté* du logique sans me mettre en désaccord flagrant avec les conclusions des chapitres précédents. Nous renoncerions à l'ordre que nous avions cru distinguer dans la succession des abstractions. Au lieu d'être appuyées sur les formes intuitives et les idées-schémas, les « réalités mathématiques » [que Parfait veut voir d'un œil et d'un esprit platoniciens] ne seraient plus que l'expression des réalités transcendantes issues de la logique. §34

28. Ici nous paraît à nouveau pertinente la réflexion de Hilbert (à Frege) que nous citions plus haut (en remplaçant les concepts géométriques par celui de vérité) : « on cherche là quelque chose qu'on ne pourra jamais trouver parce qu'à cet endroit [...] tout se perd, devient confus et vague, dégénère en un jeu de cache-cache ».

La vérité ne sort pas indemne de son idéalisation :

> On continue à dire que toutes les géométries, l'euclidienne et les non-euclidiennes, sont vraies — également vraies du point de vue des mathématiques pures. Mais cela veut dire simplement qu'elles sont exemptes de contradiction [...]. Mais **leur vérité s'est affaiblie d'un élément essentiel** : ni l'une ni l'autre n'est plus, du seul fait de sa vérité, adéquate au réel.
>
> **Le vrai traditionnel s'est dissocié** : il donne naissance à deux concepts qui vont de plus en plus diverger : L'un d'eux est la conformité au réel des sciences naturelles ; l'autre est une vérité appauvrie qui continue à porter son ancien nom de vérité mathématique. §35

Après avoir révélée la *vérité* intuitive (répondant ainsi à la première question qui ouvrait ce chapitre), GONSETH nous décrit une notion intuitive de *déduction*, continuant de démystifier le "logique" idéal en le replaçant comme *postérieur* au logique intuitif :

> En disant « logique », on évoque simplement une certaine autonomie du jugement alliée à une évidente efficacité. C'est cette logique qui fait le fond de ce qu'on appelle la « saine raison ». A ce niveau, on raisonne sainement si l'on fait des associations d'idées correctes ; mais cette correction est en fonction de la conformité au réel des vues qui président à l'association des idées.
>
> Ainsi l'on voit que **la notion de déduction existe déjà dans ce que nous avons nommé la sphère intuitive**, mais qu'elle est encore loin de répondre à l'idéal de la déduction proprement dite. Nous parvenons à cette dernière à partir de la première, dans toutes ses variétés, par schématisation et abstraction.
>
> Permettez-moi que j'y insiste : de même que la notion de la droite géométrique est le fait d'un acte intellectuel créateur qui s'exerce sur ce que, après coup, nous nommons les réalisations de la droite, **la notion de déduction pure est l'aboutissement d'un processus de schématisation qui s'opère sur l'ensemble de nos « raisonnements intuitifs » efficaces**, sur toutes les associations d'images mentales où, après coup, nous pouvons apercevoir la forme de la déduction logique. §36

Le cas de la déduction *géométrique* est déroutant :

> dans l'axiome que voici :
>
> *Si deux points d'une droite sont dans un plan, alors la droite toute entière est dans ce plan,*
>
> l'essentiel de la conséquence est visiblement la liaison *qu'il faut établir* entre les deux faits *géométriques* que relie le mot alors.
>
> **Quelle est la nature de cette liaison ?** A son origine, si l'on remonte jusqu'à l'intuitif, elle présente un caractère causal ou tout au moins phénoménal. Par la transmutation en abstrait que représente le passage au géométrique, ces caractères relatifs au monde physique s'éliminent : Elle reste cependant engagée dans l'intuitif et le phénoménal dans la mesure même où les concepts géométriques le restent aussi. **En un mot : cette liaison est *sui generis* : Elle appartient comme telle à la sphère du géométrique**. §36

Autant cette liaison est bien démystifiée quant à son *origine* (intuitive), autant son *établissement* demeure à nos yeux mystérieux sans l'intervention de cette dernière [29].

Et GONSETH de bien replacer le géométrique idéal en son origine intuitive où une logique idéale n'a pas encore de sens à être née :

> **la géométrie** dans sa signification et dans les énoncés indémontrables qui la supportent **est indépendante de la juridiction d'une logique préétablie et dont les jugements irrévocables lui apporteraient les éléments de la vérité**. §36

Notre déroutement est partagé par Sceptique qui signale une pratique courante (sans détour par l'intuitif) pour établir ces liaisons *sui generis* :

29. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce manque gonsethéen (section 3.5).

> les règles de la déduction nous fournissent une *technique intellectuellement suffisante* pour établir toue la filiation des théorèmes. [...] La découverte d'un théorème nouveau est rarement le fait de la pure déduction ; mais celle-ci prononce en dernier ressort sur la vérité de tout énoncé. §37

Idoine veut bien accorder tant à Sceptique qu'à Parfait « [q]ue la déduction logique est le fondement de l'autonomie du rationnel » mais se voit obligé d'illustrer ce qu'il entend par « autonomie » afin de se faire comprendre. Il s'agit bien d'une *illustration* et non d'une explication à la lettre :

> Écoutez, je vous prie, l'histoire du roi nègre et trop puissant, que j'invente à votre intention !
>
> Le roi d'un peuple primitif commandait à un si grand nombre de guerriers qu'il ne pouvait les reconnaître tous facilement ; ils étaient même si nombreux qu'ils n'arrivait plus à les compter. (Car chacun sait que les primitifs ne savent pas manier les grands nombres.) Sa trop grande puissance lui causa maint souci, jusqu'au jour où il s'avisa du stratagème que voici : Il fit confectionner une figurine à laquelle il donna son propre nom, et ordonna que tous les guerriers en fissent autant. Ces figurines furent alignées dans une case construite à cet effet : on les appela les *doubles* ; nous dirons aussi les *guerriers abstraits*. Il fut ensuite convenu que chaque guerrier partant en expédition emporterait son double avec lui ; et le réintégrerait à son retour dans la *Maison des Doubles*.
>
> Dans sa mentalité de primitif, le roi identifiait avec force tout guerrier avec son double et il passait de nombreux instants à organiser son armée en maniant ses soldats abstraits. Il y devient même fort habile et y gagna une grande renommée.
>
> [...] L'élève qui identifie la droite abstraite avec le trait qu'il vient de tracer sur la feuille et le plan avec sa planche à dessin raisonne lui aussi comme un primitif : il ne conçoit pas l'autonomie de l'abstrait par rapport au concret où celui-ci est aperçu réalisé.
>
> Mais reprenons notre histoire : Notre roi prit tant d'intérêt aux évolutions de ses doubles, qu'il finit par les faire manœuvrer pour son seul plaisir. **D'un exercice tourné vers des fins extérieures, il en fit un jeu dont il choisissait les buts et les règles à sa fantaisie. Et moins les règles auxquelles il trouvait bon de s'astreindre étaient nombreuses, et plus elles étaient simples et précises, plus aussi il pouvait négliger les suggestions du réel extérieur. Plus le jeu gagnait en autonomie, et plus la signification des doubles s'éloignait de la signification originelle**.
>
> Croyez-vous qu'il en aille bien autrement des notions géométriques abstraites ? **Dans leur genèse, elles sont intimement liées au concret ; une fantaisie géniale imagina, d'abord obscurément, puis de façon de plus en plus consciente, de leur appliquer les règles strictes du jeu déductif : l'autonomie des abstraits géométriques était ainsi fondée**. Et c'est dans ce sens que j'accepte la définition de Sceptique : **le raisonnement mathématique est une technique intellectuelle indépendante**. §37

Cette illustration étant faite, GONSETH peut répondre à la deuxième question qui ouvrait ce chapitre :

> « *Comment les faits géométriques viennent-ils s'ordonner en une théorie déductive ?* » demandions-nous.
>
> Ce qu'il faut avoir aperçu, c'est que la constitution de la géométrie en science rationnelle et déductive n'est pas le fait seulement du processus de schématisation qui part de la connaissance intuitive pour aboutir aux concepts abstraits. **L'intervention de la stricte discipline du raisonnement mathématique doit être comparée à une prise de possession du domaine géométrique par un principe *nouveau*** ; non pas *étranger* au géométrique, puisqu'il peut être aperçu déjà dans certaines associations spécifiquement géométriques ; ni transcendant ou descendant d'un absolu d'essence supérieure, puisque, sans quitter le territoire géométrique, on peut découvrir déjà quelques-unes de ses sources intuitives ; mais **dont l'autorité est plus largement fondée, dont le « domaine naturel » de juridiction comprend d'autres provinces encore, à côté du domaine spécifiquement géométrique**. §38

Et de conclure sur l'autonomie *progressive* de l'abstrait à travers le jeu libre imagé sur des *représentants* de l'abstrait, depuis les réalités intuitives ayant donné naissance à cet abstrait (le faîte d'un toît) jusqu'aux traits de crayon négligeamment jetés sur une feuille (figures géométriques) :

Et tout autre symbole dont je me servirais supporterait ma pensée comme la réalisation concrète supporte l'abstrait.

L'autonomie de l'abstrait se prépare dans tous les groupements d'images par lesquels nous recréons à notre usage la simultanéité, la succession, l'enchaînement des *signes*[30] des phénomènes. **Le processus de l'abstraction n'apporte aucun impératif descendant d'une vérité pure ou montant d'une *chose en soi*. Rien ne montre le principe de ces associations d'images ou d'idées comme imposé de droit par une réalité d'un ordre transcendant** : L'esprit pourrait aussi rester inerte et ne pas tenter cette schématisation progressive, abstraite des réalisations concrètes !

C'est pourquoi nous prévoyons dès ici que **l'idée de l'ordre rationnel et la méthode déductive ne sauraient être que des liens idéaux imitant schématiquement certaines liaisons concrètes, certaines lois profondes du réel**. Que l'esprit ait su les concevoir et s'en servir, c'est là ce qui confère aux mathématiques leur originalité et leur valeur incomparables. §39

1.6 Le nombre entier : une qualité physique

Un rappel démystificateur ouvre ce chapitre sur le caractère émergent (et non pré-donné) de la logique :

> Les mots « le plan du logique » ou « la logique pure » n'ont pas de signification d'ores et déjà complètement acquise et fixée : la signification leur vient justement par l'emploi que nous en faisons. En d'autres termes, **le processus de l'axiomatisation ne se définit pas en fonction de la notion prédonnée du logique ; sa signification ne vient pas s'accrocher à l'essence déjà parfaite de cette dernière. C'est au contraire le processus d'abstraction qui définit, en la suggérant, en l'évoquant, en la créant, l'essence du logique pur**, essence imparfaitement déterminée et encore en état de devenir. §40

Après avoir formulé trois époques de l'évolution du concept de nombre entier, qui cadrent nous semble-t-il plutôt bien avec la trichotomie intuitif-idéal-logique sus-développée, GONSETH commence par décrire l'époque intuitive, celle dont nous mathématiciens avons fort tendance à perdre le souvenir :

> **La notion de nombre se fonde sur une faculté de notre être mental : celle d'enregistrer la répétition d'une impression sensorielle, d'une action ou même d'une intention, en un mot d'enregistrer la répétition d'un moment de conscience**. La façon la plus abstraite de concevoir un moment de conscience de ce genre correspond peut-être à la notion de bi-unicité, notion sur laquelle Brouwer fonde l'intuition des nombres, et qu'on pourrait apercevoir « réalisé » dans l'instant fugitif où une impression fait place à son souvenir[31].
>
> [...] L'énumération s'accompagne [...] — [...] probablement de façon indissolublement conjointe — d'une typification, d'une répartition en classes et sous-classes, de telle façon que deux éléments de la même classe puissent être inscrits dans la mémoire comme équivalents.

Le rappel explicite à BROUWER, à la conscience, ainsi qu'à la mémoire itérée, nous rappelle fortement l'approche de H. von HELMHOLTZ :

> Numbering is a procedure based upon our finding ourselves capable of **retaining, in our memory, the sequence in which acts of conciousness successively occurred in time**. [Helm1887] p. 75

Il est singulier que ni GONSETH ni HELMHOLTZ n'abordent de front l'*objet*-nombre mais décrivent plutôt l'*acte*-nombrer (compter). Ce n'est que par *notre action* que l'accès au concept-nombre nous est révélé :

30. GONSETH précisera au §131 : « Convenons de dire qu['un symbole] est un *signe* si sa mission spéciale est de rappeler, d'évoquer, de suggérer l'objet auquel il est assigné, d'en soutenir ou d'en réveiller l'image ou le souvenir, etc. »

31. When I hear the sentence "Brutus killed Caesar", I perceive the time-order of the words ; if I did not, I could not know that I had heard that sentence and not "Caesar killed Brutus." If I proceed to assert the time-order by the sentences " 'Brutus' preceded 'killed' " and " 'killed' preceded 'Caesar,' " I must again be aware of the time-order of the words in these sentences. **We must**, therefore, **be aware of the time-order of events** in cases in which we do not assert that they have time-order, for otherwise we should fall into an endless regress. What is it that we are aware of in such a case ? [Russ1940], p. 45-46

on ne sait compter un certain nombre d'objets que si l'on sait aussi les placer dans un certain ordre de succession, où chaque objet n'intervienne qu'une fois. [...] cet ordre doit être porté par l'esprit dans la catégorie à énumérer.

[...] Il y a un fait d'expérience qui conduit au delà du cadre la numérotation pure et simple : c'est qu'**ayant à compter, c'est-à-dire à numéroter un groupe d'objets, je puisse à mon gré changer l'ordre et la position de ces objets : je n'en obtiendrai pas moins toujours le même résultat final. Les collections finies possèdent donc un caractère invariant vis-à-vis de toutes les permutations possibles : leur *nombre***. Et il y a un véritable mouvement de la pensée à dire, par exemple, que certains objets sont au nombre de dix, parce qu'ils peuvent être numérotés de un à six.

On pourrait dire aussi que la notion de nombre cardinal est fondée sur la possibilité d'établir entre les nombres ordinaux et les objets d'une catégorie finie une correspondance parfaitement univoque et qui se conserve à travers tous les dérangements et objets envisagés. **Cette possibilité contient un *fait d'expérience irréductible***. D'ailleurs, il faut aussi observer que l'on ne nomme « *objets* » que les « choses » qui présentent la propriété donc il est question, de telle sorte que les notions d'objet et de nombre apparaissent liées dans l'intuitif. §41

Ainsi est posée, dans l'intuitif, la primauté du nombre ordinal sur celui cardinal, rappelant des conclusions semblables de H. Weyl [32].

Finalement, le nombre entier (cardinal) se voit simplement décrit, dans l'intuitif, comme une *qualité intuitive* (la *cardinalité*) d'un groupe d'objets [33] :

En définitive, le nombre apparaît au stade intuitif comme un caractère porté par l'esprit dans un ensemble très complexe d'impressions plus ou moins nettement perçues, résultant de l'action de l'objet sur le sujet et de l'emprise du sujet sur l'objet. **Ce caractère est unificateur et schématisant, et merveilleusement approprié aux fins de l'action. Il est comparable à toute autre *qualité sensible***, telle que grand, jaune, ou pesant. Un groupe d'objets a la *qualité « trois »*, par exemple, comme l'un d'eux a peut-être la *qualité « rouge »* ou la propriété « d'être transparent ».

En un mot : **Le nombre, dans sa signification primitive et dans son rôle intuitif, est une qualité physique des groupes d'objets**. §42

Suit une brève excursion dans l'écriture des nombres, pragmatiquement motivée :

L'idée générale de *système de numération* est un des fondements de l'idée abstraite de la *suite indéfiniment croissante de nombres entiers.*

[...]

— **Quant aux règles et aux opérations de l'arithmétique, elles forment** « une méthode éminemment psychologique » [cité de *Zahlen und Messen* de H. Helmholtz]. Nous dirions plus volontiers : **une méthode éminemment adéquate aux fins humaines**. §43

Une fois décrit le stade intuitif (et on n'en prendra jamais trop le temps), une première axiomatisation (au sens : poser des axiomes) du nombre idéalisé devient possible. Encore une fois, cet acte ne peut venir fonder le nombre intuitif qui a engendré (par idéalisation) ce sur quoi cet acte porte :

Le concept de nombre une fois dégagé, on peut lui imprimer le sceau de l'axiomatisation. **Il ne faut pas chercher à voir dans cette première axiomatisation une tentative de créer de toutes pièces les bases de l'arithmétique. Au contraire, il faut admettre qu'un certain nombre de notions fondamentales sont claires par elles-mêmes et données avec toute la précision désirable**. §44

32. The question has been argued extensively whether the concept of cardinal, rather than ordinal, number is not the primary one. [...] but the criterion of numerical equivalence makes use of the possibility of pairing, which can only be ascertained if the **acts** of correlation are **carried out** one after another **in temporal succession** and the elements of the sets themselves are thereby arranged in order. [Weyl1926] p.34

33. L'idée primitive du nombre est évidemment celle que fournit une collection d'objets distincts. Le nombre est tout d'abord concret, il ne se sépare pas de la collection à laquelle on le fait correspondre. [Milh1898] p. 61 Nous aurons l'occasion (section 3.2) avec Mayberry de revenir sur cette conception du nombre.

> Dans tous les cas, les axiomes ne sont aucunement des décrets librement et arbitrairement formulés, avec l'intention et le pouvoir de conférer l'existence aux entités que sont les nombres. §45

La deuxième axiomatisation, celle du nombre logique, est présentée au § suivant. On y retrouve la démarche formelle par excellence, présentant (sans doute par simplicité) l'arithmétique *additive*. GONSETH nomme ainsi un nombre singulier (le "premier") et une loi binaire (l'addition), d'où l'on définit une loi singulaire (le successeur), puis l'on impose des axiomes tels la description de l'(ensemble-)image du successeur comme étant tous les nombres sauf le premier ou encore la loi de compatibilité de l'addition avec le successeur.

> La seule chose qui importe ici, c'est de savoir qu'à partir des relations qui précèdent, et au besoin complétées, et **par les moyens de ce qu'on est convenu d'appeler la seule logique**, on peut déduire toute l'arithmétique. [...] À travers l'arithmétique, comme autrefois à travers la géométrie, nous aurions ainsi **rejoint le plan du logique**. Mais à mesure que se précise ainsi la notion du logique pur, d'autres difficultés surgissent. §46

Quelles sont ces difficultés surgissant à l'intrusion du plan logique dans des domaines proprement mathématiques ? On pourrait croire que ces domaines se trouvent affectées d'une quelconque façon par ce logique émergent jusque dans leur éléments les plus simples ("un", "deux", "entre", "l'autre sens"), on pourrait craindre que ces éléments simples soient redéfinis, soufflés par leè logique, et qu'il faille tout reprendre tel Sisyphe depuis leur première intervention dans notre démarche : comment alors faire même un premier pas ? Ce serait oublier qu'on démontre le mouvement en marchant [34], que le premier pas a été *déjà réalisé en tant que tel* – et non en tant que pas à venir :

> si notre axiomatisation a pour objet de décrire un processus d'abstraction, de suggérer une schématisation et d'évoquer systématiquement les notions que l'esprit doit accueillir — ou de faire apercevoir les caractères que l'esprit doit éliminer, — **la logique consiste alors simplement à parler une langue efficace, à employer les mots et à mettre en mouvements les associations d'idées qui conviennent au but à atteindre. Il n'existe pas de règle de logique qui puisse mettre l'interdit sur une notion déjà acquise et bien en notre possession**.
>
> [...]
>
> C'est le moment de répéter à propos du nombre ce que nous disions de la droite : le concept de nombre n'est pas donné une fois pour toutes avec un sens *ne varietur*. Nous l'avons vu se présenter sous des formes de plus en plus abstraites, mais sans que la plus évoluée puisse refouler complètement les formes antérieures (l'intuitive arithmétique). Elle n'existe au contraire que portée par celles-ci. L'activité dans la sphère abstraite s'accompagne d'une activité en quelque sorte parallèle dans les sphères antérieures, sans que jamais l'abstrait puisse se détacher complètement de ses réalisations et prendre une signification parfaitement autonome.
>
> Évidemment les choses changent d'aspect de tout au tout **si l'on prétend fournir par l'axiomatisation une véritable définition implicite de ce qui fait l'essence des nombres. Il n'est plus légitime de faire appel aux réalisations antérieures ; mais si leur emploi n'est plus justifié, tout le système d'axiomatisation s'effondre et l'axiomatisation manque son but**. §47

Et GONSETH de conclure ce chapitre sur une note proprement sienne :

> En un mot : La nature du nombre n'est pas une et immuable. Les abstractions successives marquent les étapes de son devenir. §48

34. Il est de l'essence du raisonnement de nous enfermer dans le cercle du donné. **Mais l'action brise le cercle.** [Berg1907] p. 193

1.7 La démystification de la logique

En bon pédagogue, Gonseth jette un regard en arrière et nous dresse quelque synthèse de l'émergence du logique :

> les édifices géométriques et arithmétiques ne prennent pas de prime abord dans notre esprit l'aspect d'une structure logique, mais [...] ils revêtent une certaine forme qui est comme une véritable substance intellectuelle. Plus encore que par eux-mêmes, ces résultats nous importent par leur portée générale, car il n'est guère possible de montrer par des exemples plus frappants comment procède la pensée dans le monde des abstraits.
>
> [...] **c'est à travers le géométrique, à travers l'arithmétique qu[e la notion du « logique pur »] va se constituant**, du moins partiellement. **Son sens n'est pas donné *a priori*, il se fait au fur et à mesure que la pensée progresse**. C'est en ce sens que les relations et les chaînes de conséquences qu'on peut établir dans le monde des formes géométriques ou dans celui des nombres entiers apportent aux notions de relation logique et de conséquence logique une partie de leur signification. Ce ne sont naturellement pas les seules sources de signification [...] mais il importe de les avoir aperçues sous l'angle de la réalisation de concepts en voie d'abstraction.
>
> **A mesure que *le logique pur* va ainsi précisant sa signification, on aura déjà remarqué — conséquence peut-être imprévue — que la signification de *la logique* va s'estompant et se diversifiant**. §49

Il présente ensuite, avant de les critiquer, quelques opinions concernant la logique, « comparable à une pierre de touche quant à la façon dont on envisage et apprécie l'abstrait ».

Nous ne détaillerons pas toutes ces analyses et critiques :

1. aux §50 et §56, I. Kant (*Critique de la raison pure*) ;
2. aux §51 et §57, S. Mill (cité de *L'Expérience humaine et la causalité physique* de L. Brunschvicg) ;
3. aux §52 et §58, E. Husserl (*Logische Untersuchungen*) ;
4. aux §53 et §59, H. Poincaré (*La Science et l'Hypothèse*) ;
5. aux §54 et §60, L. Brunschvicg (*L'Expérience humaine et la causalité physique*).

Deux citations nous paraissent retenir l'attention. La première, de Poincaré, dénonce de façon on ne peut plus frappante le dilemme [35] auquel se confrontent les tenants d'une mathématique à la fois idéale et conforme au réel [36] (deux positions que Gonseth distingue et sépare clairement [37]) :

> **« La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? »**
> §53

La seconde, de Brunschvicg, condamne l'intrusion d'une logique idéale dans la mathématique visant l'étude du réel :

35. qui porte aujourd'hui le nom de Benacerraf : exiger que n'importe quelle théorie offrant le fait d'être un théorème comme une condition de vérité *explique aussi le raport entre le fait d'être vrai et le fait d'être un théorème.* [...] plus justement nous cernons le concept de preuve, et plus intimement nous relions la définition d'une preuve à des caractéristiques combinatoires (plutôt que sémantiques), et plus il devient difficile de la mettre en rapport ave la vérité de ce qui est « prouvé » – c'est du moins ce qu'il semble. [GanSma2013] p. 84/87 Benacerraf's point, in short, is that **a good semantics for mathematics goes together with a bad epistemology, and a good epistemology goes together with a bad semantics**. This is what has becom known as Benacerraf's dilemma. [PanSer2013] p. 109

36. ceux qui veulent suivre la mathématique pure dans sa tendance à rejeter toute donnée de l'intuition ou des sens [. . .] ont sacrifié au souci de la rigueur celui du caractère objectif de leurs études. Et n'est-ce pas à eux que s'applique cette remarque de Mill : « Je crois que **le caractère de nécessité assigné aux vérités des mathématiques, et même la certitude particulière qu'on leur attribue sont une illusion** qui ne se maintient qu'en supposant que ces vérités se rapportent à des objets et à des propriétés d'objets purement imaginaires. » [Milh1898] p. 50-51

37. *Pourquoi ne pas accepter que notre aptitude à spécifier ce que nous voulons dire est nulle, et qu'ainsi,* ***notre aptitude à prouver est non avenue ?*** **Si vous voulez des mathématiques pleins de sens, vous devez renoncer à la certitude. Si vous voulez la certitude, laisser tomber la signification**. Vous ne pouvez avoir les deux. *Le galimatias est à l'abri des réfutations, les propositions chargées de sens sont réfutables par extension de concepts.* [Laka1964] p. 130

« [...] La théorie de la physique rejoindra donc la théorie de la mathématique, dès que celle-ci sera **débarrassée du fantôme d'une raison qui serait transcendante au cours de la pensée mathématique**. Alors, en effet, l'épistémologie mathématique ne comportera plus une méthodologie susceptible de se traduire en formules extérieures au savoir de la science et valables indépendamment de ce savoir lui-même. De la mathématique, il sera vrai, comme il est vrai de la physique même, que la science ne serait rien si elle prétendait se former indépendamment de l'expérience, se développer en se séparant d'elle. Au lieu d'imaginer la génération spontanée d'une axiomatique pure, il faut considérer la déduction comme un moment second, lié à la régression inductive qui a son point de départ dans l'expérience, et par quoi la géométrie est proprement, suivant l'expression d'Auguste Comte et de M. Einstein, une science naturelle, c'est-à-dire, en définitive, une science proprement dite. » §54

Les commentaires de GONSETH abondent dans notre sens, démystifiant toute absoluité de la rigueur mathématique :

L'idéal de rigueur absolue a été de tous temps et l'est encore aujourd'hui, quelque chose comme un dogme intangible. La spéculation mathématique, dans sa forme et dans son objet, y plonge des racines profondes et vivaces, et peut-être y a-t-il peu de mathématiciens qui soient disposés à le mettre en question. Cependant nous ne pouvons hésiter à le qualifier de pré-critique : **la science mathématique doit s'en dégager, si elle veut concilier les deux esprits qu'elle porte en elle, et dont l'un regarde le réel, tandis que l'autre s'en détourne**. §59

Nous voici arrivé à notre dernière citation [celle de Brunschvicg]. C'est elle qui apporte dans ce débat la note véritablement nouvelle. **Les mots « le fantôme d'une raison qui serait transcendante au cours de la pensée mathématique » mettent directement en question l'idéal de rigueur dont nous venons de parler. Pour la première on voit s'évanouir l'auréole d'absolu qui, encore pour un Poincaré, s'attachait à la notion de déduction logique**. §60

1.8 La logique : une physique de l'objet quelconque, ...

Ce chapitre est à nos yeux l'un des plus importants, vu la part que la logique occupe au sein des sciences – et tout particulièrement de la mathématique. C'est en effet ici que se trouve cerné le stade intuitif de la logique, ce qu'on peut en espérer sans idéalisation – ce qui est annoncé dès le début :

la logique est une méthode à la fois « finale » et « objective », dont l'objet primitif est à rechercher dans *les réalités les plus immédiates et les plus communes* du monde physique ; et **dont les *fins sont celles de l'action***. En un mot : la logique devra prendre l'aspect d'une science naturelle de caractère très primitif, qu'on pourrait peut-être appeler **la *physique de l'objet quelconque***. §61

Il a déjà été suggéré (§25) que la logique s'occupait des relations entre objets *indépendamment* des singularités de ces derniers – cela éclairera le qualificatif « *quelconque* ». L'apparition de « la *physique* » (et d'une « science naturelle de caractère très *primitif* ») évoque des lois naturelles très primitives, pratiquement assurées, que seront "les lois de la logique".

Reste à clarifier « l'objet », par ailleurs concept cardinal dans la description de toute combinatoire – dont l'arithmétique. Le gain à la clef est par conséquent de taille : *refonder le nombre et la logique !*

Rejoignant des propos précédents sur le concept "longueur" (§20), GONSETH commence par pointer l'*origine intuitive* du concept idéalisé d'objet :

Il y a [...] dans notre connaissance, deux stades où la notion d'objet est vacillante ou chancelante. Le premier est celui de la prime enfance, le second celui où ont abouti les recherches de la physique moderne sur la nature de la matière. [...]

La physique moderne a ébranlé la notion d'objet à un triple point de vue, au moins [...]

> Dans chacun de ces trois cas, l'objet a perdu ses propriétés caractéristiques d'avoir une forme déterminée, d'exister sans réticence, et d'occuper un endroit déterminé de l'espace. Il ne désigne plus qu'une totalité assez mal définie qui ne se manifeste plus que par des effets d'ensemble pratiquement déterminés entre certaines limites, mais non déterminés « jusque dans l'infiniment petit ». En un mot, **la notion de l'objet se dégrade jusqu'à n'être plus qu'un « préjugé macroscopique »**.
>
> [...] L'enfant n'entre que peu à peu en possession de l'instrument mental qui lui permettra de réaliser la permanence et l'individualité de l'objet sous la multiplicité des sensations, de concevoir l'unicité du lieu sous la diversité des images, d'apercevoir enfin le nombre et sa constance dans la pluralité. §62

Ainsi démystifié, l'objet n'en reste pas moins une *forme intuitive*, finement taillé aux fins de l'action immédiate :

> de même que, sur une carte géographique, vous ne trouverez pas la fleur des champs, ni l'insecte qui passe, ni l'arc-en-ciel dans la cascade, de même tous les phénomènes naturels qui restent au-dessous d'un certain ordre de grandeur n'entrent plus individuellement dans nos sensations. **Il en est enfin de même du savoir intuitif inscrit dans les formes intuitives : il est du même degré de précision ou mieux encore d'imprécision, que nos observations sensorielles**. C'est sur celles-ci que ces formes sont accordées. Ce sont, elles aussi, des instruments mentaux d'une certaine robustesse, adéquats à l'action immédiate, naturelle et quotidienne, mais impropres à des effets trop minimes.
>
> C'est cependant par leur insertion dans ces formes que les signes des choses nous restituent la réalité de celles-ci ; la « chose » n'a d'étendue, ne se localise, en un mot ne devient objet que par la façon dont elle est intuitivement repérée. **Au sens même où nous disons que la couleur ou le temps sont des formes intuitives de notre connaissance, il nous faut donc dire que *l'objet est une des formes primaires sous laquelle se présente la connaissance* et dans lesquelles se manifeste l'incidence du plan mental sur le plan naturel**.
>
> [...] **Ce découpage schématique d'une réalité fuyante en objets distincts, est merveilleusement conforme aux nécessités immédiates. Il peut ne plus l'être à certaines nécessités de la science**.
>
> [...]
>
> En résumé : la notion d'objet est de la même nature que la notion de droite ou que la notion de nombre. Elle recherche le réel et l'atteint dans une certaine mesure ; mais elle ne l'atteint qu'à peu près ; c'est un *abstrait schématisant.* §62

C'est dans cette forme intuitive que se fonde – nous le disions – la combinatoire, l'arithmétique. Qui nous empêche de voir cette dernière comme l'un des premiers stade de la *physique* ?

> Nous aurions pu déjà écrire à propos du nombre entier : « **L'arithmétique, dans le stade intuitif spécialement, est un chapitre, un des tout premiers chapitres de la physique : celui qui s'occupe des lois concernant les groupes d'objets**, la réunion de deux ou plusieurs groupes en un seul, le partage d'un groupe en groupes partiels, les permutations des objets dans un groupe, etc. **Le nombre des objets que comprend un groupe**, avons-nous déjà dit, **est une propriété physique de ce groupe, une *qualité***, comme sont aussi des qualités la couleur ou le poids d'un objet, sa forme et le fait d'occuper un lieu déterminé dans l'espace. **Certaines parties de cette physique tout élémentaire sont actuellement attribuées à la géométrie : ce sont celles qui ont trait à la localisation des objets**. Les expressions « à droite », « à gauche », « entre, devant, derrière, près, loin, plus près, plus loin, grand, plus grand, etc. », ont toutes pour fonction de désigner et de décrire la portion d'espace que peut occuper un objet. Certaines combinaisons de ces notions très simples expriment des faits notoirement exacts, quelle que soit la nature des objets considérés — pourvu que ce soient des objets authentiques !
>
> C'est le cas des deux affirmations que voici :
>
> 1) Si l'objet A est à droite de l'objet B et à gauche de l'objet C, A se trouve entre les deux autres ;
>
> 2) Si l'objet A est à l'objet B dans le même rapport de forme que la main gauche à la main droite, s'ils sont donc symétriques, et si l'objet C est aussi symétrique de l'objet B, A et C sont de forme identique.

> **Ce sont deux *lois empiriques de l'objet*, et la science de l'espace n'est, à ses débuts, qu'un catalogue de lois de ce genre**. §63

C'est en poursuivant naturellement dans la description de ces lois physiques, *empiriques*, qu'émergent les premières lois logiques [38], les premières *lois primitives de l'être* [39] :

> Sur le même palier, ou peut-être même sur un palier inférieur, **il existe encore toute une série de lois de la même nature, empiriques au même degré, et jouant un rôle essentiel dans la structure de nos connaissances intuitives** :
>
> [...]
>
> ***Un objet ne peut être à la fois présent et absent*** [40].
>
> [...]
>
> ***Tout objet est (quelque part) ou n'est pas.***
>
> [...]
>
> Il est clair que, pour pouvoir agir et penser, il faut pouvoir supposer que les choses conservent leur identité. Par exemple, pour pouvoir parler de Paul, il me faut être sûr que Paul ne sera pas Pierre dans un instant. Mais, ceci posé, il est tout aussi nécessaire de remarquer que la loi :
>
> *Toute chose est identique à elle-même*
>
> n'est que schématique. **Du fait même qu'un chose appartient au monde phénoménal, elle ne reste jamais *absolument et complètement identique* à elle-même**. C'est ainsi que, demain, Paul ne sera plus tout à fait ce qu'il est aujourd'hui, sans pour autant cesser d'être Paul.
>
> [...] **Avant de distinguer dans les très banales propriétés de l'objet que nous venons de commenter le premier dessin des trois premières règles de la logique, il faut les replacer dans le « halo intuitif » dont elles sont abstraites, et auquel elles ne sont que sommairement adéquates**.
>
> Ceci dûment posé, rien ne nous empêche de formuler en termes précis les trois premières lois de l'objet, valables pour un objet quelconque *que nous désignerons par la lettre A*. Les voici :
>
> 1) A est A.
>
> C'est le principe d'*identité* ;
>
> 2) On a toujours et seulement les deux cas suivants :
>
> A est
>
> et A n'est pas
>
> C'est le principe du *tiers exclu* ;
>
> 3) Les deux cas précédents s'excluent.
>
> C'est le principe de *contradiction.* [41] §63

Ainsi l'aspect « physique » [42] annoncé de la logique est-il clairement exposé.

Gonseth revient ensuite à « l'objet quelconque », à distinguer de l'objet « général », « idéal » :

> « Nous désignons un objet, d'ailleurs quelconque, par la lettre A ! » Quel est le rôle de ce dernier signe ? [...] Ce que nous lui demandons, c'est de réaliser au même titre que l'objet originel, par son identité avec lui-même, par le fait de sa présence ou de son absence, les lois fondamentales de l'objet. Il n'est que le support de celles-ci ; il est apte à les réaliser concrètement, il se prête à les restituer par abstraction ; en un mot, c'est un *modèle* adéquat (au sens pratique) de *l'objet.*

38. Logique et géométrie s'engendrent réciproquement l'une l'autre [...]. C'est de l'extension d'une certaine géométrie naturelle, suggérée par les propriétés générales et immédiatement aperçues des solides, que la logique naturelle est sortie. C'est de cette logique naturelle, à son tour, qu'est sortie la géométrie scientifique, qui étend infiniment la connaissance des propriétés extérieures des solides. [Berg1907] p. 162

39. Toute la logique élémentaire peut être regroupée autour des notions d'objet et d'existence. *Les lois qu'elle formule trouvent alors leur réalisation naturelle dans le domaine des objets concrets ; elles y prennent la signification de lois naturelles très primitives et pratiquement infaillibles.* [Gons1937] §54

40. il n'est pas possible à la fois d'effectuer et de ne pas effectuer un acte bien déterminé : la logique de l'action comporte cette exigence bivalente qui est inscrite dans le concept même d'acte. [Cave2001] p. 40

41. On remarquera que, dans ces trois énoncés, tous les mots n'ont que leur signification ordinaire. Il ne s'agit plus ni d'identité purement existentielle, ni d'existence pure. Nous nous sommes, à nouveau, confiés à **nos connaissances intuitives et pratiquement sûres** concernant les signes que nous savons tracer sur le papier. [Gons1937] §49

42. on peut énoncer l'axiome que voici : *Deux objets déterminés entrant dans la forme de l'équivalence ne peuvent entrer dans la celle de l'exclusion mutuelle.* Il suffit de revenir aux réalisations d'il y a un instant, pour comprendre que *cet énoncé formule **une loi naturelle*** du monde des objets matériels, **une loi extrêmement primitive** et, par là même, **d'une validité pratiquement infaillible**. [Gons1937] §51

> [...] **ce qu'il y a à la fois derrière l'objet concret et derrière son signe, c'est d'abord la notion abstraite de *l'objet général*, de l'objet idéal qui porterait toutes les lois de l'objet et celles-là seulement ; il y a ensuite l'idée de la présence en un exemplaire individualisé de cet objet général, l'idée de *l'objet quelconque*.** §64

Un mot sur les *connecteurs* logiques, qui prendront racine dans certaines *formes logiques* :

> L'énoncé des principes de contradiction et du tiers exclu, par exemple sous la forme que voici : « Ou bien l'objet A est, ou bien il n'est pas », montre très distinctement que la conception de l'objet s'accompagne d'une véritable floraison d'abstraits accessoires ou dérivés. L'énoncé précédent évoque, en effet, simultanément la présence et l'absence de A ; il évoque non pas deux phénomènes que je sais me représenter conjointement, parce que la réalité me les présente habituellement conjoints ; il demande au contraire que je réunisse dans une même pensée deux événements qui s'excluent l'un l'autre : il exige donc **que je passe de l'idée d'existence à celle de possibilité, du fait à sa virtualité** — plus encore **à la conception totalitaire de tous les cas**.
>
> [...]
>
> *Les conjonctions* ou, si, et..., etc., *se réalisent intuitivement par l'intermédiaire de certaines formes mentales* ad hoc. §65

Mélangés à ce que nous appelions les lois primitives de l'être, les connecteurs vont permettre d'exprimer plus généralement des *lois primitives de l'existence*, telle la loi de De Morgan ou toute tautologie. Ces dernières constituant l'objet de la logique propositionnelle, c'est avec un regard nouveau et insolite que Gonseth propose de considérer la logique :

> C'est naturellement toute la logique élémentaire qui pourrait être présentée sous cette forme : *celle d'une théorie préliminaire de l'existence objective.* §66

Si nous résumons les aspects de la logique traditionnelle que Gonseth vient de refonder, il manque le moyen d'action, la *déduction*. Elle sera plus amplement étudiée au chapitre XVII. Mais le syllogisme est présenté dans son fondement intuitif :

> Le tout contient la partie et la partie ne fait pas le tout. L'origine intuitive de cette règle dite logique est si évidente qu'il est superflu d'y insister. La seconde loi à laquelle on est tout naturellement conduit est celle-ci :
>
> **Ce qui est dans la partie est aussi dans le tout.**
>
> **Et c'est au fond déjà la règle du syllogisme.**
>
> On parvient également à celle-ci en partant de **la relation du contenant au contenu, telle que la réalisent les emboîtements successifs**. §67

En jetant un regard derrière nous, c'est *toute la logique propositionnelle* que Gonseth vient de refonder dans l'intuitif – et, partant, la combinatoire. Un travail remarquable.

Il nous reste cependant un élément à ajouter au refondement qui précède pour obtenir la logique classique : l'objet quelconque dont la logique étudie la physique doit pouvoir être qualifié, *prédiqué*.

Le temps est venu de démystifier les universaux.

1.9 ... des qualités, ...

Lors de la construction de la réalité (chapitre III), nous nous sommes vu posséder des formes intuitives prêtes à recevoir des *qualités intuitives*. En vue de la logique prédicative, ce chapitre interroge ces qualités et leur lien avec l'objet.

Toujours dans l'intuitif, Gonseth vient rappeler le caractère sommaire et inachevé des qualités :

> L'objet n'est jamais conçu complètement dépouillé de ses qualités physiques : son individualité, son unité ne peuvent être aperçues que si nous savons aussi réaliser la constance ou la variation concomitante de certains caractères comme d'être rond ou de forme irrégulière, et en même temps d'être rouge et d'être lourd. En un mot, *l'individualisation de l'objet s'accompagne nécessairement de l'individuation de ses qualités ou propriétés physiques.*
>
> [...] **la qualité** ne nous introduit pas dans la connaissance parfaite de telle ou telle propriété de structure d'un objet, [...] elle n'exprime pas une façon d'être en soi et définitive de celui-ci ; mais [...] elle **ne nous communique qu'une vue d'ensemble, grossière et sommaire**, qu'une connaissance plus approfondie vient souvent détruire pour la remplacer par quelque chose de foncièrement différent. §68

Il prend ensuite l'exemple de la qualité "couleur" dont il rappelle trois faits (§69) et qu'il analyse (§70), avant de demander :

> Qu'est-ce maintenant que la propriété « d'être rouge » par exemple, pour tel ou tel objet ? Nous ne croyons pas pouvoir mieux répondre qu'en citant le jolie passage suivant de J.-H. [cité de *Les compagnons de l'univers*] :
>
> « Il y a dans mon pays une cascade qui, depuis mon enfance, évoque *grosso modo* un visage barbu. Vu à quelque distance, ce visage éblouissant de blancheur semble aussi immobile que les rocs qui l'environnent... »
>
> Eh bien ! **Tel objet est rouge comme la cascade a l'aspect d'un visage immobile**. Si l'on se rapprochait peu à peu de ce dernier, la forme du visage commencerait par perdre sa netteté. Il faudrait bientôt un effort constructif de l'attention et de la mémoire pour le distinguer encore. Et tout à coup, il disparaitrait pour faire place à la la vision d'une autre réalité, celle de l'eau tumultueuse et rejaillissante. §71

L'exemple développé de la qualité "couleur" vient renforcer le propos gonsethéen :

> La désignation des qualités sensibles recouvre toute une physique intuitive, toute basée sur les notions fondamentales de *l'objet* et des *propriétés physiques prédéterminées* de l'objet. Nous ne pouvons assez insister sur les deux points que voici :
>
> a) Ces notions fondamentales intuitives ne sont que des schématisations simplificatrices [...]
>
> b) **Cette physique des qualités immédiatement perçues forme la première assise de la physique du laboratoire, de même que la connaissance intuitive de l'espace dit physique est le fondement de la géométrie, et que la physique de l'objet quelconque contient les premiers rudiments de la logique**.
>
> [...]
>
> **Toute notre connaissance « dégénère » en fin de compte en événements qui relèvent de la physique intuitive et naïve**, en coïncidences dans le temps et l'espace, en nombres de perceptions distinctes, en identité ou en diversité de certaines qualités, etc. §72

Devient alors critique la question du *raccord* entre les physiques intuitive et expérimentale, de suite réglée en invoquant notre *capacité représentante* par des signes :

> Comment peut-il alors se faire que la science porte notre connaissance au delà du domaine de l'intuition immédiate ?
>
> C'est naturellement par le fait que **certaines configurations accessibles à notre intuition peuvent être regardées comme les images schématiques de configurations ou de phénomènes moins accessibles ou d'une autre nature**. §72

Gonseth en vient ensuite à la logique des *classes* proprement dite et propose une définition pour distinguer les objets de cette logique :

> Cette notion de l'[*objet doué de ses propriétés caractéristiques*], schématique à un très haut degré, et pourtant si merveilleusement appropriée aux fins humaines, nous l'appellerons *l'objet aristotélicien.* §73

Isoler une seule de ces propriétés mène directement à la notion de *classe* et de *classe contraire*, dont on retrouve sans surprise affirmé le caractère *en devenir*[43] :

> **La classe est un groupement ouvert, susceptible d'être complété si la nécessité s'en présente**. Ainsi la classe des objets rouges est une notion qui, pour se constituer, n'exige pas la connaissance préliminaire de tous les objets rouges. Il faut simplement que, de chaque objet qui se présentera, on puisse distinguer et décider s'il doit être attribué à la classe ou non.
>
> Le processus qui conduit à l'individualisation de l'objet conduit naturellement, nous le disons, à l'*individualisation des qualités sensibles*. **La présence ou l'absence d'une qualité s'abstrait à son tour dans la notion des qualités contraires. C'est à ces dernières que vient d'étendre la validité des principes de contradiction et du tiers exclu**. Les caractères d'existence de l'objet s'étendent ensuite aux classes, et en particulier aux classes complémentaires. §73

L'appel vers les *universaux* est irrésistible[44]. GONSETH nous explique en quoi leur théorisation par la scolastique a échoué, en concluant de manière à ne laisser planer aucun doute quant au succès de leur démystification :

> les caractères de l'objet aristotélicien sont projetés sur les *universaux*, de sorte que la méthodologie de la scolastique revient au fond à ériger une certaine « théorie de l'objet » en système universel. [...]
>
> [Cette entreprise] visait à un but trop élevé pour ses moyens ; le développement du savoir en a fait ressortir les faiblesses. Mais il faut bien remarquer que, si l'on accepte de n'y voir qu'une théorie schématique de l'objet aristotélicien, elle présente la première esquisse distincte de la méthode que nous avons constamment mise en évidence : **conception de certains abstraits à partir des vues intuitives, et constitution d'une théorie plus ou moins autonome sur la base de ces abstraits. Le vice essentiel**, qui l'a détachée du réel et qui l'a portée à une position extrême insoutenable, c'est de n'avoir pas reconnu sa propre nature ; **c'est de s'être donnée pour une théorie absolue** de l'être et des essences, **quand elle n'était qu'une esquisse schématique** d'une théorie de ce genre. §74

Avant de passer au chapitre suivant, fortement relié à celui-ci, et anticipant sur une discussion future concernant les antinomies ensemblistes, GONSETH nous signale au passage (§75) que les ensembles définis par Cantor regroupent des objets *typiquement* aristotéliciens[45], puisque ceux-là possèdent « une propriété caractéristique telle que l'on puisse juger de tout objet s'il appartient ou non à l'ensemble ».

L'objet aristotélicien était décrit par ses propriétés, ce qui d'une part faisait perdre de vue son unité et sa singularité (à moins de prendre pour propriété "être cet objet") et d'autre part était peu adéquat aux fins pratiques : si l'on demande « Va me chercher un livre », c'est une toute autre conception de l'objet dont nous ferons usage pour satisfaire la demande. Ce sera l'*objet gœthéen*, défini par son *type*, deux notions que GONSETH développe au chapitre suivant.

43. la signification d'un nom [...] est l'ensemble des attributs connus ou inconnus, que l'expérience et l'observation sont capables de nous révéler comme lui appartenant [...], dont la connaissance se fait **sans cesse et indéfiniment**. [...] les premières propriétés qui suggèrent un mot spécial pour une même chose [...] se dégagent d'observations répétées par le souvenir qu'elles laissent d'un certain nombre d'impressions communes. Mais à cela près, la connotation du mot présentera le même caractère de **progrès continu et indéfini** que dans le cas des objets particuliers. [Milh1898] p. 5-6

44. I say "A." Then I say "what did I say ?" Then you reply "you said 'A.' " Now the noise you make when saying "A" in this reply is different from the noise I originally made ; therefore, if "A" were the name of a particular noise, your statement would be false. It is only because "A" is the name of a class of noises that your statement is true ; your statement classifies the noise I made, just as truly as if you had said "you barked like a dog." This shows how **language forces us into generality even when we most wish to avoid it**. [. . .] Strictly, we ought not to say "I said 'A' " ; we ought to say "I said an 'A.' " All this illustrates a general principle, that **when we use a general term**, such as "A" or "man", **we are not having in our minds a universal, but an instance to which the present instance is similar**. [. . .] the sort of generality that seems to be involved in the repeated use of the word "black" is an illusion ; **what we really have is similarity**. [Russ1940] p. 36-37/70

45. Ce sera aussi le cas de la logique de Port-Royal dont les objet sont typiquement aristotéliciens : L'objet apparaît [. . .] simplement comme le sujet de certains attributs prédéterminés, *comme le support de certaines qualités*. L'écueil fondamental de cette systématique, c'est naturellement que la détermination effective des qualités et des attributs présuppose toute la Science. Et c'est en quoi se marque combien l'idée du réel a varié des temps de Port-Royal à nos jours. [Gons1937] §6

1.10 ... dont les types

> **nous reconnaissons une maison parce qu'elle est conforme à un certain *modèle intuitif*** [...].
>
> Comment ces modèles nous sont-ils données ? Ils sont **abstraits, évidemment des objets concrets auxquels ils correspondent**. [...]
>
> [...]
>
> Il n'est d'ailleurs pas absolument nécessaire que nous nous fassions une idée très détaillée de la façon dont nous entrons en possession de ces images mentales sommaires, pourvu que nous ayons reconnu le fait essentiel suivant : que **ces images n'ont qu'une très relative fixité**. Que chaque trait et chaque qualité peut varier entre certaines limites, sans que le sens du tout soit remis en question. L'objet n'y entre pas seulement par sa forme ou toute autre propriété physique, mais aussi par tels ou tels caractères de convenance, d'utilité, de destination, etc. ***Ces images mentales sont ce que nous appelons les types***[46] ***ou modèles intuitifs***. §76

> nous conviendrons d'appeler « **objet gœthéen** » l'objet considéré comme **déterminé** (en même temps que tous les objets du même nom) **par la conformité à son type**, et en l'opposant à l'objet aristotélicien dont il a été question au chapitre précédent. §77

Le gain est évident : de par leur plasticité et l'indétermination de certains de leurs traits, les types sont appelés à épouser les nécessités pratiques bien mieux que la "perfection" des universaux.

GONSETH nous signale (§78) l'utilisation du mot *type* en psychologie, sous la plume d'H. WALLON, puis nous révèle que le type est tout simplement et au même titre que l'objet une *forme intuitive* :

> Imaginés pour caractériser des individus spéciaux ou anormaux, [la signification des types psychologiques qu'on a été amené à concevoir] s'élargit et se transforme jusqu'à décrire une propriété de structure de la mentalité normale. **L'idée générale de type** est engagée dans un processus semblable d'extension. **Conçue d'abord à propos des objets concrets, elle a tendance à s'étendre à tout ce qui peut s'objectiver ; et à gravir, comme l'idée d'objet, toute l'échelle des abstraits**. Il faut accepter comme un fait que notre activité mentale soit ainsi orientée ! C'est ce que nous exprimons aussi en disant que : ***l'objet et le type sont des formes de notre intuition***. §79

Ce chapitre conclut en décrivant l'apport des trois derniers dans la démarche gonsethéenne :

1. la physique de l'objet quelconque décrit l'émergence de lois (intuitives car pratiquement assurées) portant sur les *relations* entre notions intuives ;
2. la physique des qualités « vient simplement embrasser les bases intuitives sur une plus grande étendue » et porte en elle les germes d'une physique intuitive *qualitative* (et par là élargie) ;
3. les types, cas particuliers de qualités intuitives, supportent les *objets* du discours axiomatisé[47] :

> [le chapitre *la physique de l'objet quelconque*] montre que le processus par lequel les notions intuitives se forment et entrent en rapport les unes avec les autres *est lui-même une sorte d'esquisse intuitive de ce que nous avons nommé si souvent la schématisation axiomatique*.
>
> [...] rien ne nous empêche de distinguer dans la physique intuitive le premier dessin d'une structure axiomatique qui aurait pu être dégagée. C'est maintenant dans ce cadre qu'il faut replacer les types, pour se faire une idée de leur rôle. Ils forment en quelque sorte l'armature de la pensée ordinaire. *Ils y jouent un rôle comparable à celui des notions fondamentales dans les axiomes.* §80

46. Pour comprendre le « encore une fois la même chose » il faut considérer un trait non pas comme instance concrète dans l'espace et le temps (ce que l'on appelle aussi une « marque »), mais comme instance (« token ») d'un « type ». On a tous l'expérience d'une telle « perception » qui remonte au cours préparatoire. En apprenant à écrire, l'élève s'exerce à exécuter un « token » selon le « type » imposé par le maître et, inversement, la maître signale s'il reconnaît dans le « token » son « type ». Parsons appelle l'intuition du type à travers la perception du « token » une « intuition perceptive ». Or, le « type » en tant que signe n'est plus visible ; sont seulement visibles « marques » des signes qui sont des « token » du « type ». Parsons appelle « objets quasi-concrets » les objets abstraits (signes) dont les instances sont des objets concrets. [Hein2013] p. 55

47. On ne parle pas ici des objets *signifiants* (traits de crayon...) mais de ceux *signifiés* (nombre, point...). De fait, les types légitimeront le jeu symbolique – celui des signifiés, des *sign-tokens* de HILBERT.

Commentons d'un point de vue moderne : on verra dans le premier point la logique *propositionnelle* et dans le deuxième celle *prédicative* ; en se souvenant par ailleurs que le discours sur *plusieurs* catégories d'objets (comme le cas des vecteurs et des scalaires pour les espaces vectoriels) peut être réduit à un discours sur *une seule* catégorie d'objets en rajoutant des prédicats singulaires "*typifiant*" les objets[48], on comprendra en quoi le troisième point est englobé dans le deuxième (tout en nécessitant une mise en relief propre).

1.11 La vérité idéale (logique propositionnelle)

En guise de rappel, GONSETH resitue l'*origine intuitive* des notions logiques fondamentales :

> Jusqu'ici nous avons mis tout notre effort à conférer à la logique l'aspect d'une science naturelle très élémentaire. Les notions logiques fondamentales, celle d'objet, de chose ; celles d'existence ou de non-existence, celles de qualité et de classe, en même temps que les opérations logiques « et » et « ou » ont perdu leur caractère traditionnel d'abstractions prédéterminées dans un monde mental *a priori* : elles se sont toutes révélées comme des schématisations à la fois efficaces et inachevées, suggérées par la réalité et conformes à notre propre structure mentale. §81

C'est bien dans ce cadre intuitif que se fonde le vrai et le faux intuitifs et c'est de lui d'où vont sortir *les vrai et faux idéaux* :

> La logique va [...] prendre un nouvel aspect. Du rôle de « Formulaire de l'existence », elle va passer à celui d'une « Théorie du Vrai et du Faux » ! L'idée du vrai a déjà fait l'objet d'un dialogue contradictoire entre Sceptique, Idoine et Parfait. Aussi pouvons-nous nous borner ici à quelques remarques simples. **Le vrai et le faux sont naturellement indéfinissables : tout ce qu'on peut faire, c'est d'expliquer comment des notions de cette espèce peuvent venir doubler le concret dont elles sont sorties**. Sous la forme du vrai et du faux sans prétentions à une infaillibilité absolue, elles se réalisent dans la sphère des actions simples, pour l'interprétation desquelles les vues naïves et toutes primitives sur la réalité sont suffisamment efficaces. On pourrait à cette échelle, définir le vrai comme étant ce qui ne peut être démenti par les événements ou les faits... Mais à condition que la vérification dépende elle-même d'une action simple, ou d'une constatation de sens commun. « Est-il vrai, oui ou non, que la neige soit blanche ? » — « Mais certainement, à la condition que vous fassiez abstraction de cette ombre bleue, de ce reflet jaunâtre, de cette bande grise, etc. Ne vous arrêtez pas trop aux détails, sans quoi il nous faudra analyser toutes les circonstances, et appeler tous les ordres de la connaissance à notre secours. Acceptez la définition précédente pour ce qu'elle vaut : nous savons bien combien elle est sommaire, et que tous les termes en deviennent problématiques si l'on en veut serrer le sens de trop près. »
>
> La notion du vrai logique sort de cette première idée du vrai comme la notion de la droite idéale sort, par exemple, de la rectitude grossière d'une rue.
>
> Pour ce qui nous concerne, **c'est spécialement par l'intermédiaire des lois de l'objet que nous voyons s'introduire l'idée du vrai**. Qu'elles appartiennent à la catégorie des règles arithmétiques ou géométriques, ou plus spécialement à celle des lois prélogiques, **elles sont pratiquement infaillibles dans leur domaine naturel de validité. Par une pente qui lui est, semble-t-il, naturelle, l'esprit imagine une infaillibilité absolue, une adéquation sans réserves à des réalités déterminées une fois pour toutes jusque dans leur essence... et en fait les attributs d'une vérité idéale. C'est alors *elle* qu'il voit réalisée, plus ou moins parfaitement, dans tous les cas concrets**. §82

Et GONSETH de nous mettre en garde : ce vrai idéal n'est pas supposé supplanter celui qui imprègne les édifices rationnels classiques (un idéal qui a été démystifié). Ce ne serait même pas sensé de les comparer puisqu'ils vivent dans deux sphères (l'intuitive et l'idéale) que toute la démarche gonsethéenne s'efforce de distinguer et séparer :

---

48. Si l'on veut par ce procédé distinguer les objets d'ordre n quelconque, il faudra introduire des objets d'ordre $n+1$. Par exemple, dans la logique bisortale de [Ferr2015] (où le schéma de compréhension est limité à l'une des deux sortes de prédicats), recourir à ce procédé nécessiterait l'introduction d'objets du *troisième* ordre, ce qui pourrait déplaire.

> On saura faire ici les distinctions nécessaires ! C'est donc cette vérité abstraite et schématique, et son contraire, que nous mettrons à la base de la Logique du Vrai et du Faux. Mais il est bien clair qu'**accepter ces notions pour y fonder un édifice axiomatique, ce n'est pas nécessairement accepter aussi le rôle (traditionnel) qu'elles ont joué dans les édifices dits rationnels, rôle que nous avons dénoncé comme précritique et que nous avons énergiquement repoussé !** [...]
>
> [...] la notion de continu géométrique peut être regardée comme assurée axiomatiquement. Mais ce serait une erreur manifeste que d'en vouloir déduire la continuité de la matière. Et ce serait une égale erreur que de conclure de la discontinuité de toute répartition de la matière à l'inexistence du continu géométrique. **Il y a là deux ordres d'existence différents, l'existence axiomatique ne doublant efficacement l'autre que schématiquement, et ne pouvant lui être assimilée qu'entre certaines limites**.
>
> C'est de la même façon qu'**il est parfaitement licite d'admettre d'admettre le Vrai absolu et le Faux intégral au rang d'idées schématiques**, et de faire peser sur eux tout le poids d'un système axiomatique, **sans accepter pour cela toutes les projections, assimilations et identifications qu'on est porté à faire dans les autres compartiments de la pensée**.
>
> [...] IDOINE. [...] **L'emploi du vrai abstrait est légitime pourvu qu'on sache aussi s'en détacher**. §82

La mise en garde continue et démystifie toute réalité prédonnée :

> Ce qui est précritique, ce n'est pas la notion [du Vrai abstrait] en elle-même, pourvu qu'on ne se méprenne pas sur sa nature. **Ce qui est précritique, c'est d'imaginer qu'il y ait une réalité préformée à laquelle elle est adéquate**. §83

Ces précautions bien en tête, GONSETH peut poursuivre la démarche idéalisatrice. L'appliquer aux lois primitives de l'existence fournit des *lois idéales de l'« être pur »* :

> rien ne nous empêche de reprendre ce que nous disons, dans la Physique de l'objet, des combinaisons « logiques » :
>
> $$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \qquad \mathrm{A}\ \&\ \mathrm{B} \qquad \text{etc.}$$
>
> de formuler encore une fois tous les énoncés d'existence que nous connaissons déjà, mais en les « faussant » systématiquement, en remplaçant partout la notion d'existence au sens intuitif par celle d' « existence pure ». **Les lois empiriques deviennent alors des lois idéales, c'est-à-dire des axiomes.** §83

Le chemin est alors tout tracé pour idéaliser la logique (propositionnelle) : remplacer les objets par les propositions :

> Il n'y a maintenant plus qu'un pas à faire pour parvenir à la Logique élémentaire du Vrai et du Faux. Il faut tout d'abord changer de concept fondamental : au lieu de supposer que c'est un objet, il faut supposer que c'est un énoncé, par exemple un énoncé d'existence — énoncé qui n'interviendra d'ailleurs que par sa vérité ou sa fausseté. Quant au reste, il suffira d'imiter assez étroitement les lois de l'objet. §84

À ce stade de l'exposition, différents vrais vont s'entremêler dans le discours, différents vrais que GONSETH met en garde de bien distinguer !

> l'énoncé A — *v* est aussi un énoncé. Est-il vrai ? Est-il faux ? Mais, direz-vous, la chose est toute simple : il est vrai si A est vrai ; il est faux si A est faux ! Eh bien, en dépit de la simplicité de tous les termes, vous aurez fait une regrettable confusion. Vous dites :
>
> **Si A** EST VRAI, ***dire que A est vrai*** **est un énoncé vrai**. Or, dans le membre de phrase souligné deux fois, le mot « est » et le mot « vrai » doivent revêtir leur sens absolu, leur sens abstrait, — axiomatique si l'on préfère. Mais dans le membre non souligné, les mêmes mots s'appliquent à votre action « dire que A est vrai ». Vous retombez dans le monde de l'application, des réalisations du sens abstrait : dans la sphère des significations intuitives. En d'autres termes, je suis prêt à accepter votre suggestion, mais en la « faussant », en la sollicitant vers l'abstrait, en la hissant au rôle d'axiome.
>
> [...] acceptons les axiomes (pour tout X)

$$X \sim X - v$$
$$X \sim X - f$$

Ils nous font évidemment passer par-dessus les difficultés que nous venons de signaler. §84

Toujours dans son soucis de dissiper les confusions, GONSETH nous dévoile les présupposés (implicites) nécessaires pour vérifier un fait basique de la logique propositionnelle, démontrant *l'utilité clarificatrice* de son travail :

1. un vrai intuitif (pour juger de ce fait basique et d'autres) ;
2. une combinatoire intuitive (celle des symboles de propositions) ;
3. la forme intuitive "type" (pour reconnaître ces symboles[49]) :

> Nous ne pouvons laisser sans commentaires la vérification à laquelle nous venons de faire allusion [la validité des tautologies]. Sur quel plan a-t-elle lieu ? Quels moyens met-elle en œuvre ? Reste-t-elle dans l'abstrait, ou revient-elle sur le plan des réalisations ? [...]
>
> Tous nos explications sont basées sur la distinction des [quatre cas d'une table de vérité]. Or, celle-ci serait impossible **si nous n'observions sans y prendre garde, les lois fondamentales de l'objet et des groupes d'objets**. Nous avons introduit des symboles tels que & et →. Mais saurions-nous les reconnaître comme étant identiques, malgré leurs différences inévitables, **si nous ne savions pas concevoir, sans même le vouloir, le type correspondant** ?
>
> Bien plus encore ! Nous vérifions que deux formes sont équivalentes : mais pour le faire (et sans revenir encore une fois sur tout ce qui touche aux lois de l'objet), **nous retombons dans la signification ordinaire du vrai, que nous réalisons sans en avoir conscience**. Ainsi l'axiomatisation ne crée pas de toutes pièces un abstrait autonome : elle superpose un schéma à d'autres schémas, le sens du dernier ne pouvant jamais complètement se passer de ce que signifient les premiers. §84

Tout comme l'idéalisation de la droite, GONSETH nous cerne le moment clef et *sui generis* de cette première axiomatisation de la logique :

> L'instant décisif de cette axiomatisation n'est d'ailleurs pas celui où les axiomes sont explicitement énoncés, et où ils sont mis en formules. C'est bien plutôt celui **où les notions nouvelles sont nettement perçues comme abstraits par rapport aux notions premières**. [...] le moment où, **sans qu'on puisse expliquer en quoi consiste leur réalité — parce qu'elle est *sui generis*** — les nouveaux abstraits viennent occuper le premier plan de l'esprit. §85

Le chapitre se termine sur deux réalisations de la logique (§86), l'une arithmétique (le calcul booléen) et l'autre diagrammatique (les "patates" ensemblistes), annonçant une deuxième axiomatisation à venir.

Le chemin vers la logique prédicative doit passer par la *quantification*, objet du chapitre suivant.

1.12 La quantification idéale (logique prédicative)

Démystifier la quantification revient à démystifier les expressions "tous" et "au moins un"[50]. C'est, sans surprise, chose faite sur le terrain intuitif (du moins pour "tous") :

49. HILBERT expressly stated that it is the "forms" of sign-tokens that are to be the focus of the finitist's attention. And, for HILBERT, the "form" of a sign-token is independant of its time, place, chemical composition, etc. Thus, the objects of finitary thought are sign-tokens, but **sign-tokens treated as having only a "form" or "shape"**. The scope of a given finitary operation is, therefore, never just one or another particular token, but rather **the whole class of tokens sharing a given form**. [Detl1986] p. 51

50. Rappelons que l'interprétation naïve du quantificateur universel ∀ est une *conjonction* et celle de l'existentiel ∃ une *disjonction*. La distributivité de ∧ sur ∨ (ou loi de DE MORGAN) se logicise alors en une distributivité de ∀ sur ∃ (ou axiome du choix ensembliste) :

$$\forall a \in A,\ \exists b \in B,\ P_a^b \implies \exists b \in B^A,\ \forall a \in A,\ P_a^{b(a)}$$

Tant qu'il s'agit d'une catégorie peu nombreuse, d'un groupe d'objet étalés sous nos yeux et que le regard peut embrasser d'un seul coup d'œil, la signification du mot « tous » est immédiate [51].

[...] **Pour les collections peu nombreuses, l'opération intellectuelle qui consiste à en rassembler les éléments par la pensée comme on les rassemble dans un seul coup d'œil nous est si habituelle, correspond si bien à notre façon de construire le monde, que nous attribuons à une totalité une existence analogue à celle des objets ordinaires ; que nous allons jusqu'à la considérer comme une chose en soi. Nous avons mille peines à reconnaître que totaliser, c'est porter un schéma dans les choses, c'est interpréter ce que nous percevons de la « réalité » selon la structure et le penchant de notre esprit**. Mais nous sommes maintenant avertis. L'analyse des notions intuitives d'objet et de type, et surtout nos toutes premières réflexions sur les combinaisons logiques, telle que A & B ou A ∨ B, nous ont habitués à distinguer la part qui revient à notre structure mentale.

[...] si l'on a bien compris que **« et » est une création originale de l'esprit** on n'aura pas de peine à distinguer la même activité génératrice de formes et de modèles à l'origine de la notion « tous ». **C'est une remarque à laquelle il faut tenir fermement, si l'on ne veut pas d'emblée porter cette notion au delà de ses limites naturelles**.

« Tous » n'a ainsi, pour commencer, aucun sens portant plus loin que son emploi habituel. Il ne se constitue pas isolément, mais dans ses rapports avec toutes les notions usuelles de la même nature, telles que chacun, aucun, l'un deux, les autres, etc., sans compter celles que nous avons déjà mentionnées.

[...]

Dire de *tous* les objets d'une *certaine catégorie* qu'ils possèdent un certain *caractère*, c'est dire que *chacun* de ces objets le possède.

[...]

Dire *qu'aucun* de ces objets n'est présent, c'est dire que *chacun d'eux* est absent ou que *tous* sont absents. §86

De ce terrain intuitif, le "tous" idéal peut émerger, dont la *portée* se confond *in fine* avec celle des *classes* :

Les choses changent d'aspect, non seulement si l'on suppose que l'on a affaire à une infinité d'éléments, mais **déjà si leur nombre, tout en restant fini, devient suffisamment grand pour qu'on ne puisse les examiner un à un du premier jusqu'au dernier**. La signification de « tous » s'éloigne déjà sensiblement de ses origines intuitives. [...] **il est clair que l'évident a changé de signification. En l'absence du contrôle immédiat, du contact direct dans la sphère intuitive, tout devient pour une bonne part conventionnel**. [...] En un mot, le caractère d'abstraction que nous avions déjà souligné il y a un instant devient beaucoup plus sensible. **La construction verbale qui serrait d'aussi près que possible un acte intellectuel très commun et que rien ne nous empêchait de répéter, garde sa forme, mais renonce à s'accompagner toujours de la possibilité toute proche de réalisation. Elle revendique le droit de se porter plus loin que le domaine réduit où son sens était primitivement fondé : en un mot, de schéma qui ne voulait qu'être fidèle, la construction verbale prétend devenir schéma qui se constitue librement**.

[...] En un mot : le sens de « tous » ne précède ni ne suit [...] la notion de classe ou d'ensemble finis. Ces deux notions ont la même portée ; la même portée que **toute la logique des classes**. Et celle-ci est **un schéma axiomatique portant sur le plan de l'abstrait les notions et les relations que nous suggère notre expérience des classes suffisamment restreintes pour que nous en puissions distinguer effectivement *tous* les éléments**. Employer le mot « tous » selon nos habitudes de langage, c'est donc accepter de se servir de ce schéma. §87

Ainsi n'avons-nous pas de surprise en restant dans un fini "petit". Déjà le "fini" grand pose problème. À plus forte raison :

On s'éloigne encore plus du sens précédent si l'on passe aux catégories infinies. A-t-on encore le droit de parler par exemple de *tous* les nombres entiers, ou de *tous* les nombres rationnels ? N'est-il pas absurde de penser qu'on puisse les avoir passés tous « en revue » l'un après l'autre, puisqu'il n'existe plus de dernier, et puisqu'il est dans la définition de l'infini de ne pouvoir être épuisé ?

51. Où la transgression de l'intuitif concret et du finitiste a-t-elle lieu ? Visiblement dès qu'on emploie les concepts de « tous » et de « il y a ». D. Hilbert dans [Larg1992] p. 135

Rappelons tout d'abord la remarque nous faisions à propos de la *classe* logique. Celle-ci, disions-nous, est autre chose qu'un groupe d'objets tous donnés d'avance. C'est un groupement ouvert, susceptible d'être complété au fur et à mesure des besoins et des circonstances [...] encore en devenir. [...] Encore une fois, *tous* ne va ni plus loin ni moins loin que la notion de classe elle-même. [Dans « *Tous les objets sont rouges !* »,] **« Tous » formule une certaine hypothèque sur les objets présents et, surtout, sur les objets à venir ! Sa signification est ouverte. Et le fait qu'elle est ouverte fait partie intégrante de cette signification elle-même**.

[...] **Tout au plus remplacerons-nous** dans la règle que voici :

« S'il n'est pas vrai que tous les objets d'une classe soient rouges, c'est *qu'il y en a un au moins qui n'est pas rouge* » les termes soulignés **« il y en a un... qui n'est pas rouge », par cette autre tournure : « il s'en présentera un... qui ne sera pas rouge »**.

[...]

On ne s'étonnera plus, maintenant, de la contradiction contenue dans le fait qu'on parle de *tous les nombres*[52] entiers, sans pouvoir les « énumérer un à un jusqu'au dernier ». La contradiction existe véritablement, mais entre deux notions différentes : la première intrinsèquement relative à une suite infinie et dénombrable, la seconde relative à un groupe fini d'objets. §88

L'on notera au passage l'apparition du "au moins" dans la négation du "tous". La marque gonsethéenne de l'« en devenir » vient ainsi créer un singulier espace entre les négations classique et intuitionniste.

Une parenthèse sur le mot "quelconque", d'un usage incontournable en mathématique, et son lien étroit avec "tous" et le concept de "variable libre" :

« Si l'un quelconque de ces objets et noir, tous sont noirs. » Dans ce sens, « l'un quelconque » est d'ailleurs synonyme de *tout*. On aurait pu dire :

« Si tout objet de ce groupe est noir, tous sont noirs. »

Sa schématisation, qui pourrait être suivie parallèlement à celle de « tous », aboutit à **la notion de *variable libre***, relative à une catégorie, celle qu'on évoque dans les expressions suivantes :

Soit a un *élément quelconque de la classe,*

ou Soit n un *entier quelconque*,

ou encore Soit A un *point quelconque du plan*, etc.

Cette notion **représente un compromis entre celles de l'individu et de la totalité, un compromis aussi entre la détermination parfaite et l'indétermination totale**. Il ne viendrait aujourd'hui à l'esprit de personne de contester la primordiale importance de ce concept intermédiaire. §89

Arrivé à ce stade où la logique prédicative est clarifiée (exception faite des règles de déduction), il serait loisible de cartographier l'itinéraire gonsethéen. Or le voyageur a bien fait les choses :

Jetons un regard en arrière, sur le chapitre : La Physique de l'objet quelconque et sur les chapitres suivants. On peut les résumer en quelques mots. **De *toutes* les notions intuitives dont il y fut question (de celle d'objet en tout premier lieu)**, nous avons commencé par montrer qu'elles répondent au modèle tracé par Idoine : **elles sont sommaires, schématiques, inachevées**.

Nous avons ensuite indiqué dans les grandes lignes à quelles théories elles donnent naissance, ou mieux encore au sein de quelles théories elles s'élèvent au rang de notion abstraite :

a) **La notion « d'objet », en même temps que celles** de présence, d'absence, **d'être**, de non-être, de cas d'existence, etc., **s'ordonnent en une Théorie préliminaire de l'existence**, ou une Théorie des objets idéaux ;

b) **Le vrai et le faux intuitifs avec la notion d'énoncé**, après être devenus le vrai et le faux absolus (que nous appellerons platoniciens, pour les distinguer du vrai et du faux brouweriens dont il nous faudra dire quelques mots plus tard) se sont constitués en Théorie ou Logique du vrai et du faux. [...]

c) **Les notions intuitives d'objets, de qualité et de propriété conduisent aux notions abstraites de classe et d'attribut**. [...]

52. Je l'ai toujours dit : on ne peut pas parler de *tous* les nombres parce qu'il n'y a pas « tous les nombres. » [Witt1930] 129

> Nous n'en dirons pas davantage à cet endroit sur **la méthode interne qui permet de déduire des formules-axiomes les autres formules de la théorie**, qu'on pourrait appeler **la *Théorie des attributs abstraits***[53].
>
> *d)* **Le rôle des *types***, enfin, **a été aperçu déjà dans l'emploi des symboles**. §90

GONSETH nous avisait déjà (§82) de ne pas charger le vrai idéal de toute la force qui échoit de la tradition rationnelle. Si cela n'était pas suffisamment clair, il nous avertit plus généralement du même danger concernant la logique idéale, en insistant sur *ses origines intuitives* et *ses ambitions modestes* :

> Qu'on veuille bien remarquer que **l'objet de ces derniers chapitres**, malgré les attaches évidentes de ceux-ci avec la Logique traditionnelle, **n'est aucunement une Méthode de raisonnement. Les règles que nous avons énoncées ne doivent en aucun cas** (pour l'instant) **être interprétées comme des Regulæ pour conduire la pensée : ce sont**, sous une formulation plus ou moins abstraite, **des lois naturelles visant le monde de l'objet et des qualités**. [...] qu'on veuille bien ne pas se laisser induire en erreur par quelques dénominations, comme le vrai, le faux, l'être, le non-être, qui sont habituellement chargées d'**une signification absolue que nous ne revendiquons pas**. Au contraire ! Mais qu'on s'attache ferment à leur sens extérieur. Leur milieu naturel, ce sont les tout premiers débuts de la physique ; **les notions qui leur sont proches et apparentées ce sont celles qui sortent du réel le plus terre à terre, et qui ne cherchent pas s'élever beaucoup plus haut que celui-ci**.
>
> Que la logique des objets, des attributs et des énoncés que nous avons tâché d'évoquer, trouve plus tard une tout autre destination, qu'elle prenne la source même du rationnel : c'est une tout autre affaire, sur laquelle il nous faudra bien nous expliquer une fois. Mais dans l'intérêt même de cette explication définitive, il nous faut avoir distinctement aperçu la signification la plus concrète et le rôle le moins ambitieux. §91

Il importe d'observer que l'ouvrage de GONSETH arrive ici à un tournant. Après avoir présenté les prérequis pour comprendre la méthode axiomatique (notre construction intuitive de la réalité – sommaire, inachevée, efficace – et l'acte *sui generis* d'idéalisation) et exemplifié cette dernière à trois reprises (en degré croissant de détail : la géométrie, l'arithmétique, la logique), il est temps de la présenter « comme telle, abstraite des exemples [...] *dans lesquels elle se trouve réalisée* ».

1.13 L'axiomatisation, le schéma & la signification extérieure

GONSETH commence (§92) par justifier l'apparition tardive de la présentation axiomatique : si l'on suit les lignes de sa démarche, ce n'est en effet qu'à partir d'*exemples* qu'elle ne peut être abstraite.

Suit (§93) un autre exemple réalisant ce que GONSETH appellera un *schéma*. Le problème est de faire rouler une boule entre des arbres et la faire sortir de la forêt, étant entendu que seule la largeur des troncs pourrait nous empêcher de passer entre deux arbres. Pour décider du problème sans errer au hasard dans la forêt, on dessine une carte de cette dernière, chaque arbre étant représenté par un point, deux points étant reliés si leur distance est inférieure au diamètre de la boule – le bon sens faisant le reste du travail.

Que dire de cette carte *schématisant* notre réalité sylvestre ?

> Demandons-nous si la carte est une image fidèle de la forêt.
>
> [...] Notre carte pourrait paraître sans valeur à celui qui aurait pour mission de faire le dénombrement des érables à sucre, mais elle est parfaitement adéquate à nos intentions.
>
> Que dire d'une représentation de cette nature ? Qu'elle remplace une certaine réalité par une réalité plus accessible, où nous sommes en mesure d'apercevoir, en dépit des différentes, une identité de structure avec la première, — identité d'ailleurs limitée et qu'il faut se garder de porter au delà de sa signification naturelle, — et structure qui se manifeste par une correspondance assez sommairement définie, et qu'il ne conviendrait pas de préciser outre mesure. Cette correspondance est *symbolique*, et la carte est un *schéma*.
>
> Énumérons quelques caractères essentiels du schéma[54] :

53. L'œil moderne imagine très bien ce non-dit : les règles de déduction en logique prédicative.
54. **Sommaire, symbolique, inachevé, ce sont les caractères essentiels de tout schéma.** [Gons1937] §42

a) **Il ne fournit qu'une description sommaire**. [...] Rien que ceci :
Tout arbre, quelle que soit sa forme, et sa nature, est désigné par un point ;
b) **Il pourrait être complété** (il est encore en devenir) !
[...]
c) **Il possède une structure propre**, intrinsèque.
[...]
d) Le schéma possède enfin **une signification extérieure**. §94

Le problème de l'adéquation du schéma à son modèle n'est pas raté par Sceptique, à qui Idoine promet une réponse (qui viendra au §129) au moment de traiter la déduction :

> les propriétés du schéma engagent, jusqu'à un certain point, les proprietés du modèle. La correspondance schématique s'étend non seulement aux analogies posées, mais à toute une série de fais déduits *sur la foi seulement de la nature du monde « symbolique »* ! §95

Axiomatiser devient alors, pour GONSETH, *former un schéma mental*[55], au même sens que se sont construites nos notions intuitives[56] :

> *la constitution d'un système axiomatique revient à la construction d'un schéma mental* ad hoc.
>
> *[...] La formation des notions intuitives peut être envisagée comme une pré-axiomatisation, dans laquelle,* mutandis mutatis*, tous les caractères de l'axiomatisation mathématique peuvent être identifiés.*
>
> *Cette dernière à son tour fournit la méthode-type selon laquelle se constituent les schémas abstraits*[57]*.* §96

Le préfixe "pré" cache un fait important : les schémas que sont nos notions intuitives *ne schématisent aucune réalité préformée*[58] – ce n'est que répéter le §16 sous un jour nouveau.

Revenant à la mouvance (la vivance ?) du langage, GONSETH nous fait observer comment le concept de "schéma" a *évolué* depuis son acceptition courante vers celle où il fonde la méthode axiomatique. C'est l'occasion de nous révéler l'évolution du concept "*axiome*" et le sens qu'il a acquis au terme de la démarche gonsethéenne, *à cheval entre le concret et l'abstrait* :

> Combien un mot peut être de proche en proche détourné de son sens originel, combien le concept qu'il recouvre peut varier par dégradations insensibles et quelquefois par sauts brusques, le mot d'axiome en est maintenant un exemple frappant. Qu'était-il pour Platon ? L'expression d'une vérité en soi ! Pour Poincaré ? Une convention à peu près librement consentie. Pour Russell ? Un jugement hypothétique. Pour Zermelo ? Au sein du système de base, une partie intégrante d'une définition implicite. Toutes ces interprétations ont, il est vrai quelque chose de commun ; elles ne voient de l'axiome que le côté tourné vers l'abstrait. Elles lui confèrent une nature purement rationnelle sur laquelle la réalité extérieure ne devrait avoir aucune prise. En revanche, elles diffèrent du tout au tout quant à l'appréciation de la liberté que nous avons de les accepter ou de les refuser.
>
> Et maintenant ? L'axiome est à mi-chemin entre la fiction et la description du réel. Il garde le souvenir du réel, parce qu'il l'a recherché — et qu'il ne l'a pas complètement manqué ! Il peut toujours s'y réintégrer, en se repliant sur sa signification extérieure. Mais il porte dans sa structure intrinsèque la marque de notre activité créatrice, de notre faculté plus ou moins librement bâtisseuse d'images et de formes.

55. nous appellerons *abstraction par axiomatisation la constitution de tout schéma abstrait* [...] *en correspondance avec une certaine signification extérieure.* [Gons1937] §43

56. En résumé : *Les représentations intuitives ne sont que des images schématiques conformes à nos fins. La connaissance* a priori *n'est qu'un ensemble, orienté, ordonné, structuré, de « vues sommaires ».* En plus bref encore : *L'intuition n'est que connaissance schématique, donc sommaire.* [Gons1937] §44

57. Nous nous faisions par conséquence une idée trop simple du **processus de l'abstraction** ; il **doit être dédoublé en une *préaxiomatisation* inconsciente dont les représentations intuitives sont le terme**, et dans laquelle, *mutatis mutandis*, tous les caractères de l'axiomatisation se retrouvent ; **et en une reprise consciente du même acte mental, dont le point de départ est dans les représentation intuitives**. [Gons1937] §45

58. Nous pensons trouver une excellente illustration de cette pré-schématisation dans le film *Inside out* (Pixar, 2015). Les personnages-émotions qui "vivent" dans l'esprit de Riley n'ont de la réalité de leur hôte que l'écran de leurs quartiers généraux.

> [...]
>
> En un mot : ***Il n'y a pas d'axiome sans un concret où il fonde sa signification extérieure et un abstrait à la structure duquel il participe.*** §97

Suivent alors quelques critiques de la démarche axiomatique. Dans leur essence, toutes oublient que, si axiomatiser est construire un schéma, le schématisé *est avant* d'être schématisé :

> En un mot, l'axiomatisation par « définition implicite » manque complètement son but, lorsqu'elle prétend se passer entièrement des « signification antérieures ». (Le mot antérieur remplacement ici avantageusement le mot extérieur dont nous avions pris déjà l'habitude !) Ce n'est qu'une imitation superficielle de l'axiomatisation géométrique. *C'est une méthode sans fondement.* §98

GONSETH pointe ensuite une utilisation de la correspondance schématique : *les preuves d'indépendance.* Un des mérites de son travail est de désigner la sphère où habitent ces preuves – *la primitive*[59] et non l'idéale abritant les énoncés prouvés indépendants :

> **Le raisonnement qui précède** [prouvant l'indépendance d'axiomes] **sort certainement des limites de la stricte logique déductive. Il est d'une nature toute nouvelle, car il postule un lien** non seulement entre les objets qui se trouvent sur le même plan d'existence, entre les abstraits d'une même sphère, mais encore **entre un système déductif et sa réalisation**, c'est-à-dire entre un abstrait et un concret. C'est la première fois, le fait mérite d'être souligné, **que nous voyons un raisonnement accepté comme authentiquement mathématique, faire aussi ouvertement état de la notion de concordance schématique**. Le principe sur lequel il repose prend tout naturellement sa place dans notre exposé ! Le voici : ***Un modèle qui se trouve en concordance schématique avec un système déductif ne peut réaliser certains axiomes sans réaliser aussi leurs conséquences.*** §99

Et GONSETH de conclure (§100) sur la généralité de la méthode axiomatique à explorer les contrées abstraites : elle formule « *le briéviaire de l'abstraction* ».

1.14 La dissolution des antinomies

> L'insistance avec laquelle nous avons mis en parallèle l'analyse du logique et les analyses précédents du géométrique et de l'arithmétique a suffi pour **dépouiller la logique traditionnelle de sa position d'exception**. Elle ne nous apparaît déjà plus comme transcendante au plan de la science — pour reprendre l'expression de M. Brunschvicg. §101

Cette ouverture contient toutes les issues au titre du chapitre : les antinomies logiques qui ont tant agité le début du vingtième siècle ne viendraient que du maintien de cette position d'exception dont GONSETH a dépouillé la logique traditionnelle.
Suivent ensuite quelques tentatives historiques pour édifier une logique qui contournerait – voire dissoudrait – ces antinomies.

Tout d'abord, les *Principia Mathematica* de RUSSELL & WHITEHEAD, dont la référence à « un monde d'entités rationnelles comme il existe un monde de données sensibles » les rend coupables précisément de ce que l'ouverture dénonce :

> « [...] Le réalisme de M. Russell est un *atomisme* ; la vérité de la déduction progressive... est fondé sur la réalité des termes ou des rapports simples auxquels est suspendue cette déduction. »
> [citation de *Les Étapes* de L. Brunschvicg]
>
> La doctrine [...] ne distingue pas de degré dans l'abstrait. Son lieu géométrique est donc *tout le territoire* EN AVANT du seuil d'axiomatisation qu'il faut encore franchir pour parvenir au logique pur. §102

59. La remarque est d'importance lorsque l'on entreprend de démystifier la théorie des modèles (*cf.* section 3.6).

L'antinomie de Russell a (entre autres) motivé l'écriture des *Principia* qui l'ont dissoute en stratifiant les entités dont ils parlent de sorte que certaines prédications anciennement multi-strates ne puissent plus atteindre les strates où elles pouvaient engendrer leur antinomies (plus spécifiquement : en empêchant l'auto-prédication). La leçon que tire GONSETH de cette antinomie semble tout autre et invite à cerner la sphère logique dont il est question :

> **Est-ce de la mauvaise foi que de pousser avec raideur certaines hypothèses jusqu'à leurs conséquences absurdes, si elles le permettent ?** Le fait est que, **si l'on n'arrive pas à soumettre les notions générales d'attribut et de classe à certaines conditions restrictives convenablement choisies, elles ne pourront légitimement coopérer à la vaste transcription des mathématiques en langage de logique**. §103

Lorsque cette antinomie resurgira dans la théorie des ensembles (où le schéma de séparation n'a pas encore été limité), GONSETH la dissipera comme corrélat de *l'inadéquation de la notion même d'ensemble* :

> La faute, dira-t-on, est de parler de cet ensemble [de tous les ensembles] ! Peut-être ! Mais en en parlant, nous ne faisons qu'utiliser les notions générales admises au début, dans leur sens extensif, qui est une partie essentielle de leur signification. Si la faute n'est pas dans le travail de la déduction elle-même, que nous avons passé sous silence (et qui est de la même qualité que les raisonnements mathématiques ordinaires), c'est donc qu'il est dans la nature même des notions *fondamentales.*
>
> En d'autres termes, **l'idée générale de l'ensemble, comme collection infinie d'objets aristotéliciens, est impropre aux fins auxquelles on la destine**. §104

Cette dissipation appelle à notre avis deux commentaires. La paradoxe de RICHARD (que GONSETH n'ignore pas[60]) montre que les propriétés caractéristiques de l'objet aristotélicien doivent être limitées (la solution traditionnelle – formelle – est de se restreindre aux prédicats *formalisables* dans le langage ensembliste), ce qui amène une révision de la notion gonsethéenne d'ensemble *en un point bien précis* : pourquoi l'abandonner *complètement* ? Deuxièmement, même une fois cette révision effectuée, la notion d'ensemble dont parle GONSETH reste celle de *classe* : c'est pourquoi (du moins dans la tradition de ZERMELO) l'on a *borné* le schéma de séparation, ce qui est une autre manière de limiter les propriétés caractéristiques de l'objet aristotélicien. Encore une fois, il eût été dommage de jeter le bébé avec l'eau du bain.

GONSETH continue les paradoxe en mentionnant (§105) celui « connu du *catalogue de tous les catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes* ». C'est l'occasion pour lui d'aborder l'idée générale de *relation* (dans tous les paradoxes qu'il présente, la relation est en fait celle de prédication) et de présenter la structure commune à ces paradoxes à l'aide de l'idée de relation. Sa conclusion est la confrontation à un dilemme :

> Si l'on décrétait que les relations logiques légitimes ne doivent s'établir qu'entre des objets différents et que jamais elles ne doivent mettre un objet en rapport avec lui-même, les antinomies du type précédent tomberaient d'elles-mêmes.
>
> Le malheur, c'est que les conséquence d'un décret aussi tranchant nous mèneraient beaucoup trop loin. *Les mathématiques ne respectent pas cette interdiction.* Elles opèrent, à juste, semble-t-il, avec une quantité de relations présentant le même défaut, à commencer par toute la gamme des relations d'égalité et d'équivalence. §106

Retournant aux *Principia*, GONSETH nous décrit (§107) la solution russellienne des types, qui nécessitera un axiome *ad hoc*, l'axiome de réductibilité, dont l'évidence dans la doctrine réaliste de RUSSELL est loin de se manifester à quiconque, « pas même l'auteur de l'axiome ». Ceci étant dit, la critique gonsethéene ne saurait atteindre les mérites éminents de cette « vaste entreprise totalitaire » (§110).

Les conclusions que GONSETH tirera de l'étude des antinomies sont de deux ordres : elles n'atteignent pas les domaines mathématiques *individuellement* et sont un garde-fou contre toute entreprise *totalisatrice* :

60. il en parle au §118

Ces antinomies n'intéressent pas les édifices axiomatiques des mathématiques classiques où l'on ne fait jamais usage de l'*idée générale d'attribut* ou de l'*idée générale de classe* : **il n'y a pas d'antinomie spécifiquement géométrique ou spécifiquement arithmétique**. [...] toute notre étude montre qu'au contraire les abstraits se constituent et les théories s'organisent sans l'intervention effective de ces abstraits-limites, aptes tout au plus à marquer sommairement l'orientation générale d'un processus mental. Nous pouvons donc affirmer que **la méthode d'axiomatisation fondée sur la concordance schématique met les mathématiques complètement à l'abri des antinomies logiques**. Non pas que celles-ci ne représentent que des obstacles négligeables et faciles à franchir. Au contraire. Mais **ils ne se trouvent pas sur les lignes d'axiomatisation par lesquelles les mathématiques se sont acheminées vers leur état actuel**, et ne peuvent ni les rompre, ni les intercepter. **C'est sur leur prolongement que leur action se fait sentir**.

[...] Ce que les antinomies compromettent sérieusement, c'est le succès de la tentative totalitaire : Elles barrent la voie au rassemblement général des notions mathématiques sur le terrain trop exposé de la logique des attributs. **Il faudrait, pour que les concepts de classe, d'attribut et de relation supportent le rôle écrasant qui leur est dévolu, qu'on puisse les concevoir dans leur plus grande généralité. Or, si l'on veut les pousser jusqu'à cet absolu, ces concepts s'évanouissent dans l'indétermination**. [...]

En un mot : **les antinomies** sont alors les symptômes d'un mal profond. Elles **sont les conséquences** d'une position de départ bâtarde, à cheval à la fois sur l'abstrait et le concret. Et d'**une axiomatisation** mal partie et mal orientée : **partie avec des notions fondamentales pour lesquelles la transmutation du concret en abstrait ne s'est pas achevée ; et orientée par une fausse appréciation des rapports du réel et du rationnel**. §108

Afin d'appuyer son propos garde-fou, GONSETH analyse le concept de "loi"[61] en mathématique à travers des citations de BOUTROUX. Sa conclusion a de quoi susciter quelque embarras :

La loi la plus générale, c'est le hasard ou l'arbitraire. (§109)

Mais elle vise comme toujours à inscrire les concepts dans leur "en devenir", à nous rappeler le danger précritique de figer éternellement ces derniers.

1.15 La deuxième idéalisation : vers les structures

Ce chapitre prend le pas de la *deuxième* axiomatisation (tempérée par les conclusions précédentes).

Il s'ouvre en nous rappelant tout d'abord l'abîme de nature qui sépare les sphères intuitive et idéale :

il y a entre la logique enrobée dans les relations entre objets physiques ou mathématiques et la logique pure le même hiatus essentiel qu'entre la géométrie réalisée dans les corps matériels et la géométrie pure, science rationnelle : **l'hiatus même où se marque l'opposition du concret à l'abstrait qui en est né**. §111

Le saut est alors fait vers ce que le moderne qualifiera de "structures", déterminées par des "*relations*" satisfaites entre "*objets*", deux notions phares de la logique formalisée :

Les notions fondamentales de la nouvelle logique qu'il nous faut maintenant introduire ne peuvent être qu'évoquées et suggérées. [...] Elles n'ont pour but que de **déclencher l'acte intellectuel qui vient dégager un trait schématique unificateur à partir de notions en fait différentes**.

61. **Faire abstraction de quelque chose, ce n'est rien d'autre que ne pas y prêter une attention particulière. Le cœur de l'affaire est évidemment dans le mot « particulière »**. L'inattention est une lessive très mordante, elle ne doit pas être employée avec une concentration trop forte si on ne veut pas qu'elle dissolve tout ; mais elle ne doit pas non plus avoir une concentration trop faible si on veut qu'elle produise une altération suffisante. Tout repose donc sur le juste degré de la solution, et il n'est pas facile de tomber juste. [Freg1882-1923] p. 151

Les deux premières notions de logique pure qui doivent être ainsi créées sont celles de *liaison logique* et d'*objet* ou d'*élément logique*. La première est à abstraire de tout ce qui est liaison de fait ou relation dans les ordres des plus divers.

[...] **L'objet logique n'a pas d'autres propriétés *a priori* que de pouvoir être conçu comme différent d'autres objets logiques et de pouvoir servir de point d'attache à certaines liaisons logiques**.

Pour deux objets logiques, le fait d'être différents doit être conçu indépendamment de tout caractère spécifique par lequel cette différence pourrait se manifester ; sans donc qu'il soit nécessaire ou même possible de décrire en quoi ils diffèrent. Et de même deux liaisons logiques sont à considérer soit comme identiques soit comme différentes sans que, dans ce dernier cas, il y ait lieu de préciser en quoi elles diffèrent.

[...] **Si** [...] ***il y avait un sens à dire qu'il existe entre un* a *et un* b *variables au sein de certaines collections toujours une même liaison,* nous dirions que l'ensemble de ces liaisons équivaut à une *relation logique***. §112

Une mise en garde nous paraît ici indispensable au lecteur moderne qui serait très tenté de qualifier cette deuxième axiomatisation de *formalisation* : de fait, tout ce qui précède et suit *est formali**sable*** (et l'action sur les symboles légitimée par les types). Cependant, l'apparition des catégories (en mathématique) nous paraît, dans l'esprit gonsethéen, être une *troisième* axiomatisation, ce qui disqualifie d'emblée la tentative ci-dessus.

Vient alors (§113) une décision face au dilemme §106 : « choisir librement les *incompatibilités* entre [l]es liaisons » et *rejeter les auto-liaisons*. Non pas qu'il ne s'en trouve pas dans l'intuitif mais le schéma logique développé dans ce chapitre ne les décrira pas de manière efficace. Ce sont plutôt les lois de l'*être* qui vont fonder ce schéma.

C'est ainsi que GONSETH décrit (§114) les schémas des connecteurs usuels binaires à l'aide d'un "graphe d'existence" à quatre sommet $\left(\overline{a}, \underline{a}, \overline{b}, \underline{b}\right)$, un trait dénotant une conjonction réalisant l'"être" de l'objet $a * b$ (pour chaque connecteur $*$). Aucun graphe ne voit relié $\overline{a}$ à $\underline{a}$ ni $\overline{b}$ à $\underline{b}$, ce qui est cohérent avec le rejet des auto-liaisons (il n'y en a pas, aucun objet ne pouvant à la fois être et ne pas être !).

Quant au libre choix des incompatibilités, il s'exprimera dans le principe suivant :

On peut librement exiger l'incompatibilité de deux ou de plusieurs liaisons choisies à volonté dans une structure logique. §115

Conjugué aux principes de « *libre extension* » et de « *libre liaison* » (on peut toujours introduire un nouvel objet, une nouvelle liaison), il porte en lui la genèse de toutes les structures accessibles à « notre faculté de « librement concevoir et librement imaginer » ».

Cette libre création indéfinie appelle tout naturellement l'infini, à commencer par *la suite des nombres entiers* (§116). Ce que le moderne appelle "loi de composition", GONSETH le définit par une relation triadique, l'égalité d'un terme avec le composé des deux autres. Le cas de l'addition est ainsi décrit, avec toutefois la contrainte des auto-liaisons (apparaissant par exemple dans la relation $1+1=2$) interdites : il suffira pour s'en débarrasser de copier la structure en autant d'exemplaires que l'exigera l'arité de la loi, de pouvoir distinguer chaque exemplaire des autres (avec une couleur, une étiquette, des primes...), et de ne relier que des -uplets d'éléments dont chacun figure exactement dans une copie [62]. Par exemple, pour l'addition des entiers tripliqués avec des primes, le résultat de la somme de 1 et 1 sera décrite par les trois relations $1+1' = 2"$, $1+1" = 2'$ et $1'+1" = 2$ (symétriques en les deux premiers arguments) qui seront par ailleurs décrétées équivalentes [63] (on ne veut "garder" qu'un seul 1 et donc une seule relation $1+1=2$). Ce bricolage technique a le mérite de fonctionner mais on en paie la lourdeur [64].

62. Soient E et I deux ensembles. Si l'on veut répliquer E en autant de copies (deux à deux disjointes) qu'il y a d'indices (éléments de I), on créera les ensembles $E \times \{i\}$ pour i décrivant I. Par exemple, réunir une I-famille d'ensembles tous égaux à E donnera $\bigcup_{i \in I} E = E$ tandis que la réunion de ces copies sera la *réunion disjointe*

$$\coprod_{i \in I} E := \bigcup_{i \in I} E \times \{i\} = E \times I.$$

Le point de GONSETH visant à relier des I-uplets d'éléments de $\coprod_{i \in I} E$ deux à deux distincts, on va donc *multiplier* les copies de E, ce qui engendrera la partie $\prod_{i \in I} E \times \{i\}$ des injections de I dans $\coprod_{i \in I} E$.

63. Il suffit de quotienter $\prod_{i \in I} E \times \{i\}$ par l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_I$ définie par $\sigma \cdot ((e_i, i)) := \left(e_{\sigma(i)}, i\right)$ pour toute famille (e_i) et pour tout permutation σ.

64. Si effectivement le *discours* mathématique énonce *in fine* des *relations* entre objets, il n'en reste pas moins que l'*activité* mathématique *compose* ses objets et *désigne* ces composés, il serait bien malcommode de la priver de ce mode de composition et de désignation, particulièrement sous le prétexte qu'on ne pourrait composer un objet avec lui-même (ce qui n'a jamais, à notre connaissance, mené à une quelconque contradiction comme celles des auto-relations).

Cette exclusion des relations réflexives[65] ruine la formation des antinomies russelliennes (§117). GONSETH remarque également que la typification russellienne se réalise d'elle-même si l'on veut bien revenir au sens intuitif : cela n'a en fait aucun *sens* de se demander si un ensemble s'appartient à lui-même !

> Ne pourrait-on former la structure, par exemple, de *toutes* les structures ? Pour que l'expression « toute les structures » eût un sens, *il faudrait que le mot « toutes » indique lui-même les éléments d'une structure*. Or il n'y a, *a priori*, rien qui permette de l'édifier. [...] §117

La considération d'un quelconque "tout achevé" semble interdite par « le principe du *foisonnement illimité* » (le moderne entendra tout simplement une *limitation de l'axiome des parties*, lequel induit, de par la *stricte* croissance cardinale, tout un foisonnement de cardinaux) :

> la structure correspondant à l'ensemble [...] de tous les ensembles ne pourrait être qu'un *structure libre*, c'est-à-dire une structure soumise aux principes de libre extension et de libre liaison sans aucun condition restrictive. [...] Or il n'y aucun sens à dire de deux structures libres que l'une est plus nombreuse que l'autre : le principe du *foisonnement illimité* qu'on réalisait en construisant pour chaque ensemble, l'ensemble de ses sous-ensembles et qui était la source des embarras, n'est, tout simplement, plus applicable aux structures libres. §117

La conclusion est sans appel : c'est bien le *concept même d'un "tout achevé"* qui *est précritique* – mais l'on ne fait que varier la doctrine de cet ouvrage. C'est ainsi que seront dissipées les antinomies de RICHARD et du Crétois, cette dernière de manière particulièrement savoureuse :

> *a)* S'il n'y pas ici [dans l'antinomie de Richard] dérogation à tel ou tel principe de la logique des structures, il y a péché évident contre la doctrine de tout cet ouvrage.
>
> Admettre que l'ensemble [de tous les nombres dont la définition minimale contient moins de mille mot ou signes] est fini, c'est admettre que les mots et les phrases ont un sens *ne varietur*. Or ce sens est en constante révision. La même phrase n'aura pas nécessairement le même sens si entre la première fois qu'on la prononce, et la second, cinq cents mots intercalés ont complètement modifiés la base de son interprétation ;
>
> *b)* Sans compter que certaines expressions comme « le suivant » n'ont pas de sens par elles-mêmes, mais seulement en fonction du sens des mots qui les précèdent.
>
> En bref, **l'ensemble [précédent] est *ouvert*** et [son] plus grand nombre n'existe pas.
>
> — Il y a enfin d'autres antinomies qui n'ont d'antinomie que le nom. Si, de deux personnes A et B, nous avons, vous et moi, à en choisir une ; si vous avez tout d'abord à vous prononcer, et que je fixe mon choix en disant : « Celle qui restera » : que vous choisissiez A, ou que vous choisissiez B, mon choix sera différent du vôtre. **Y a-t-il là quelque chose pour vous surprendre ? Seulement si vous aviez cru — et en cela vous eussiez eu tort — que mon choix était de toute nécessité fixé d'avance.**
>
> **Il en est de même de l'antinomie de Crétois dont l'affirmation : « Je mens » n'est, par elle-même, ni vraie, ni fausse. Elle prend simplement la valeur de vérité que nous n'avons pas choisie**. §118

La conclusion sera brève et nous semble escamoter les complications de la démarche non réflexive :

> il suffit de rester fidèle à la doctrine des significations en devenir ; il suffit de prolonger *dans sa foulée* le processus de l'abstraction axiomatique, pour que la synthèse unificatrice apparaisse possible et que les antinomies soient écartées. §119

65. Cela posera une restriction supplémentaire quant aux relations d'équivalences : de $a \sim b$ et $b \sim a$ on ne pourra plus conclure à $a \sim a$! Comment ainsi s'assurer qu'un tel énoncé réflexif ne puisse jamais sortir d'une chaîne déductive ? Ici les énoncés réflexifs jouent le même rôle que les contradictions : un type d'énoncés interdits dont nous ne savons *a priori* nous prémunir. Arrêter le jeu simplement parce qu'on rencontre une interdiction ne permettra pas nécessairement de remonter à la source de l'infraction.

1.16 Le langage axiomatisé (expliquer & définir)

Qu'est-ce qu'« *expliquer* » ? Le sujet, bien trop vaste pour être présenté dans un seul ouvrage [66], est abordé par GONSETH qui commence par démystifier une première conception naïve de l'explication :

> L'idéal de la réduction aux éléments explicatifs ultimes est précritique. Il fait revivre sous une autre forme, la croyance en l'adéquation en définitive parfaite des mots aux choses. §120

Puis il suggère, à travers le démontage d'un mécanisme que l'on cherche à expliquer, deux moments clef de l'explication :

> *a)* Une décomposition en éléments plus simples, que l'on pourra dire *primitifs* ou *explicatifs*, si nous pouvons admettre qu'ils n'ont plus à être expliqués à leur tour.
> [...] **Un élément n'est jamais explicatif en soi, à jamais et en toutes circonstances**.
> *b)* Une recomposition des éléments explicatifs qui n'est aucunement déterminée d'avance. C'et au contraire une coordination à effectuer suivant un plan et selon des règles et principes qui doivent eux aussi réalisés et compris. §121

Une autre suggestion, à travers une question astronomique, est celle des cascades d'explications suivant un modèle (ou explication déductive-nomologique). On retrouve la notion cardinale de *concordance schématique* :

> L'essentiel de l'acte compréhensif réside [...] dans une certaine identification qui doit être établie entre certaines parties, certains détails et certaines propriétés du modèle, et les réalités correspondantes.
> [...] Tout le mécanisme explicatif restera pour nous lettre morte, si nous ne sentons pas vigoureusement le lien qu'établit la *concordance schématique* entre le modèle et la réalité visée.
> [...]
> Ce modèle est mental et abstrait ; mais **son rôle est au fond semblable à celui d'un de ces schémas si fréquemment employés par les techniciens**. Comme ces derniers schémas, **il se prête à cette identification du modèle avec la chose représentée, de l'image avec la réalité à comprendre, dans laquelle nous voyons l'essentiel de l'explication**. §122

Se pose alors naturellement la question de la *convolution* de ces deux suggestions, l'exemple typique étant la géométrie. Peut-on se reposer sur la sphère intuitive spatiale pour expliquer les lois idéales géométriques ? Peut-on utiliser la sphère idéale géométrique pour préciser la connaissance intuitive spatiale ? Il y a là une boucle qui a tout l'air d'un paradoxe (§123). GONSETH donne l'exemple d'un appartement complexe dont on chercherait à expliquer la géométrie (le groupe des déplacements) : soit en en dressant un schéma, soit (pour le cas d'un enfant) en en faisant faire le tour (§124). Qui explique quoi au juste ?

> — En réalité, il n'y a ni contradiction, ni cercle vicieux — mais bien une idée préconçue et inadéquate de ce que doit être une explication. Pour que tout se dénoue avec simplicité, il suffit de ne pas s'écarter de la ligne générale tracée par Idoine. Revenons, par exemple, au cas de la logique et de la physique de l'objet quelconque. Dans cette dernière expression, le mot « physique » n'intervient certainement pas avec tout le sens dont il peut être chargé. Il n'y prend au contraire qu'une signification restreinte, la signification « de tous les jours » qui, bien qu'imparfaite ou même rudimentaire, ne manque pas d'être efficace dans un certain rayon : Cette signification dépourvue d'ambition est parfaitement suffisante pour les besoins de notre explication. Celle-ci n'est que fort peu dépendante du développement dont le sens du mot physique est encore susceptible ; il nous suffit d'une signification *en suspens*.
> D'autre part une signification quelconque n'est pas seulement en suspens, elle est encore *en devenir*. Celle du même « logique » s'est maintenant élargie et enrichie du fait même de l'explication. Pourquoi devrait-il être interdit de revenir avec ce sens évolué sur la signification du mot « physique » ? Il est vrai que, par le truchement de l'idée de logique, l'idée de « physique », telle que nous l'évoquions il n'y a qu'un instant, vient implicitement soutenir, elle aussi, l'effort qui va porter l'idée de physique au delà de ses limites primitives. Mais qu'y a-t-il là de répréhensible ? **N'est-il**

66. On pourra pour une introduction consulter par exemple [Wasz2013].

pas naturel que le sens élargi se fonde sur le sens restreint ? Objections et réserves ne se justifieraient que si l'explication comportait une réduction véritable et complète de l'expliqué aux éléments explicatifs ; que si elle avait découvert le secret d'une substitution complètement et identiquement équivalente de certains éléments plus simples à une totalité trop complexe pour être saisie du premier coup. Mais les exemples qui précèdent démontrent amplement qu'il n'en est rien. Croire à la possibilité d'une réduction de ce genre, c'est ne tenir compte — et avec quelle naïveté ! — que du premier des trois moments essentiels de l'explication que nous avions distingués. §125

Ainsi le cercle vicieux qui ferait s'effondrait l'explication sur elle-même se révèle-t-il en en fait être *cercle vertueux*, permettant à l'explication à la fois de *s'alimenter et* de *se constituer*.

Cet aspect négatif de l'explication étant éclairci, GONSETH en présente alors quelques aspects positifs :

> Il n'y a pas de modèle *a priori* et *ne varietur* de l'explication. Cependant malgré la variété et l'hétérogénéité de ses moyens, la façon dont elle s'en sert n'est pas très diverse. Ou bien elle construit un modèle concret plus ou moins exact et détaillé de la chose à expliquer, ou bien elle en fait un schéma plus moins adéquat. Dans les deux cas, qu'elle prenne la voie de la réalisation ou celle de l'abstraction, **son action** présente deux phases assez distinctes :
>
> *a)* Elle **substitue à l'objet de l'explication un autre objet, dont les détails qu'elle fera intervenir et la structure totale qu'elle invoquera soient suffisamment en notre possession**. [...]
>
> *b)* Elle **fait appel ensuite, pour porter la compréhension et la connaissance de l'un sur l'autre, à une certaine identité de structure, qui ne peut jamais être totale ; à une certaine concordance qui s'étend à la fois aux parties et à la façon dont elles entrent dans le tout, mais qui n'est peut-être que sommaire et ne peut embrasser toutes les façons d'être des deux objets**. [...]
>
> Rien n'est en principe inapte à l'édification des constructions explicatrices.
>
> [...]
>
> Dans ces conditions, il va de soi que **les moyens dont l'explication dispose sont en constant état d'extension** : tout enrichissement de notre être, et spécialement de notre connaissance du monde (pourvu que nous en ayons suffisamment conscience) peut immédiatement être requis pour une nouvelle tentative §126

Se repose alors, de façon cruciale, la question de la *concordance schématique*, déjà soulevée dans la fable de la forêt (§94). Et GONSETH d'insister : *Cette réponse [...] marque un moment essentiel de notre exposé.* Encore une fois, c'est tout simplement la constatation de son efficacité qui la légitimera, refondant et démystifiant par là même le concept de *causalité* :

> le principe de causalité est en tous points comparable à un axiome de géométrie : à l'aide de notions schématiques telles que : cause, effet, état, permanence, changement, etc., il décrit un fait de nature, pratiquement assuré entre certaines limites. [...] le principe de causalité ne cesse pas de formuler une véritable loi naturelle, même s'il n'est valable que statistiquement, et, lui aussi, du point de vue macroscopique.
>
> [...] En résumé, **le principe de causalité formule une loi naturelle dont la validité entre certaines limites ne peut pas être mise en doute ; il formule un fait pratiquement assuré**.
>
> [...] de son premier mouvement, notre esprit porte les notions de cause et d'effet dans tout ce qu'il veut rendre intelligible.
>
> Nous expliquons par les causes et les effets comme nous voyons les objets doués de formes et de couleurs. La causalité, en tant que catégorie de l'entendement, est du même ordre de subjectivité que telle ou telle qualité.
>
> [...]
>
> *L'idée de loi naturelle est la signification extérieure, l'idée de nécessité dans les démarches de l'esprit relevant de la structure intrinsèque du schéma.*
>
> Notre structure mentale est bien accordée à la structure des phénomènes naturels ; mais la concordance n'est que sommaire et inachevée : un compromis, comme nous le disions déjà à propos des axiomes, entre la libre fantaisie et la détermination absolue. En un mot, la concordance n'est que schématique. §127

Ces descriptions statiques étant faites, comment maintenant le schéma explicatif *se crée*-t-il ? Ou plutôt : comment le créons-*nous* ? Avons-nous quelque "guide" à notre disposition pour engendrer d'efficaces schémas ? « Ce guide, c'est l'analogie » [67] :

> *Notre entendement est engagé dans la discipline des analogies au moins autant que dans le schéma causal :* ***l'analogie peut prendre place au rang des catégories préalables de l'entendement****.*
>
> [...]
>
> *La condition pour que notre intervention dans le monde naturel soit efficace, c'est que les règles intrinsèques de l'entendement aient, comme signification extérieure, celle de lois naturelles.*
>
> (On remarquera avec quelle vigueur interviennent maintenant, dans la phrase qui précède, les notions dont l'analyse de la méthode axiomatique a permis d'asseoir la signification.)
>
> [...] appliquée à l'analogie, [cette constatation fondamentale] équivaut à l'injonction que voici : « **Vous devez découvrir comme contre-partie à la catégorie de l'analogie, une loi naturelle aussi universelle et fondamentale que le principe de causalité. Allez à sa recherche !** »
>
> Nous l'appellerons, *le principe d'analogie*, ou le *principe de la concordance schématique.*
>
> [...]
>
> Il se formule non seulement en constatant : Il n'y a point d'explication sans analogie, — mais encore en posant comme **pratiquement assuré que** ***toute analogie authentique établit entre les deux termes qui y figurent, un lien de fait, aussi valablement réel et physiquement efficace que la relation de cause à effet****.*
>
> Le mot « authentique » n'affaiblit pas cette constatation. Car il y a des analogies qui tournent court et des analogies qui portent loin, de même qu'il y a des causes apparentes et des causes « véritables », sans qu'il y a ait de *règles* a priori qui permettent de les distinguer les unes de autres ; c'est-à-dire de mesurer une fois pour toutes la force d'un lien causal ou d'un lien analogique. §129

Il y aurait beaucoup à dire (suivant POINCARÉ) sur la valeur de l'analogie, sa formalisation conduisant droit à la notion de structure. Mais restons chez GONSETH, qui nous assène le fin mot légitimant la concordance schématique :

> La justification de nos modèles explicatifs peut maintenant être faite sans longs détours. Celle du jeu des « Doubles » nous servira de modèle analogique !
>
> « Notre roi ne fut jamais trompé parce qu'il avait su établir entre ses guerriers et leurs double une analogie authentique. » §129

Il y a de quoi rester sur notre faim. GONSETH ne sera pas plus loquace quatorze ans plus dans *La géométrie et le problème de l'espace* : il y sera toutefois (§107) parfaitement clair sur le non-sens à chercher une explication à cette légitimité. (Nous y reviendrons au chapitre IV de [Gons1945-55], section 2.4.)

Lorsque le chercheur observe de nombreux objets qu'il juge analogues, il définit un concept censé cerner la "classe d'analogie" correspondante. Si le formaliste moderne n'y voit là qu'une convention [68], GONSETH insiste sur l'*acte* définissant :

> la notion de définition purement verbale est précritique au même chef que celle de l'être absolu. **Une définition** n'est pas une simple et automatique transmission d'existence. C'est **un acte qui tombe sous la catégorie schématisante de l'analogie**. §130

Ce serait à notre avis rejoindre DUHEM qui écrivait :

67. [Poin1905] p. 38
68. Il faut voir les définitions [...] comme des conventions superflues d'abréviations notationnelles. [...] La forme dans laquelle on exprime une définition est sans importance, tant qu'elle indique la manière de l'éliminer. [Quin1980] p. 126

> C'est [...] aux définitions, et non pas aux axiomes, que les Mathématiques doivent la puissance qui réside en elles de développer une suite illimitée de théorèmes toujours et vraiment nouveaux ; c'est par les définitions, et non par les axiomes, que se manifeste en elles l'activité créatrice de notre intelligence.
>
> Il est aisé maintenant de comprendre ce qu'on entend par généralisation en Mathématiques.
>
> [...] ce qui rend possible la généralisation des théorèmes mathématiques, c'est la généralisation des définitions. [Duhe1912] p. 542-543

Le problème des définitions fait évidemment resurgir le paradoxe du langage. Et ce dernier se dissout tout seul dans la perspective schématisante :

> la signification des mots et des combinaisons verbales ne leur est pas inhérente ; qu'elle ne se rattache pas à des essences éternelles prédéterminées et qu'elle ne fonde pas dans l'adéquation de nos conceptions à certaines réalités préformées. Les mots sont les éléments de certaines constructions symboliques, auxquelles seule la concordance schématique qui les unit à nos pensées et celles-ci à leur concret relatif, donne une valeur pratique.
>
> [...] Ce jeu [de tout un monde d'évocations et de suggestions] [...] n'est pas sous le signe de l'identité, de l'équivalence totale ou de l'équation parfaite ; il est sous le signe de l'analogie, de la concordance en suspens !
>
> [...]
>
> une concordance schématique n'est jamais établie par avance jusque dans tous les détails. Ce n'est d'ailleurs pas la seule façon possible d'imaginer un processus par lequel les significations soient altérées.
>
> Les difficultés se dénouent, on le voit, avec la plus grande simplicité, si l'**on accepte, pour imaginer la relation des mots à leurs significations, les suggestions de la méthode axiomatique**. §131

Ne pourrait-on pas d'ailleurs renverser le paradoxe du langage en constatant *pragmatiquement* le fait de son efficacité et en prenant ce fait comme modèle analogique, au lieu de le résoudre comme exemple de la méthode axiomatique ? Ce renversement ne nous paraîtrait pas dénaturer l'esprit gonsethéen ; il l'appuierait, au contraire, en voyant dans l'efficacité du langage tant une réalisation du principe de concordance schématique qu'un fait concret duquel émerge ce principe.

La clef de voûte de cet ouvrage nous semble bien être la justification *pragmatique* de la légitimité du principe de concordance schématique, lui seul suffisant à assurer la démarche axiomatique. Cette justification s'insère dans une *sphère intuitive*, vivante, toute imprégnée de pragmatisme, révélations capitales dont GONSETH nous fait part dans son tout premier chapitre.

1.17 La preuve et l'évidence

Une des composantes essentielles (et ô combien dévastatrice pour un esprit vierge) de la logique traditionnelle qui tombe avec cette dernière de sa sphère d'absoluité est son rôle *normatif*[69]. GONSETH nous en retrace la genèse depuis un caractère purement *descriptif*[70] :

> Il faut, disait Idoine, **à la fois affirmer et nier l'autonomie de l'abstrait : la nier dans sa genèse, l'affirmer dans son devenir**.
>
> [...] Nous avons parlé à diverses reprises [de la méthode déductive] comme de la méthode qui permet, à partir des prémisses, de dérouler la chaîne des conséquences. Mais **la logique ne nous est pas encore apparue revêtue de ce rôle normatif. Ce qui nous a frappé jusqu'ici,**

69. Les lois logiques sont certes l'expression d'habitude de pensée mais elles sont aussi l'expression de l'habitude de *penser*. C'est à-dire que l'on peut dire qu'elles montrent comment pensent les hommes et aussi *ce que* les hommes appellent « penser ». [Witt1937-44] p. 84-85

70. Nous signalons au passage l'intéressante digression de [Cang1943] p. 81-84 qui motive, **en français**, la confusion du descriptif et du normatif. Le nom "anomalie" (*irrégularité*, nom étymologiquement *descriptif*) est relatif à l'adjectif "anormal" (*non conforme*, adjectif on ne saurait plus *normatif*), le français n'utilisant plus l'adjectif "anomal" ni le nom "anormalité".

c'est plutôt son rôle descriptif. [...] nous n'avons pas encore montré assez clairement comment on passe *de la règle observée dans la nature, à la règle à observer dans la conduite de nos pensées.* §132

Déduire, c'est ici [pour savoir quel jour sera demain] **imaginer un modèle mental** du calendrier **avec le moyen de s'en servir — et c'est s'en servir avec le sentiment de contraindre le réel**.

[...] **la déduction n'a pas besoin, pour s'exercer, d'une méthode déductive explicitement formulée. Elle manie avec succès les nécessités pratiques, sans attendre l'énoncé de principes abstraits pour sa justification**.

Il en est de même de la démonstration qui, avant d'être érigée sur le piédestal de la stricte rigueur, doit gravir tous les échelons de l'épreuve et de la preuve pratique. §133

Il est question au dernier paragaphe de *rigueur*, caution traditionnellement *sine qua non* d'un discours logique. Comme toujours, ce concept est vivant et, si l'attitude *rigoriste* est à l'origine garante d'un « Ça va *pratiquement* marcher si l'on *agit* comme ça et pas autrement », ce n'est que despotiquement[71] qu'elle est devenue un « Ça *doit* marcher ainsi si l'on *raisonne*[72] comme ça et pas autrement » :

Mais les démonstrations « authentiquement mathématiques » ?

Croire qu'elles évitent systématiquement les évidences intuitives est une opinion tout à fait simpliste et qui repose sur une méconnaissance totale des véritables circonstances.

Il faut remarquer tout d'abord que **l'idéal de rigueur qu'on imagine assez couramment réalisé par les spéculations des mathématiciens n'est pas plus immuable que les autres notions fondamentales, dont quelques-unes (celle d'axiome, p. ex. ou même celle de vérité) nous ont présenté un visage si changeant**. Tout au contraire, les idées sur la rigueur ont évolué comme le reste, et l'on peut en donner quelques exemples assez frappants. §133

L'expression courante « C'est logique ! » est un témoin remarquable de cette origine pratique. On pourrait lui substituer une autre expression, « C'est comme ça, c'est évident ! », révélant la place qu'occupe l'*évidence* dans cette matrice intuitive de la logique. GONSETH y analyse le rôle évident dans l'établissement d'un jugement arithmétique :

Il faut en prendre son parti : **le sentiment de l'évidence varie avec les époques**.

[...] Si les nombres a et b ne sont pas très grands, notre démonstration [de $a + b = b + a$] prend l'aspect d'une vérification sur un modèle concret, sur la base de certaines lois de la physique des objets de nature quelconque. Ou du moins, elle se réduit à *l'évocation* d'une vérification de ce genre.

Si les deux nombres sont très grands, le caractère de la démonstration est passablement différent. **Ayant observé que nous n'éprouvons aucune difficulté à recommencer notre vérification avec des nombres de plus en plus grands, nous considérons comme assurée la possibilité de la répéter avec des nombres quelconques, fussent-il plus grands que tous ceux dont nous nous sommes jamais servis. Nous passons ainsi de la *représentation mentale d'un acte pratiquement assuré à l'intention d'un acte pratiquement irréalisable***.

Il n'y a naturellement, entre l'immédiatement réalisable et l'irréalisable, aucune ligne de démarcation : il n'y a entre eux qu'une zone intermédiaire assez indéterminée. §133

La disparition ici explicitée de l'acte *effectif* coupe le cordon avec le descriptif. L'établissement du normatif ne pourra donc se légitimer que par le *succès pratique* d'un retour sur les actes (nous y reviendront au §137).

L'exemple de la commutativité de l'addition n'est qu'une des façons par lesquelles, *en mathématique*, l'évidence se manifeste :

71. la physique expérimentale nous procure une connaissance des lois naturelles par l'observation directe ; la physique théorique applique alors la pensée à prolonger largement cette connaissance ; si bien que nous devenons capables de formuler des énoncés, même sur [...] des phénomènes qui échappent [...] à toute observation directe [...]. Comment pourrions-nous arriver à dire d'avance, au sujet d'une observation quelconque, avant même de l'avoir instituée, comment elle se présentera à nous obligatoirement ? D'où notre pensée tirerait-elle une sorte de pouvoir exécutif, obligeant une observation à donner ceci, et pas autre chose ? **Pourquoi ce qui contraint notre pensée contraindrait-il aussi le cours du monde ?** Il faudrait nécessairement introduire, admettre par croyance, une harmonie merveilleuse et préétablie entre le cours de notre pensée et le cours de l'Univers ; cette représentation est profondément mystique et, au fond, d'ordre théologique. [Hahn1935] p. 16-17

72. ce que je veux, c'est **qu'on ne prenne pas toutes les considérations théoriques comme des choses démontrées par cela seul qu'on les a imaginées**. [Bern1947] p. 197

Combien le mathématicien répugne peu à l'emploi des significations extérieures, la preuve en est encore fournie par le fameux *principe des tiroirs* dont on connaît les très efficaces interventions [73] [...]

Eh bien ! **Il faut remarquer que le mathématicien puise le plus clair de ses certitudes dans l'indéniable vérité pratique de principes de ce genre**. A chaque pas en avant, tout le long d'une démonstration, il prend appui sur des évidences de cet ordre de primitivité. Les équivalences dont il se sert, les dépendances qu'il établit, il en prend l'inspiration dans un sentiment profond du réel et de l'efficacité de ses propres démarches.

En un mot : ***Le mathématicien se contente souvent d'évidences intuitives***. §133

Et GONSETH de préciser le fondement de cette évidence spécifique à la mathématique – serait-ce cette mystérieuse "intuition mathématique", ce *mathematical insight* ? Il n'y retrouvera rien de plus que l'*analogie* (§129), passant peut-être à côté du caractère immédiat et total de certaines "intuitions-visions" qu'ont certains mathématiciens [74] :

pour nous, le rôle essentiel de l'intuition est de former des jugements sommairement adéquats à une réalité, qui ne vient pas d'ailleurs à notre connaissance en dehors de ces jugements imparfaits.

[...] De notre point de vue, le recours à cette forme d'intuition représente donc une application des lois de la physique de l'objet ; et mérite notre confiance dans la mesure même où celles-ci sont pratiquement infaillibles.

On le voit, le mathématicien se fait en général une idée assez vague des ressources que l'intuition met à sa disposition. **Il a quelque tendance à la considérer comme une faculté presque magique d'entrer en contact avec une vérité totale**.

A la réflexion, ce qui frappe le plus dans la méthode mathématique, ce n'est pas tant la conformité à une doctrine expressément formulée, que la permanence d'une technique de la démonstration et de déduction, dont les règles sont acceptées bien plus à la suite d'une pratique exigeante que d'une analyse raisonnée. [...] **le mathématicien ne sent pas la nécessité d'une théorie de la démonstration : il démontre, comme on marche sans voir fait la théorie du pas juste et du faux pas**.

[...]

En somme, malgré l'idée presque mystique qu'il se fait de l'intuition, le mathématicien ne fait qu'imiter et prolonger les enchaînements de faits et de phénomènes dont les réalités extérieures lui proposent les modèles. [...] Comme nécessité intrinsèque du raisonnement, **le recours à l'évidence ne fait que traduire à notre usage certaines permanences et certaines invariances du l'ordre du « naturel »**. ***Le fondement de toute évidence mathématique est une analogie***. §134

Si les évidences peuvent être comparées à des images, le film de ces images serait la *preuve*. Encore une fois, GONSETH fonde la preuve "idéale" en son origine intuitive et tente de la relier à la "preuve traditionnelle" :

La démonstration parfaite ne devrait-elle pas comporter en premier lieu une énumération claire et sans lacune de toutes les hypothèses ? Et comporter ensuite une seconde énumération, celle de tous les raisonnements qui l'ont fait progresser, avec leur justification. Ne devrait-elle pas être enfin présentée comme un tout qui réalise la déduction de « ce qu'il fallait démontrer » ?

[...] **La nécessité de la conclusion n'est que le reflet d'un nécessité pratique, avec toutes les faiblesses que ce dernier mot comporte, mais aussi avec tout la force des analogies authentiques**.

En résumé, l'idée d'une démonstration totalement intuitive paraît conciliable à première vue, avec l'idéal de la démonstration que nous avions imaginé.

Elle est cependant presque aussitôt altérée par deux ordres de faits d'une importance essentielle : premièrement par l'*emploi des symboles* et secondement par l'*évolution des concepts*. §135

73. Il suffit de consulter la première des stratégies de base de [Soul1999], l'auteur choisissant de la placer *avant* même la récurrence !

74. L'anecdote (narrée dans *Science et méthode*) de POINCARÉ frappé de l'éclair des fonction fuchsiennes en posant le pied sur le marche-pied d'un monibus à Coutances est un exemple. Nous aimerions également évoquer les étranges conjectures arithmétiques (certaines des théorèmes) de S. RAMANUJUAN qui nous paraissent avoir été formulées, sinon par des analogies, en tout cas de façon complètement mystérieuse. Nous citerons enfin l'*Esquisse d'un programme* de feu A. GROTHENDIECK qui continue à guider certains mathématiciens.

GONSETH va ensuite réinsérer la preuve dans la démarche axiomatique, en insistant sur son *recours central à l'évidence* et sur le *caractère non éternellement figé* de cette dernière :

> Nous le répétons : Les démonstrations effectives que le mathématicien reconnaît comme authentiques sont beaucoup plus conformes à l'idée de la *démonstration complètement intuitive* [...] que les non-mathématiciens ont tendance à l'imaginer. **Toutes les questions décisives se tranchent en définitive par un recours plus ou moins direct à l'évidence**. La force même de la position mathématique semble moins consister dans l'observation de principes absolus que dans la fidélité à cette règle de conduite : **Ne fais confiance qu'à des évidences bien manifestes et n'invoque que des nécessités dont tu as la sûre intuition !**
>
> Mais il est clair que, si forte que soit cette position dans la pratique et dans chaque cas particulier, elle est loin d'être éternellement assurée. Il y a au contraire des indices non équivoques de son instabilité et du constant glissement qui l'entraîne.
>
> Il y a les indices historiques : le sentiment de l'évidence s'altère.
>
> [...] Saisir une évidence immédiate, c'est porter un jugement sur les réalités telles qu'elles nous apparaissent. **Les vérités d'intuition** ne sont donc pas des vérités éternelles et immuables : ce sont elles aussi des vérités sommaires, valables tant que les circonstances auxquelles elles conviennent restent inaltérées... En un mot, ce **sont des jugements pratiquement vrais, mais**, en principe, **toujours en suspens** : toujours menacés du démenti que peut apporter une meilleure connaissance. Le vrai d'intuition du mathématicien, si on le débarrasse du préjugé précritique dont nous avons déjà parlé, c'est simplement le *vrai*[75] *intuitif*[76] [au sens intrinsèque de notre étude] avant que le processus de la schématisation axiomatique en ait fait le « vrai abstrait ». §136

Ainsi, la preuve intuitive, ancrée dans l'évidence intuitive, va pouvoir *évoluer* à travers les axiomatisations successives vers la preuve idéale :

> Les notions d'évidence intuitive, nécessité immédiate, et de démonstration par les seules évidences ne peuvent nous apparaître que comme le point de départ d'une évolution qui doit porter l'idée de démonstration à travers les seuils d'axiomatisation dans les schémas axiomatiques.
>
> Cette évolution se déclenche presque d'elle-même, si l'on accepte de poser la question que voici : Comment se fait-il que le sentiment de l'évidence puisse se retirer de certains jugements auxquels ils conférait autrefois leur valeur ? Notre réponses est fort simple : Le sentiment de l'évidence est au fond une foi dans l'adéquation totale de l'idée à son objet. Il suffit de la constatation d'une seule inadéquation (toujours possible, puisque l'adéquation n'est que sommaire) pour que le sentiment de l'évidence doive abandonner le *domaine dont la vérité s'est perdue*.
>
> [...]
>
> l'intuitif n'est pas donné en lui-même, de façon à jamais définitive. Et nous savons que toute tentative de le préciser et de le circonscrire nous engage précisément dans la voie de la schématisation. §136

GONSETH nous avertit cependant, à travers l'exemple de la transitivité de l'ordre numérique, que l'évidence, certes fondant la preuve, peut *elle-même s'appuyer sur quelque preuve*. Par conséquent, c'est plutôt toute une *dialectique preuve-évidence* qui se met en place :

> **Dans tout recours à l'évidence, il y a aussi quelque chose comme un raisonnement implicite**.
>
> [...] Ou bien il faut poser [un] axiome [...] [qui] fournit le modèle même d'une conséquence légitime. Ou bien il y aura déduction explicite dans le schéma axiomatique ; déduction qui peut être considérée comme implicitement contenue dans le recours à l'évidence qui permettait de l'éviter. On voit ainsi qu'ici encore **il n'y pas de ligne de démarcation séparant une fois pour toutes les nécessités intuitives et les nécessités explicitement justifiées**. §136

75. **on ne peut opposer la certitude mathématique à la relative incertitude des propositions empiriques**. Car la proposition mathématique a été obtenue par une série d'actions qui ne se différencient en rien du reste des actions de la vie, et qui sont tout autant sujettes à l'oubli, l'inadvertance et la confusion. [Witt1949-51] 651

76. Ainis donc **la certitude mathématique est exactement du même ordre que les autres certitudes immédiates de la vie**. [Gons1926] §31

Au sein de cette dialectique, quelle place (re)trouve la *vérité* ? Sont tout d'abord qualifiées *vraies* les évidences intuitives. Dans la démarche axiomatique, ce vrai du schématisé doit – par concordance schématique – se retrouver (à l'instar de la carte sylvestre) dans quelque vérité du schéma. Mais *nous* avons schématisé – et aurions pu le faire de toute autre manière qui nous eût paru utile, par exemple si l'on voulait prendre en compte d'autres vérités. Cette "matière" – ce vrai – que l'on donne aux preuves n'est cependant pas susceptible de caractérisation générale :

> *Les caractères intuitifs qui entrent dans les évidences extérieures se retrouvent en partie dans la connaissance que nous avons à prendre du schéma.*
>
> Nous disons : « les évidences extérieures se retrouvent *en partie* dans le schéma axiomatique », mais il ne faut pas se méprendre sur la portée de la restriction. Si l'on revient à l'exemple de la carte et de la forêt, on s'aperçoit bientôt que les moyens dont la carte se sert ou *pourrait se* servir ne sont pas limités d'avance. Il est vrai qu'elle n'a accepté que certaines suggestions du réel, et que pour les fixer elle n'a fait usage elle-même que de certains aspects très sommaires de ce même réel. Mais en principe rien ne lui est défendu. Pourvu qu'elle sache utilement s'en servir, tous les compartiments du réel lui sont ouverts.
>
> Au fond, la situation est tout à fait analogue dans le cas du schéma axiomatique. Pour une démonstration déterminée, le domaine qu'occuperont encore les évidences immédiates pourra être assez étroitement circonscrit. Mais **pour la *démonstration en général*, nous n'avons aucun moyen d'en indiquer *a priori* les limites, une fois pour toutes**. En principe, encore une fois, **pas un seul territoire de l'évidence ne lui est interdit et aucune barrière n'y délimite le terrain auquel elle a droit**.
>
> En un mot : **l'intuition originelle n'intervient plus dans la démonstration dans toute son amplitude primitive, mais elle a cependant conservé tout son « *potentiel* »**. §137

Il est toutefois possible de dissoudre toutes les nuances de vérité de cette « amplitude primitive » pour qu'en retenir qu'un seul caractère : sa valeur de vérité. Et à cet égard l'image chromatique de GONSETH est parlante :

> En concevant le nombre, nous avons saisi un caractère sommaire merveilleusement adéquat au maniement des objets physiques et qui nous dispense comme l'automate, d'avoir égard, pour certaines fins, à la couleur, à la forme, au poids, etc.
>
> C'est une simplification du même ordre qui nous échoit, quant à la démonstration, rien que de traverser le premier seuil d'axiomatisation. Au lieu de raisonner sur le contenu plein des axiomes et des énoncés, il nous est devenu possible de n'en prendre en considération qu'un caractère simplificateur et schématique ; sa valeur de vérité. **Qu'on nous permette une image ! Avant la schématisation, la démonstration cherche ses moyens dans un monde aux mille nuances ; après la schématisation, il n'y a plus que le blanc du vrai, et le noir du faux**.
>
> Ceci une fois bien compris, nous pouvons songer à caractériser la méthode déductive. **Ce n'est pas un ensemble de règles permettant d'introduire la vérité absolue dans nos considérations sur le monde de nos actions. Ce n'est pas même une méthode qui permette d'éviter le recours aux évidences immédiates**. Ce qui la distingue et ce qui en fait en même temps l'incomparable mérite, c'est **l'effort d'abstraction** qui la met ensuite en mesure **de n'envisager les objets de la pensée que sous l'angle simplificateur des lois abstraites de l'existence, et les pensées elles-mêmes sous l'angle schématique du vrai et du faux** — et cela, comme l'automate, **avec une sécurité et une efficacité pratiquement accrues**. §137

Ces dernières lignes confirment ce que nous écrivions plus haut : c'est bien ce *succès pratique* d'un retour sur les actes qui vient légitimer l'établissement du caractère *normatif* de la dialectique preuve-évidence.

GONSETH enclenche maintenant la deuxième schématisation (qui aboutissait aux structures) et analyse le nouveau visage que prend alors la preuve, un visage *formalisable* :

> Démontrer T à partir de A, B,..., L, c'est [...] maintenant *indiquer* une relation entre ces mêmes objets qui satisfasse aux mêmes prescriptions (quant à son emploi) que la relation [dont l'implication a pris l'aspect].
>
> Si, au lieu de tout ramener aux relations de pure logique, on cherchait plutôt à conduire le processus de l'abstraction vers les structures, [...] [o]n verrait [...] se préciser de façon en quelque

> sorte complémentaire **l'autre côté de l'activité mathématique** : non plus celui qui se plie aux nécessités imitées du réel, mais **celui qui déploie les libertés que la nature nous concède**. Nous voulons désigner par là **les règles où sont formulées les postulats relatifs à la libre et indéfinie répétition d'un même acte simple et au libre choix entre certaines éventualités également possibles**. §138

Nous pensons lire ici le *fondement du jeu symbolique* (formel), jeu dont nous sommes *seuls créateurs* des règles. Les fruits récoltés par un tel formalisme hilbertien ne sont plus à attendre [77].

Avant de revenir sur le terrain proprement *intuitif* de la preuve (avec BROUWER), GONSETH reprend les genèse et évolution de cette dernière. Cette reprise est d'une grande clarté synthétique : on y retrouve la *démystification* des notions logiques traditionnelles ainsi qu'une emphase sur et convergence en le giron *intuitif* :

> **La démonstration est originellement, dans son stade intuitif, un recours aux évidences immédiates**. Celles-ci ne sont d'ailleurs pas les moyens dont se servirait pour se réaliser l'intuition de certaines vérités en soi, ou de certaines réalités parfaitement déterminées. Elles ne sont que les vues sommaires et provisoirement irrécusables dont nous sommes capables sur une réalité dont la connaissance est en suspens.
>
> **L'axiomatisation altère profondément le caractère primitif de la démonstration. Elle remplace les évidences extérieures par les évidences propres au schéma axiomatique, qui s'expriment par les règles de la logique et par les axiomes ; mais ne peut empêcher l'intrusion de nouvelles évidences intuitives (sous une forme atténuée, il est vrai)**.
>
> Une nouvelle axiomatisation accentue encore cette évolution. **Les idées d'implication et de démonstration prennent un caractère plus formel. Le vrai et le faux tombent du rang de signification extérieures et n'interviennent plus que par certains côtés formels ou structurels**.
>
> Mais, et c'est surtout sur ce point que nous aimerions insister, **le processus d'abstraction s'accompagne d'un resserrement progressif sur le domaine de l'intuition la plus immédiate, d'une mise en analogie toujours plus étroite avec les notions les plus primitives de l'identité, de la diversité, de l'ordre, etc**. Encore une fois, non pas que celles-ci nous fassent toucher la vérité ; mais nous revenons au répertoire de nos idées les plus simples comme on revient à des moyens éprouvés dont on connaît l'emploi de longue date. **Les jugements à la fois imparfaits et efficaces, inachevés et lourds de sens par lesquelles notre intuition nous introduit dans la connaissance du monde restent les modèles les plus sûrs que la pensée puisse imiter dans son développement**. §139

Nous n'avons pas mentionné HILBERT et BROUWER sans dessein. L'histoire de leur divergence est connue. Leur convergence l'est peut-être un peu moins [78]. Rappelons le lieu de la méta-mathématique hilbertienne :

> Si la logique disparaît comme discipline autonome, on ne peut plus définir que négativement son rôle par élimination de celui des **intuitions concrètes, garanties à la fois de la fécondité et de la sûreté des raisonnements**. [Cava1938] p. 92

> Dans le cas [...] [de] l'arithmétique vulgaire finie où les objets sont des collections de barres verticales, les opérations, adjonction itérée d'une unité, leurs propriétés (associativité, distributivité, commutativité, $a + b = b + a$) [sont] **des constatations expérimentales**. [Cava1938] p. 97

> HILBERT s'était contenté d'une **délimitation extrinsèque de la zone intuitive** : les raisonnements arithmétiques qu'il y autorisait étaient simplement signalés au passage dans l'indivisible mouvement de la pensée concrète, sans que soit envisagé pour celle-ci un essai de codification de **procédés par essence imprévisibles**. [Cava1938] p. 143-144

77. Sans parler de la conception hilbertienne, nous répétons notre mise en garde du premier chapitre : pour GONSETH, le logique vient soutenir l'idéal mais jamais ne s'y susbtistera. Il n'est pas question d'un formalisme extrême qui se débarasserait du "sens idéal" pour n'en garder que la coquille (quand bien même, *dans la pratique* du mathématicien pur, la différence ne serait pas détectable).

78. Nous recommandons au mathématicien non philosophe qui aurait – comme nous – entendu beaucoup d'inepties sur BROUWER le dernier article de [GanSma2013] (p. 281-326), rédigé par M. DETLEFSEN et remarquable de clarté (version originale dans [Detl1992] p. 208-250)

Comment ne pas voir ici la sphère intuitive gonsethéenne ? La confusion qui embuait le principe de l'induction se dissout également : il y a d'une part un principe intuitif pratiquement assuré et d'autre part un principe formalisé (ou, plus précisément, la forme que ce principe intuitif prend – nous dirons plutôt une "forme principielle" ou "forme-principe"). On lira dans le même esprit :

> L'idée de Hilbert est de déplacer des mathématiques à la métamathématique, science de l'architecture logique et de la non-contradiction, le rôle constitutif de l'évidence. En pratique, le programme formaliste adhère donc malgré lui aux principes fondateurs de l'intuitionnisme puisque ses méthodes de preuve sont fondées sur des processus de type finitistes qui reconduisent à un système d'évidences originaires antérieur à toute formalisation. Selon Weyl, **Hilbert et Brouwer seraient, en fin de compte, en accord sur l'essentiel : la finitude des actes primitifs de la connaissance**, leur désaccord portant sur le terrain sur lequel ces actes prennent sens – mathématiques ou métamathématiques. [Patr2001] p. 96

Mais laissons les propos de GONSETH faire leur travail (et conclure ce chapitre) :

> **L'intuitionnisme renonce [...], dans sa doctrine originelle, à lier *a priori* la notion de démonstration à une règle de logique quelconque. La démonstration est indéfinissable ; l'essentiel n'en est pas constitué par une série de normes données par avance ; au contraire, chaque raisonnement doit être examiné dans son individualité ; la certitude qu'il apporte sort essentiellement de son évidence immédiate et irrécusable**.
>
> [...] Il suffit de prendre, dans les deux cas [mathématiques orthodoxes et intuitionnistes], les notions fondamentales comme des vues sommaires sur le réel et sur les actions que nous pouvons y accomplir. Des vues différentes, il est vrai ! Mais qui ne s'excluent pas, parce qu'elles sont sommaires toutes les deux. De la même façon que **deux portraits d'une même personne, exécutés par deux peintures différents, ne détruisent pas réciproquement leur fidélité à leur modèle commun**. Avant tout, **il faut renoncer à l'idéal précritique de l'intuition, pour ne lui laisser qu'un sens en suspens** (comparable en quelque sorte à la valeur de vérité en suspens dont nous parlions il y a un instant).
>
> Il faut encore que l'intuitionnisme accepte de voir dans son idée de la démonstration une idée en devenir, au même titre que l'idée de la démonstration selon les normes ordinaires.
>
> Mais à ce prix, rien ne s'oppose à la coexistence des deux doctrines. Rien ne s'oppose à ce que soit reconnue l'authenticité aussi bien que l'originalité des vues brouweriennes. §139

1.18 Récapitulation & conclusion

Dans ce chapitre final, GONSETH reprend à travers la voix d'Idoine les thèses exposées dans *Les mathématique et la réalité – Essai sur la méthode axiomatique* face à ses détracteurs Sceptique et Parfait :

> — IDOINE — Ai-je su vous toucher, mes deux fidèles contradicteurs qui m'avez accompagné jusqu'ici ?
>
> SCEPTIQUE. — Au fond, qu'y a-t-il de changé ? Rien, ou bien peu de chose !
>
> PARFAIT. — Comment ? Mais tout serait ébranlé et compromis, si Idoine pouvait avoir raison ! §140

La réponse de Sceptique, niant tout l'apport philosophique (ou presque) des discussions passées quant à sa propre son conception du monde, appelle tout d'abord la *nécessité d'une philosophie* :

> IDOINE — [...] Tout ce que vous appelez dispute philosophique vous semble factice ; vous n'y soupçonnez que paradoxes, que fausses analogies et argumentations fallacieuses. Vous vous croyez dans une position privilégiée, hors d'atteinte. Les imaginations des philosophes sont, à votre, idée, des bulles de savon brillantes et fragiles, que le moindre contact avec les dures certitudes dont vous êtes armé, fait éclater. Car vous croyez formuler, quant à la vérité, des exigences spéciales, et vous croyez être en mesure de les remplir.

> En un mot, rien n'existe à vos yeux que le précis et le délimité. L'informe vous écraserait que vous en nieriez l'existence. **Vous avez la religion du défini !**
>
> [...]
>
> SCEPTIQUE — Vous me poussez à bout. Et si je déclarais que les esprits justes observent naturellement les mêmes exigences !
>
> IDOINE — Ce serait une capitulation ! Car vous auriez posé en fait qu'il existe des esprits naturellement justes, et qu'il existe une méthode naturelle commune à tous les esprits justes et rompus aux embûches de la pensée exacte.
>
> Mais cette logique naturelle, l'imaginiez-vous donnée actuellement et complètement ? Ou bien pensez-vous que l'esprit ne s'en empare que peu à peu, bien qu'elle existe de cette existence que Platon conférait aux idées ? Ou bien encore la voyez-vous engagée dans un devenir dont le rythme n'est pas prédéterminé ?
>
> Autant d'éventualités qui s'excluent l'une l'autre ! **Choisir** entre elles, **c'est** encore une fois **être philosophe**. §141

Malgré cette prise de position philosophique, il est des faits qui peuvent et qui doivent être *posés hors de toute philosophie* :

> IDOINE — [...] Que déclare Sceptique ? Qu'il a le droit de mépriser nos commentaires et nos jugements parce qu'ils ne viennent qu'après les certitudes primaires auxquelles il se réfère. Il nous rappelle, avec raison, qu'**aucune philosophie ne l'empêchera de poser que « deux et deux font quatre »**.
>
> [...] quelle que soit la théorie à laquelle je m'arrêterai, sur ce fond ouvragé les lois de l'arithmétique dessineront toujours, en traits robustement schématiques, une image adéquate de ce que nous appelons la réalité.
>
> [...] L'idée d'une pratique du raisonnement logico-mathématique assurée contre tous les avatars de pensée critique est ainsi visiblement conforme à l'idée qui m'est chère et à laquelle j'ai opiniâtrement tenté de donner corps : **Que les dernières évidences et nos dernières certitudes ne sont que des saisies schématiques et simplificatrices sur un réel susceptible, en principe, de déterminations ultérieures**. §142

L'adéquation est rappelée n'être que sommaire, la prétention d'absoluité devant être déchue :

> IDOINE. [...] « Que les vues immédiates qui nous sont ouvertes sur le monde et sur notre propre esprit ne sont que des aperçus sommaires » ; en d'autres termes encore, que **la connaissance intuitive représente déjà une élaboration simplificatrice conforme aux nécessités de l'action**.
>
> [...]
>
> Dans cet ordre d'idée, le point extrême est représenté par **les notions fondamentales de l'être, du vrai et du possible**. A l'esprit qui accepte de les voir **abandonner leur auréole d'absolu**, elles **révèlent également leur caractère schématique ; l'être ayant été primitivement conçu à partir des choses ; le vrai visant avant tout nos jugements ; et le possible sortant par abstraction de certaines libertés qui nous sont naturelles**.
>
> [...] Il n'est plus légitime de croire que les évidences intuitives apportent à un esprit suffisamment éclairé une connaissance entièrement adéquate de certes réalités. Ce fut, un temps, une vue schématique efficace. Les progrès du savoir ont disjoint ce cadre trop étroit. En lui restant fidèle, le mathématicien pur que vous êtres, Sceptique, et le métaphysicien que vous êtes, Parfait, se font les défenseurs attardés d'une systématique périmée. §143

Tout en étant sommaires, nos concepts sont en vertu de leur caractère vivant *en perpétuel devenir* :

> IDOINE. [...] **En même temps que les concepts spécifiquement mathématiques, tels que la droite ou le nombre, ce sont aussi les idées du possible, du vrai, de l'être, du nécessaire qui s'altèrent à travers les âges**.
>
> [...]
>
> D'ailleurs, comme ces idées sont étroitement conjointes, il n'en est pas une seule dont le sens reste invariablement fixé : leur commune histoire, pour qui veut la lire, n'est pas autre chose que

l'histoire de l'effort renouvelé — et toujours déçu — du mathématicien pour asseoir définitivement les fondements de sa science.

[...] **nos idées, même les plus profondément ancrées, sont en suspens entre un passé qui nous échappe peut-être en partie et un avenir encore imprévisible : elles sont essentiellement en devenir**. §144

GONSETH reprend ensuite le problème de l'objet et de la démonstration mathématiques et le résout à travers *la démarche symbolique* (stade atteint après la deuxième axiomatisation), ancrée dans les *manipulations concrètes* de la sphère intuitive, elles-mêmes légitimées par les *types*, la concordance schématique reposant quant à elle sur le *principe d'analogie*, éprouvé par les faits. Sans surprise, les concepts même d'existence et de démonstration en ressortent transformés – car toujours en devenir :

IDOINE. [...] **en supposant pouvoir reconnaître le même symbole dans deux signes qu'il vient de tracer, le mathématicien fait implicitement fond sur la connaissance des types**; [...] en supposant pouvoir distinguer que deux figures assez compliquées représentent deux formules de structures identiques, il suppose accompli tout un travail de simplification et de typification relatif non seulement aux objets, mais à toute une catégorie d'actes et d'intentions. [...] enfin, **en invoquant les nécessités propres à la réalisation pour justifier les nécessités propres au réalisé, il s'appuie intuitivement sur le principe d'analogie**.

[...]

Dans sa simplicité, cet exemple [distinguer deux formules dont l'une contient 10^{20} fois le signe 1 et l'autre $10^{20}+1$ le signe 1] est révélateur ! Il nous avertit de ne point considérer le domaine du concret comme donné et limité par avance, car il est au contraire en devenir ! Et l'intervention des concepts de la logique et des mathématiques a précisément pour effet d'en reculer les bornes. Logique et mathématiques ne sont ici que moyens adéquats, — et indispensables, — pour saisir le concret. Sans en excepter l'idée du nécessaire et de la démonstration elle-même.

Et maintenant la situation me paraît claire. Imaginons avec les finitistes un domaine de réalité restreint où la démonstration n'est que simple constatation de certaines évidences. **Sous la poussée des abstraits logico-mathématiques et de la pratique de la démonstration, le cercle de ces évidences originelles va s'élargissant vers un horizon mental toujours fuyant**. L'idée elle-même de démonstration évolue vers l'abstrait, et il arrive un instant où le besoin se fait sentir de lui faire reprendre contact avec le concret. Par l'intermédiaire du symbole, nous en édifions un modèle avec les éléments du domaine primitif. Ce rajeunissement opéré, la démonstration renaît sous sa forme originelle : elle est revenue aux démarches pratiquement assurées dans la sphère du concret immédiat. Mais elle y renaît intégralement, avec la même puissance d'extension, et à mesure que la démonstration première poursuit l'idée de la démonstration générale, elle va elle-même s'engager dans la même voie et dans les mêmes destins mathématiques.

En un mot, **la démonstration générale ne comporte pas de figuration qui puisse être enfermée dans un domaine concret non susceptible d'extension**.

Veuillez observer que, de mon point de vue, il n'y a là qu'un processus fort normal. Le rajeunissement par les symboles n'est que le signe d'un passage par un seuil d'abstraction, après lequel le symbole et le symbolisé ne sont plus que deux réalisations différentes d'un même abstrait. §145

Ces dernière lignes nous semblent dénoter une certaine conception symbolique de l'objet – et du discours portant sur ces derniers – (nécessairement provisoires !) qui nous paraît fort bien résumée dans ce que M. CAVEING entend par « idéalité » : « un « être » qui n'est jamais offert par sa simple présence, mais **par la médiation du système réglé des désignations qui permettent d'en disposer** » [79]. Nous pensons également retrouvons un écho de cette conception à travers ces magnifiques lignes d'H. WEYL :

The stages through which research in the foundations of mathematics has passed in recent times correspond to the three basic possibilities of epistemological attitude. The set-theoretical approachis the stage of *naive realism* which is unaware of the transition from the given to the transcendent. Brouwer represents *idealism*, by demanding the reduction of all truth to the intuitively given. In axiomatic formalism, finally, consciousness makes the attempt to 'jump over its own shadow,' to leave behind the stuff of the given, to represent the transcendent – but how could it

79. [Cave2001] p.77

be otherwise?, only through the *symbol.* [...] It cannot be denied that a theoretical desire, incomprehensible from the merely phenomenal point of view, is alive in us which urges toward totality. Mathematics shows that with particular clarity; but it also teaches us that that desire can be fulfilled on one condition only, namely, **that we are satisfied with the symbol and renounce the mystical error of expecting the transcendent ever to fall within the lighted circle of our intuition**. [Weyl1926] p. 65-66

Revenons à GONSETH. Le principe de concordance schématique (porté par celui d'analogie) est au fondement même de l'efficacité de la méthode axiomatique : mais que *vise* au juste son utilisation ? Au fond : une meilleure *adéquation entre notre action et sa projection* :

PARFAIT. — Ayant répudié l'essence prédéterminée dans la chose et l'existence prédestinée dans le concept, comment espérer jeter entre eux le pont de la connaissance ?

IDOINE. — Comment vous faire saisir que **les termes mêmes dans lesquels vous formulez ce reproche sont ceux qui conviennent — intrinsèquement ! — à une certaine vision schématique du monde de la pensée ; qu'ils ne font qu'évoquer celui-ci par un édifice verbal possédant à la fois la force suggestive et toutes les insuffisances d'un modèle symbolique ?**

Comment vous faire comprendre que ce schéma ne s'impose pas avec l'écrasante nécessité d'un absolu ! Qu'il est possible d'en concevoir un autre, de façon que tous les termes du langage viennent y prendre appui en abandonnant une partie de leur sens ? [...]

[...] **Toute notre connaissance étant en devenir, non seulement en étendue mais dans sa structure profonde, pourquoi la conception que nous nous en faisons devrait-elle rester *ne varietur* ?** Les termes du problème variant au cours des siècles, pourquoi la réponse ne serait-elle pas en devenir, chaque époque la formulant en cédant à ses propres nécessités, en s'éclairant de son propre savoir ?

[...] Êtes-vous si certain que l'on puisse être fidèle, à la fois, aux vues platoniciennes sur la Vérité, par exemple, et au désir profond du philosophe qu'elles ont satisfait. Que diriez-vous si j'opposais à votre piété qui veut être totale **une volonté de retrouver un accord plus profond dans l'acte [80] et l'intention ?** §146

La voie proposée par Parfait est tentante : fixer le canon qui permettra cet accord. Et Idoine de mettre le doigt sur ce qui justifierait un tel canon – toujours la sphère intuitive ! –, ouvrant ainsi une voie pour préserver les premières philosophies mathématiques :

IDOINE. [...] Comme moi vous pensez que tout ensemble organisé de connaissances, que tout savoir systématisé, présuppose, en ce point central, une position préalablement occupée, des vies préconçues, une doctrine préliminaire. [...]

PARFAIT. — Nous sommes cependant profondément divisés sur la nature d'une telle doctrine. Car je la vois formulant en termes définitifs ce qui est avec nécessité, ce qui ne peut pas ne pas être tel qu'il est. Évoquant la vérité dans l'être et l'être dans la vérité : un canon vrai où s'expriment en lois éternelles les rapports de l'abstrait et du concret.

IDOINE. — Tandis que **je cherche en moi sans les trouver les critères où viendraient se mesurer des certitudes aussi démesurées**. Tandis que **nulle part en moi je ne découvre de point d'appui pour une réalité aussi inflexible. Vous semblez trouver naturel qu'un savoir aussi incroyable vous parvienne par la misérable voie des signes verbaux !** Tandis que **je ne sais pas faire abstraction des moyens dont il me faudrait disposer pour le concevoir et pour l'accueillir**.

Je ne puis me dispenser de demander : Quelles sont les conditions d'existence d'un tel canon ? Sur quel ordre de faits viendra-t-il se fonder ? Où prendra-t-il sa vérité. En un mot : Comme le justifier ?

Et vous connaissez ma réponse : **Le cadre où il vient prendre, place, c'est celui de nos ordinaires certitudes. Sa vérité trouve ses critères dans le pratiquement assuré. Sa justification, c'est d'avoir pu être aperçu, d'avoir pu être conçu et de pouvoir servir !**

Or c'est précisément en cet endroit que mon indépendance reprend les traits de la fidélité. Pour concevoir adéquatement les rapports du concret à l'abstrait, il faut les apercevoir réalisés en

80. C'est lorsqu'il y a fusion dans toutes les parties du corps que le travail subtil d'équilibration se fait sans désordre. II y a Un dans l'acte accompli. Que c'est difficile de réaliser Un dans notre être, compartimenté et morcelé ! [Tsud1979] p. 70

un endroit particulièrement favorable, en une articulation particulièrement importante du jeu des pensées, afin que cet exemple propice puisse servir de modèle et de point de départ. Les platoniciens que vous admirez tant, Parfait, n'ont point fait autre chose. Ils ont trouvé un modèle éclatant dans les rapports de la géométrie à la réalité macroscopique qui leur était accessible. Conçus à partir de cet exemple saisissant, le concret et l'abstrait se sont ensuite répandus sur tout le champ de la pensée.

[...]

En fait, **je me demande qui de nous deux est le plus vraiment fidèle à l'entreprise des premiers philosophes-mathématiciens : de vous qui, pour ne rien compromettre d'un schéma dont la connaissance s'échappe, vous retirez du réel ; ou de moi qui, pour conserver le contact avec le réel et retrouver l'accord qui se perd, modifie le schéma pour en sauver l'idée ?** §147

Le projet idonéiste semble compromettre, selon Parfait, l'accès aux idées mathématiques de ces premiers philosophes. Idoine, ayant déjà dénoncé l'excès ontologique, restitue l'accès aux abstraits *via l'expérience abstractrice même* depuis la sphère intuitive (comme il importe de disposer de cette dernière !), réalisant par là même ces abstraits comme *transfuges fidèles du vécu* :

IDOINE. [...] L'exemple de la droite ne peut vous avoir échappé. **Lorsque, jeunes garçons, nous tracions avec soin nos figures géométriques, nous revivions certainement avec plénitude l'idée de l'accord imaginé par les Grecs entre la géométrie et ses réalisations**. L'idée de la droite a maintenant perdu pour nous cette immédiateté et cette simplicité de signification. **Les conditions de son emploi efficace nous ont été révélées à la fois dans leur plus grande imprécision et dans leur plus profonde réalité**. Mais rien de nous oblige à renoncer à un seul des services qu'elle nous rendait : nous ne savons que les mieux apprécier ! **En glissant du sens qu'elle prend intrinsèquement dans un système schématique au sens qu'elle acquiert dans un autre système, une notion peut ainsi fort bien rester efficace dans les limites de son emploi primitif**.

Pourquoi n'en serait-il pas de même pour les idées de la réalité et de la vérité, du concret et de l'abstrait, du physique et du rationnel ? **Pourquoi ne devrait-il pas être possible de les faire entrer comme éléments dans un nouveau schéma totalitaire (et par là même explicatif !) en apportant à celui-ci l'essentiel du rôle qu'ils jouaient : transfuges par fidélité ?**

[...]

Votre désir toujours renaissant des vérités dernières vous égare, Parfait. Que sont les mots sans l'expérience qui les anime ? [...] je ne vois pas que celui qui désire entrer en possession des idées de l'adéquation schématique, de la signification extérieure et de la structure intrinsèque, puisse être dispensé de parcourir la voie ouverte par la pensée mathématique. Comme pourrait-il imaginer, s'il ne les a jamais sincèrement vécues, la transmutation des concrets en abstraits et la nature de leur équivalence ? Qu'il entreprenne lui-même — car c'est une expérience intransmissible — la pérégrination axiomatique, attentif à se laisser pénétrer de ses enseignements ! §148

Vient ensuite la *construction de la réalité*, l'idée en devenir du réel permettant d'explorer ce réel – en fait *de le constituer* –, construction qui vient *démystifier la causalité* :

IDOINE. — L'argument que vous tirez de l'étrangeté du monde corpusculaire peut se retourner contre vous. Il est naturel qu'il ne soit pas aisé d'expliquer le microscopique par des modèles schématiques dont tous les éléments sont abstraits du macroscopique.

[...] **Dire que le mot de « réalité » ne doit point s'employer comme s'il existait une « chose de ce nom » que nous ne faisons que découvrir telle qu'elle est de toute éternité, dont l'essence vient simplement déposer son empreinte adéquate dans notre connaissance, dire que l'idée du réel et de toutes les choses réelles est en devenir, devenir dans lequel notre faculté de savoir n'est pas purement réceptive, ce n'est pas nier la pression que ce que nous pouvons continuer à appeler le réel, exerce sur tout notre être. Ce n'est pas dire que nous ne soyons pas attentifs aux nécessités venant du monde objectif, mais c'est dire que nous y répondons dans le cadre de nos propres possibilités.**

D'avoir aperçu que, dans toutes ses démarches, l'esprit reste en suspens entre l'absolue détermination et la liberté désordonnée de l'arbitraire, n'exige pas de renoncer à l'idée de la loi naturelle. C'est au contraire celle-ci qui, chargée de son nouveau sens, s'introduit jusque dans le Saint des saints de la Raison. §148

Suivant celle de la causalité, arrive la *déchéance de toute vérité absolue*[81] :

IDOINE. [...] Nous ne sommes pas les maîtres de conserver à l'idée de Vérité son sens originel : l'évolution qui l'en a détournée, qui, à travers maints avatars, l'a conduite jusqu'à son sens actuel, il ne dépend ni de notre désir ni de notre volonté qu'elle soit ou ne soit pas. Avec toute la force que conserve la notion de l'être, même réduite à sa signification schématique, elle est, elle est historiquement !

Je ne puis pas ne pas constater que, presque sous nos yeux, **l'idée du vrai mathématique lui-même vient de bifurquer**. [...]

[...] **La dégradation du vrai est un fait accompli**. D'ores et déjà, la notion absolue de l'être a été précipitée de son piédestal dans la foule des notions sommaires. La rançon, ce ne peut être que **l'abandon**, par votre conscience individuelle ou par la mienne, **d'une idée dont le devenir historique a démenti l'originelle simplicité**. §149

Enfin, le baptême de la conception gonsethéenne incarnée dans le personnage d'Idoine :

SCEPTIQUE ET PARFAIT. [...] **l'idée directrice de votre tentative est simple : concevoir tout d'abord les rapports de l'abstrait et du concret sur l'exemple privilégié des mathématiques et de leurs applications ; étendre ensuite cette conception à tous les ordre de la pensée**. [...]
IDOINE. [...] mon **idonéisme**[82] §150

Et GONSETH de conclure à l'*évolution*, non seulement du concept, mais également *du concepteur*, la position idoine synthétisant deux moments de la vie philosophique du mathématicien, moments qu'il devra avoir vécu pour en effectuer véritablement la synthèse :

La science semble aujourd'hui animée de deux esprits ennemis : l'un d'eux poursuit dans le rationnel — et spécialement dans les mathématiques « pures » — l'idéal de la « Vérité en soi » ; l'autre recherche dans le naturel, et spécialement dans le donné expérimental, l'idéal complémentaire de la « Réalité en soi ». Tenez-vous pour rien d'avoir compris que l'un et l'autre n'incorporent qu'une vue sommaire de notre faculté de connaître, et ne peuvent que perdre leur efficacité et s'évanouir dans l'indéterminé si l'on pousse jusqu'à l'absolu l'idée de leur détermination. Et d'avoir distingué les termes d'un nouvel accord prenant pour base leur commune efficacité ? §150

LE NOUVEL IDOINE — Vous n'arrivez jamais à vous entendre. Mais moi, **je vous reconnais tous trois pour trois moments de ma pensée. Nul ne peut être Idoine qui ne fut et ne sait être encore Sceptique en face des faits, et Parfait en face des idées**. §151

81. **le grand *problème de la vérité***. L'ancienne conception métaphysique le voyait à peu près comme suit : il y a une réalité ; **il y a un monde de l'être vrai ; une proposition est vraie, si elle concorde effectivement avec ce qui se passe dans cette réalité**. [...] Malheureusement, cette réalité n'est pas à notre portée, et nous ne pouvons pas appliquer la définition qui précède. C'est une déveine pour l'espèce humaine, mais cela ne change rien à la situation. Puisque nous ne pouvons pas vérifier si une affirmation concorde avec la réalité, acceptons **la conception *pragmatique* : la vérité d'une proposition consistant dans sa confirmation. De fait, la vérité s'en trouve dépouillée de caractère absolu, éternel ; elle devient relative, humanisée** ; mais, du moins, elle comporte une critère *applicable*. À quoi pourrait bien mener un concept de vérité, qui ne serait pas utilisable ? [Hahn1935] p. 47-48

82. en gras dans le texte

2 *La géométrie et le problème de l'espace*

Dans cet ouvrage, le plus souvent cité dans les commentaires sur Gonseth que nous avons pu consulter (essentiellement [PanzPont1992]), la connaissance *intuitive* (celle dont il a été question dans l'ouvrage que nous venons d'étudier) est posée dès l'introduction et, en un certain sens, se suffit à elle-même, non problématique :

> C'est [...] un des caractères de la connaissance *par évidence* de ne souffrir aucune réflexion qui veuille l'atteindre ou l'éclairer.
>
> A ce niveau, il n'y a pas de problème de l'espace. Il n'y a pas de problème de la connaissance, de même qu'il n'y a pas, pour un homme normal, de problème de la marche ou de problème de la station debout. Connaître est une activité naturelle. §1

C'est l'introduction du *théorique*, du *déductif*, qui va induire une rétroaction de la connaissance sur elle-même et sur l'esprit qui l'a engendrée, menaçant ainsi le donné intuitif (voire l'acquis expérimental) et mettant la connaissance en position de crise :

> Même en géométrie, le plus grand de ces risques ne lui est pas épargné : celui de découvrir sa propre relativité.
>
> Il peut arriver, — la crise du non-euclidien en fournit l'exemple, — que le mouvement qui porte la connaissance en avant découvre et expose les bases sur lesquelles elle s'appuyait. L'idée qu'elle a d'elle-même ne recouvre plus fidèlement ce dont elle est capable. Le problème qui surgit ainsi ne peut pas être traité en continuant à géométriser suivant les normes observées jusque-là. **Ce n'est plus un problème de géométrie ; c'est un problème de critique**. L'instance qui le formule a pour fonction l'examen, la comparaison critiques de nos activités, c'est la gardienne de notre cohérence intime.
>
> [...]
>
> Mais pourquoi, dans ce cadre élargi, ce problème mérite-t-il tant d'être pris en considération ? C'est que le mouvement qui porte la connaissance en avant menace maintenant l'unité et la cohérence de la pensée scientifique.
>
> C'est une question que la pensée scientifique se pose à elle-même. Mais ce n'est pas un problème scientifique au sens ordinaire puisqu'il ne fait l'objet d'aucune discipline déterminée. Encore une fois, **c'est un problème de critique. L'instance devant laquelle il se pose est la critique de la connaissance objective**. C'est la conscience collective gardienne de l'unité et de la cohérence de la science. §2

Émerge ainsi le problème de la réunion de ces deux sources de connaissances, de leurs dynamiques s'interpénétrant, en bref – lâchons le mot gonsethéen – de leur *synthèse dialectique*. Le géométrique sera pris, à travers le problème de l'espace, comme exemple type du problème de la connaissance.

2.1 Nos croyances primitives se révéleront-elles idoines ?

Dans son premier chapitre, après avoir analysé quelques réponses d'étudiants à des questions portant sur les notions fondamentales du géométrique, analyse au cours de laquelle se révèlent des conceptions primitives profondément *divergentes*, Gonseth conclut sur l'impossibilité de légitimer une métaphysique première :

> en cédant à l'intention métaphysique, nous nous écartons des conditions du savoir réel. Rien ne nous autorise à penser qu'une discipline objective puisse jamais être fondée sur une doctrine préalable et première, au sens métaphysique [83] de ces mots.
>
> Cette constatation est peut-être difficile à accepter. Elle contredit une tendance presque invincible de notre esprit. Mais est-il possible de répudier le témoignage des faits qui nous l'imposent ? §16

83. Notre pensée ne saurait saisir aucune réalité d'aucune sorte ; elle ne peut nous informer sur aucun fait du monde ; elle ne touche qu'à la manière dont nous parlons de lui et ne peut que faire subir des transformations à ce que nous en disons. Il n'est aucun moyen de faire surgir *par la pensée*, derrière le monde sensible que l'observation nous fait percevoir, un « monde de l'être véritable ». **Toute métaphysique est impossible**. Impossible, non pas parce qu'un tel problème dépasserait la pensée humaine, mais parce qu'il manque de sens [Hahn1935] p. 35

La leçon à en tirer est simple (et difficile) : que nous, enseignants, tirions au plus clair nos croyances les plus profondément enracinées [84]. Quant à la légitimation de ces dernières, elle pourra (condition suffisante) s'établir si ces croyances possèdent quelque caractère *idoine* :

> Une doctrine préalable ne se justifie pas d'elle-même au préalable. Elle se révèle idoine par ses incidences et par ses conséquences. §18
>
> [le mot « idoine »] signifie *qui convient, qui est conforme aux fins et aux intentions, approprié à sa fonction*, etc. §19
>
> « Si tu ne connais le vrai,
> L'idoine il te faut chercher. ».
>
> [...]
>
> Par mesure idoine,
> J'édicte le décret qui suit :
> Si tu ne connais le vrai,
> L'idoine il te faut chercher. §21
>
> La philosophie de l'idoine n'est-elle pas la philosophie du simple bon sens ? §22
>
> [le principe d'idonéité] introduit une solution ouverte : la doctrine préalable doit rester révisable, puisqu'on ne connaît pas d'avance les caractères qui la rendraient pleinement efficace ; sa justesse se reconnaît à l'emploi. *Elle est légitime dans la mesure où elle se révèle idoine.* (rappels du chapitre 1)

2.2 La première synthèse dialectique : intuitif, empirique, théorique

Avant de décrire le troisième aspect (du géométrique) – le *théorique* –, GONSETH présente un deuxième aspect – l'*empirique* – (déjà évoqué au §10 de [Gons1936] que nous avons cité) qui vient prolonger le premier – l'*intuitif* [85] –. Les objets de l'*empeiron* étant des *marbres* et des *règles*, sommaires réalisations des plans et droites idéales, les constatations suivantes peuvent être dressées, présentant comme une *proto-physique* toute une *géométrie expérimentale* [86] :

> Nous avons déjà indiqué les observations fondamentales auxquelles donnent lieu les rapports des marbres entre eux :
>
> 1° Deux marbres quelconques sont intégralement superposables.
>
> Bien entendu, cette observation n'a pas été faite pour tous les marbres possibles. Elle a seulement été faite un assez grand nombre de fois, et jamais elle ne s'est trouvée en défaut. Lorsque nous affirmons que deux marbres quelconques sont superposables, **nous formulons ici une loi générale que l'expérience rend très probable. En le faisant, nous restons strictement dans le cadre de la méthode expérimentale : c'est de la même façon que se prouvent ou que se vérifient les lois expérimentales de la physique, de la chimie, etc.**
>
> 2° Deux marbres superposés peuvent glisser l'un sur l'autre dans tous les sens.
>
> Les règles se prêtent à des observations analogues :
>
> 3° Deux règles quelconques sont intégralement superposables.
>
> 4° Deux règles restant superposées, l'une peut glisser le long de l'autre.

84. nous ferons choix d'un certain ensemble de questions centrales, et d'une simplicité si primitive qu'aucune époque n'ait pu les éviter [...], celles qui sont relatives à **l'idée générale de l'objet** et de ses qualités ; à **l'idée du vrai** et de ses réalisations dans le réel ; à **l'idée du nécessaire** (ou du possible) et de leur réalisations dans les lois et les choix ; et, enfin, comme cadre commun, la question générale de **l'adéquation de l'abstrait au concret ; de l'accord de la pensée avec son objet**. Nous y insistons : **Toute logique, qui ne s'explique pas sur ces questions, les préjuge**. [Gons1937] §3

85. La connaissance est [...] intuitive, lorsque l'esprit aperçoit la convenance de deux idées, immédiatement par elles-mêmes, sans l'intervention d'aucune autre. En ce cas, l'esprit ne prend aucune peine pour prouver ou examiner la vérité. C'est comme l'œil voit la lumière que l'esprit voit que le blanc n'est pas le noir, qu'un cercle n'est pas un triangle, que trois est deux et un. Cette connaissance est la plus claire et la plus certaine, dont l'homme soit capable ; elle agit **d'une manière irrésistible sans permettre à l'esprit d'hésiter**. C'est connaître que l'idée est dans l'esprit telle qu'on l'aperçoit. **Quiconque demande une plus grande certitude ne sait pas ce qu'il demande**. [Hahn1935] p. 22 (citant Leibniz, *Nouveaux Essais*, IV, II, §1)

86. Malgré l'appareil logique qu'elle emploie, et son renom de science exacte, la géométrie fut longtemps et presque jusqu'à nos jours, la **géométrie expérimentale** que nous venons d'esquisser. [Gons1926] §1

> 5° Deux règles ne peuvent se toucher en deux endroits différents sans se superposer.
>
> Les marbres et les règles se prêtent ensemble à l'observation des lois suivantes :
> 6° Toute règle qui repose par deux points sur un marbre repose intégralement sur ce marbre.
> 7° Sans cesser de reposer intégralement sur un marbre, une règle peut être déplacée dans tous les sens.
> Etc., etc.
> Toute une série d'**expériences semblables** peuvent être effectuées ; elles sont **très simples, très élémentaires ; ce n'en sont pas moins de vraies expériences**. §39
>
> Si l'on y attachait quelque importance, **la géométrie pourrait être présentée comme un chapitre élémentaire de physique expérimentale**. Le lien rationnel entre les différents théorèmes pourrait être passé sous silence, chaque théorème étant considéré comme une propriété, une loi naturelle à vérifier par l'expérience. Ainsi, **l'aspect expérimental de la géométrie se trouverait mis en pleine lumière**. §43

Cette géométrie empirique est, tout autant que celle intuitive, ancrée dans le sujet connaissant et déjà l'on [87] pourrait parler, à leur sujet, d'une *synthèse dialectique* qui ne serait autre que l'expérience que l'homme de la rue acquerrait tout au long de sa vie :

> En un certain sens, l'intuitif et l'expérimental s'opposent : l'expérimentation tend toujours à dépasser l'intuition, à la contrôler, à la prendre en faute. Et pourtant, elle serait aveugle et paralysée, si elle ne disposait de la la vision préalable de l'espace et de la conception préalable du temps. Et quant à l'intuition, sa sécurité ne lui vient-elle pas de s'être formée sous la pression de l'expérience ? §49

Ce double aspect empirico-intuitif, centré sur l'expérimentateur [88], s'oppose au théorique qui cherche, lui, à relier ces « faits que les apparences [séparent] » [89], cette recherche s'effectuant à l'aide de nos *capacités déductives* qui possèdent (§48) un caractère *intuitif* [90] et effectif dont il a déjà été question dans [Gons1936] :

> A l'extrême, cette intention [expérimentale] s'incarnerait dans l'expérimentateur exclusif, pour qui jamais la liaison de deux faits par le raisonnement n'aurait de force contraignante. Pour cet observateur, la science n'existerait pas ; la connaissance se réduirait à une poussière amorphe de faits constatés ou vérifiés. L'intention théorique tend, au contraire, à réduire le rôle de ce partenaire, porteur d'une vérité venue d'ailleurs. Elle cherche à lui substituer, dans toute la mesure du possible, l'exercice autonome de nos facultés mentales. §46

Une mise en garde s'avère ici nécessaire, comparant les trois aspects abordés dans respectivement [Gons1936] et [Gons1945-55] : si l'on retrouve bien l'intuitif de [Gons1936], son empirique brièvement évoqué, ainsi que le logique non formel dans son stade intuitif, il n'est pas question ici de l'idéal, de l'abstrait.

Dans ce deuxième chapitre de [Gons1945-55], ce sont les trois aspects sus-présentés de la connaissance géométrique – 1. intuitif, primitif, 2. empirique, expérimental, 3. théorique, déductif (non formel) – dont GONSETH propose une *première synthèse dialectique* en posant la nécessité de chacun ainsi que leur égale valeur de vérité. Voici déjà une puissante source d'éclaircissement pour tout enseignant en géométrie : sur quel(s) terrain(s) se place-t-il à tel instant lorsqu'il s'adresse à un(e)tel(le) ?

> comment les trois modes de la connaissance géométrique concourent-ils à la constitution de la géométrie élémentaire ? Comment la rencontre des trois aspects se fait-elle à cet échelon de la science de l'espace ?
> [...]
> La réponse à notre question est [...] nette :

87. nous ne suivons pas ici GONSETH
88. Ce n'est point parce que le savant s'est armé de quelques instruments qu'il a pu modifier beaucoup le caractère de ses relations avec le monde extérieur. Il expérimente finalement toujours avec son corps, c'est-à-dire avec ses sens et son esprit. *La méthode expérimentale du physicien est simplement le prolongement, sans hiatus essentiel, du processus par lequel se forme notre connaissance intuitive de l'univers.* [Gons1936] §31
89. [Poin1905] p. 181-182
90. La locution : « Rigoureux comme un théorème de géométrie », est aussi fausse que possible. C'est : « **Intuitif comme une démonstration de géométrie** » qu'il faudrait plutôt dire. [Gons1926] §1

1° les trois aspects de la géométrie ont même valeur de vérité ;

2° non seulement ils ne se contredisent pas, mais ils s'allient étroitement, se recouvrent, se superposent ;

3° ils sont également nécessaires tous les trois.

Telle est, après celle de CLAIRAUT, la réponse de Louis BERTRAND. §52

> la façon dont un enseignement géométrique est construit, peut comporter les dosages les plus divers des recours aux trois sources de notre information. A travers ces dosages, l'absence de contradiction n'en reste pas moins la base des relations réciproques. En un mot :
>
> *l'équivalence de vérité des trois aspects est l'idée dominante de la doctrine préalable de la géométrie élémentaire.*
>
> [...] C'est de l'organisation des trois aspects entre eux qu'il doit être question, de l'organisation de leur coopération réciproque.
>
> [...]
>
> On peut naturellement défendre d'autres doctrines fondamentales, comme on défend telles ou telles doctrines philosophiques, sans trop se soucier de les éprouver dans la pratique de la connaissance. Mais si l'on veut être sincère, si l'on veut avoir la doctrine de sa pratique, **il ne peut y avoir hésitation ni contestation sur l'idée dominante : pédagogiquement, tout le monde s'y conforme. Tous l'acceptent en fait, quelques-uns même sans y prendre garde. Mais tous sont-ils au clair sur ce qu'ils font ? Il est permis d'en douter.** §53
>
> Nous disions que tout enseignement géométrique réel cherche à fixer, conformément à l'idée dominante, **le jeu concerté des trois aspects**. Ce jeu même, **dans lequel s'exprime la connaissance intégrale de l'espace**, c'**est précisément la solution du problème de l'espace**, au niveau d'une connaissance conforme à notre vision naturelle du monde. Donnons au jeu des trois aspects le nom qu'il mérite, le nom que les remarques précédentes justifient :
>
> *C'est un jeu dialectique, une synthèse dialectique de l'intuitif, de l'expérimental et du théorique.* §54

2.3 Axiomatisations (informelles) de la géométrie

> que gagnerions-nous à observer toutes ces précautions [de la démarche axiomatique] ? [...] **de ne plus tomber dans tous les pièges de l'évidence**. §55

La visée est donnée. Comment se constitue alors la démarche axiomatique ? Sans surprise pour le moderne : d'une liste exhaustive d'*objets premiers* (non définis[91]) et d'*énoncés premiers* (non prouvés) ainsi que de *moyens*[92] d'engendrer de *nouveaux objets* et de *nouveaux énoncés*[93].

> On peut s'étonner qu'il suffise de si peu pour fonder une technique — une technique mentale — de la spécification du rationnel. Il faut, pensons-nous, en faire l'expérience pour bien s'en convaincre. §58

C'est à quoi GONSETH s'attelle dans les prochains paragraphes, proposant deux axiomatisation différentes – et équivalentes – selon que l'on prenne pour notion de base l'équipolarité des bipoints (la relation quaternaire "être de même sens") ou bien l'intermédiarité (la relation ternaire "être entre"). Les premiers essais amènent une description fonctionnelle de la démarche axiomatique où l'on retrouve le côté "ordonnant" de l'aspect théorique :

91. « Une définition ne fait que te ramener un pas en arrière à autre chose de non défini. » Qu'est-ce que cela nous apprend ? Quelqu'un l'ignorait-il ? – Non ; mais ne pouvait-il le perdre de vue ? [Witt1937-44] p. 109

92. La technique (la *possibilité*) de dresser un autre à l'appliquer ne fait-elle donc pas partie de l'application de la règle ? Et ce au moyen d'exemples. Et le critère de sa compréhension doit être l'accord des actions individuelles. Donc pas dans la réceptivité comme lors d'un enseignement. [Witt1937-44] p. 332

93. Il est piquant d'observer que, dans la littérature mathématique traditionnelle, le premier moyen – la *définition* – est rarement mentionné (sans doute le langage est-il considéré comme non problématique ?) en comparaison du second moyen – la *preuve* – à qui l'on réserve bien plus de discours.

> l'axiomatisation ne fait que reprendre l'ensemble de nos notions et de nos représentations intuitives pour le réduire déductivement à une partie seulement d'entre elles [...]. **L'édification axiomatique** n'a pas le seul objet de parvenir par une voie unique à des énoncés épurés ; elle **a aussi pour mission d'organiser**, dans la mesure du possible, **l'ensemble de nos vues intuitives.** §70

Plus précisément, ayant constaté que l'axiomatisation ne perd de vue ni le sens originel de ses objets premiers ni le but poursuivi par l'utilisation de ces objets, le tout évoluant dans une terre déductive soumise aux « lois et [...] nécessités élémentaires de la pensée [...] qui, judicieusement employées, soudent les propositions du système déductif les unes aux autres », GONSETH peut présenter sa *première définition d'une dialectique* :

> voici les caractères principaux d'une argumentation qui doit permettre d'engendrer un système déductif à partir de sa base axiomatique :
> 1° *elle est informée par la signification des choses dont on parle*,
> 2° *elle est guidée par les fins qu'on se propose*,
> 3° *elle est astreinte à respecter certaines associations de pensée élémentaires.*
> Nous appellerons une argumentation de ce genre une ***dialectique***. §57

L'apport gonsethéen, comparé à une démarche axiomatique *formelle* moderne qui ne tiendrait compte que la base axiomatique (objets & énoncés premiers, moyens de définir & prouver), est précisément *celui d'une dialectique*. Et ce devra « être le souci constant de l'axiomatisation de ne pas faire de confusion entre ce qui ressort à la dialectique[94] et ce qui est matière axiomatique [...] sur laquelle elle s'exerce » (§62).

Une fable (§67), *la maison aux mille fenêtres*, donnera une image de l'axiomatisation : on s'interdit en principe de voir au travers de certaines fenêtres et l'on reconstruira par certains moyens ("dialectiques") la vision depuis ces fenêtres à partir de celles autorisées (le "en principe" tolérant une utilisation « uniquement pour orienter et pour contrôler le travail dialectique »). Le gain d'une telle démarche pourra peut-être mieux s'apprécier à l'aune de la morale imagée :

> tout pouvait n'être qu'un jeu sans conséquence ; mais celui qui l'inventa s'en trouva récompensé. **Non seulement la réalité qu'il connaissait déjà lui fut rendue intégralement : elle lui revint comme une connaissance approfondie**. §67

Nous passons sur l'édification proprement dite (qui occupe une quarantaine de paragraphes) pour en venir à la conclusion :

> En axiomatisant la géométrie, nous n'avons fait qu'une expérience de spécification ; par le fait, sur le vif, **nous avons exposé comment l'un des aspects de la pensée géométrique peut être conçu de façon plus nette, plus incisive**, mais il nous a fallu pour en arriver là, une technique idoine de spécification, dans le cas particulier de la méthode axiomatique §101

GONSETH pointe cependant le risque de la spécification axiomatique (en quoi le continu, corrélat théorique de l'axiomatisation géométrique, s'appliquerait-il au réel où nous avons trouvé la base de la dite axiomatisation ?) et la nécessité de nouvelles notions pour permettre au travail dialectique une autre synthèse.

---

94. Une deuxième définition apparaît clairement au §107 et recouvre la première : une *technique* [...] sera, pour nous, le concours d'un certain ensemble de procédés, réunis en vue d'une certaine activité et informés par la connaissance d'un certain horizon de réalité. [...] Une technique est donc aussi un « être historique », et l'état dans lequel elle se trouve à un moment déterminée pourrait être appelé une *forme d'activité*. [...] **Une technique verbale ou mentale dont le caractère dominant est normatif, méthodologique ou normalisateur, est une dialectique**. Cette définition s'applique naturellement à la dialectique de la déduction géométrique.

2.4 La deuxième synthèse dialectique : schéma, horizon de réalité

Ne pas perdre de vue les fins qu'on se propose ! Si l'intuition peut être éliminée du théorique proprement dit, elle se retrouve d'autant plus concentrée en la base axiomatique où elle revendique – sans légitimité apparente et pourtant en toute efficacité – ses qualités premières [95] :

> A l'origine, au moment où, sans définition ni démonstration, nous recueillons, nous choisissons et nous acceptons les éléments faute desquels l'appareil axiomatique resterait sans contenu. A l'issue, au moment où il se vérifie (où nous vérifions !) qu'en prenant le chemin du rationnel, nous ne tournons pas le dos aux fins naturelles de toute géométrie qui sont [...] « d'étendre et de préciser la connaissance que toute homme possède de l'espace en général et plus spécialement de la forme et de la grandeur des corps, de leurs positions et de leurs déplacements ». §102
>
> Comment se fait-il que les notions primitives conviennent au rôle que nous leur attribuons, bien qu'aucune d'elles ne nous soit offerte « telle quelle » par la réalité physique — aussi peu celle d'égalité, par exemple, que celle de point ou de droite ?
>
> De quel droit pose-t-on qu'un axiome est valable, bien que la réalité ne nous présente aucun modèle concret où il soit parfaitement réalisé ? §103

Ce sera la notion de *schéma* qui constituera un élément de réponse capital. Nous l'avons déjà rencontrée dans [Gons1936] (GONSETH reprendra d'ailleurs la même fable de la boule dans la forêt) ainsi que la notion associée de *signification extérieure*, « la réalité qu'il a fonction de saisir, en la schématisant » (§105), "définition" qui sera bien vite remise en cause étant donné (nous l'avons vu également dans [Gons1936]) que *le schéma constitue sa **propre** signification extérieure* [96] :

> il n'est pas du tout nécessaire que la signification extérieure soit une réalité donnée d'avance « telle qu'elle est », dans ses caractères essentiels et définitifs. (Rien, d'ailleurs, n'autorise à penser qu'une réalité soit jamais donnée de cette façon-là.)
>
> Et pourtant il nous faut accepter comme authentique la façon dont elle nous est proposée par l'intermédiaire d'une représentation encore engagée dans la gangue d'une certaine indétermination.
>
> [...]
>
> le schéma [...] n'est [...] **ni antérieur ni postérieur à la connaissance de la signification extérieure ; il est l'un des éléments constitutifs de cette connaissance. La constitution du schéma est le moyen par lequel la réalité qu'il saisit prend pour nous sa structure**. Schéma et signification extérieure ne sont alors séparables que par le jeu de deux intentions opposées : celle de nous affirmer en face des choses et celle d'affirmer les choses en face de nous.
>
> [...]
>
> La rencontre de ces quatre qualificatifs : provisoire et pourtant primitif, sommaire et pourtant suffisant, appliquée à un certain niveau de connaissance ne devrait rien avoir de surprenant, car elle ne fait que décrire la façon font un schéma s'insère [...] dans sa signification extérieure. [...] Pourquoi éprouvons-nous cependant un instant de surprise en les voyant s'appliquer les quatre à la fois ? C'est que **la connaissance usuelle est de prime abord engagée dans un préjugé réaliste dont on n'imagine pas que la limite soit si facile à franchir**. §106

Le nouveau, comparé à [Gons1936], est ici la notion d'*horizon de réalité* ou – ce qui revient au même – d'*horizon de connaissance* qui décrit, dans la constitution de la réalité, *ce que constitue* précisément un schéma. La terminologie gonsethéenne a le mérite d'apporter immédiatement une image très parlante : un schéma a, de par son horizon, une portée "visuelle", limitée, et ce n'est qu'en se transportant à la frontière de cet horizon, c'est-à-dire en schématisant à nouveau, que l'ancien horizon pourra se déployer, que nous pourrons explorer la réalité se dévoilant à notre esprit. Finalement, la réalité devient notion seconde, créée littéralement par ce voyage entre et ce tissage des horizons de réalité, notions devenues premières. La terminologie des horizons évoque ainsi la *toute la dynamique et la vivance* (le fameux « en devenir ! ») de l'élaboration de la réalité et de notre connaissance :

---

95. ce n'est que par un acte d'immédiate compréhension que nous pourrons nous rendre compte de l'absence de toute contradiction entre [les ultimes notions sur lesquelles l'axiomatique est sans emprise] : en d'autres termes, **c'est intuitivement qu'il nous faudra saisir leurs rapports mutuels** et décider en particulier que ces notions dernières sont indépendantes les unes des autres. [Gons1926] §31

96. cela fait encore écho avec la dernière (et première) citation de M. CAVEING

Pour décrire la façon dont est donnée **la signification extérieure d'un schéma**, nous pourrons dire maintenant que celle-ci **doit être connue non comme une réalité en soi, mais comme un horizon de réalité**, que **la connaissance que nous en possédons n'est pas une saisie définitive, mais un horizon de connaissance**.

[...]

Rien [...] ne nous autorise à poser en règle qu'un schéma et l'horizon de sa signification extérieure ne puisent jamais s'édifier simultanément dans une interdépendance réciproque. Si nous voulons tenir compte objectivement des démarches dont l'esprit humain est capable, la prudence conseille d'admettre le contraire — et les confirmations ne nous manqueront pas.

[...]

la constitution et l'interprétation d'un schéma *(ou, si l'on préfère, sa conception et sa mise en œuvre)* ***sont les moyens mêmes par lesquels un horizon de connaissance se définit***. §106

Ainsi se trouve éclairci **un des aspects de la correspondance schématique, celui de la « qualité de réalité » du schéma et de sa signification extérieure**. Le résultat, sur ce point, est le même pour les deux : **leur « façon d'être » n'est pas du type de la réalité en soi, mais du type de l'horizon de réalité**. §107

Se pose aussitôt la question de la *concordance schématique*. La réponse gonsethéenne est frappante et, sur le fond, ne changera en rien de celle exposée dans [Gons1936] au §129. Sa chair est cependant bien plus élaborée et il est difficile de choisir des pièces, de tronquer cette longue citation :

« **Un fait tient du miracle, dira-t-on. C'est que la technique mise en œuvre dans un schéma disjoint de sa signification extérieure reste en parallèle avec les opérations que l'on effectue dans cette signification extérieure. Ce fait est certainement capital car c'est ce qui fait tout l'intérêt et qui commande toute l'utilisation du schéma**. Or c'est trop peu de dire qu'il n'a pas trouvé d'explication jusqu'ici : aucun essai d'explication n'a même été tenté. » L'observation est exacte : nous n'avons pas le moins du monde tenté d'expliquer comment il peut se faire qu'il existe une concordance schématique et pourquoi une telle correspondance peut avoir une aussi grande portée. Faut-il vraiment s'en étonner ? A celui qui nous en ferait grief, voici ce que nous pourrions répondre :

« **De quel genre d'explication parlez-vous ?** Pensez-vous que tout soit explicable ; qu'on puisse donner de tout des raisons nécessaires et suffisantes ? Voulez-vous dire qu'une explication véritable est une explication définitive qui ne laisse plus aucune ombre derrière elle ? **Pour vous l'explication ne devrait-elle pas être, pour être entièrement valable, la réduction d'un donné opaque à une situation rationnellement claire ? »**

« Mais où prenez-vous qu'il existe toujours, et même qu'il existe parfois, des explications de ce genre ? Pour nous et pour ce qui nous occupe ici, nous estimons qu'il n'en existe pas ! »

Une comparaison nous permettra d'éclaircir la situation. En observant régulièrement le cours et les phases de la Lune, on peut y découvrir certaines lois de périodicité. La connaissance de ces lois est-elle mal fondée lorsqu'on n'en donne pas d'explication ? **Une loi d'expérience n'est-elle pas une loi véritable, et lui faut-il toujours une explication ?**

Certes, il est possible de donner une explication des périodicités dont nous parlons, une explication dont l'élément explicatif essentiel serait fournir par les positions et les mouvements relatifs de la terre, de la lune et du soleil. Mais la connaissance de ces mouvements est, elle aussi, toute pénétrée de connaissances empiriques. Faut-il la rendre rationnelle ? On peut en donner une nouvelle explication dans le cadre d'une théorie du système solaire. Mais cette théorie n'est elle-même ni gratuite, ni purement rationnelle. Des éléments empiriques contribuent à la constituer. Et ainsi de suite.

Une connaissance s'étant fixée en lois dans un certain horizon de réalité, toute explication ultérieure requiert les éléments d'une horizon de réalité qui embrasse, élargit ou approfondit le premier. Mais ce nouvel horizon de réalité n'a pas de vertu explicative dernière et absolue.

Toute explication qui vaut la peine d'être imaginée participe plus ou moins des mêmes caractères. Elle n'est jamais définitive. [...]

> Revenons maintenant à la question de la concordance schématique. [...] **Les conditions mêmes d'une explication de ce genre nous font complètement défaut**. Au point où nous en sommes, **la possibilité d'une concordance schématique est un fait d'expérience**[97]. §107

Nous voyons dans la comparaison centrale ainsi que dans la conclusion finale une réhabilitation et un renouveau humiens : il n'est pas ici question d'un lever de soleil mais du succès d'une démarche[98] – que cela change-t-il donc ? En quoi l'expérience – la nôtre ou celle d'autrui –, l'habitude, ne jugeraient-elles pas *in fine* de la confiance à accorder à certains guides de notre vie, que ces derniers soient simples prédictions événementielles ou vérités profondes sur la connaissance ou la vie ? *Cette réponse [...] marque un moment essentiel de notre exposé*, écrivait GONSETH au §127 de [Gons1936]. Nous ne saurions trop renchérir !

Une remarque doit nous avertir de l'arrivée du *logique pur* (celui des structures, qui n'est plus le logique intuitif-déductif) dans la démarche schématisante :

> L'intention d'axiomatiser **en éliminant plus ou moins complètement la signification originelle des éléments géométriques** n'est plus à mettre en doute ; elle est réalisable ; elle est réalisée et les exigences qu'il reste à faire valoir ne peuvent que refluer de ce fait accompli vers notre propre vision, vers notre propre doctrine des rapports du connaissant au connaissable. §107
>
> les démarches de la dialectique ne tiennent jamais à la nature particulière des objets à propos desquelles elles sont lieu.
>
> [...] Les points et les droites [...] sont des choses dont les caractères distinctifs, les caractères qui leur sont particuliers, n'auront plus à intervenir. [...] On dira, par exemple, que les points forment une première catégorie, les droites une seconde, les angles une troisième, etc. ; ou bien on dira la catégorie A, la catégorie B, la catégorie C, etc. ; ou bien encore on désignera toujours et exclusivement les points par des majuscules ; les droites par des minuscules ; les angles par des lettres de l'alphabet grec, et ainsi de suite.
>
> [...]
>
> Tout compte fait, il est donc inexact de dire que la dialectique opère sur des mots vides de sens. Il faut dire plutôt que **le sens des mots est réduit à la fonction de dénommer un certain nombre de catégories de choses ou un certain nombre de relations de catégorie à catégorie**. §111

Il est remarquable que le mot "formel" ne soit pas encore prononcé. On prendra par conséquent – afin de rester fidèle à GONSETH – les mêmes précautions qu'en lisant FREGE d'un regard moderne, à savoir de ne pas interpréter strictement ce qui précède comme un jeu symbolique ni ce qui suit comme un fondement de ce jeu[99] :

> Par rapport aux configurations d'éléments dont ils posent ou concèdent la possibilité, les axiomes fixent nos droits et nos devoirs, c'est-à-dire les libertés qu'ils nous reconnaissent et les restrictions, les nécessités qu'ils nous imposent. Ce dont la dialectique reste capable se trouve ainsi délimité : c'est **l'exercice de ces libertés dans le cadre de ces nécessités**.
>
> Sans vouloir faire ici le compte exact de toute ce que cela signifie, on peut en quelques mots en indiquer certaines parties essentielles : la logique (ou physique) de l'objet quelconque, comportant **les jugements d'existence, de compatibilité ou d'exclusion réciproque des groupes d'objets de nature quelconque**, la logique de l'acte quelconque énonçant **les lois de combinaisons des actions compatibles ou incompatibles, un canon de nos jugements élémentaires concernant l'emploi du vrai et du faux, une certaine charte de nos libertés naturelles**, par exemple de notre liberté d'imaginer ou de ne pas prendre en considération, etc.
>
> Or il faut remarquer que la logique, tendant à se constituer en discipline autonome, répond précisément à l'intention de légiférer sur les objets indépendamment de leur nature, sur les classes sans avoir à se préoccuper des propriétés de leurs éléments (si ce n'est celle d'être réunis en une même classe qu'on ne puisse pas confondre avec une autre classe), sur les actes en ne sachant rien de leur réalisation (si ce n'est qu'ils sont libres ou liés, compatibles ou contradictoires), etc.

97. Il arrive un moment où il nous faut passer de l'explication à la simple description. [Witt1949-51] 189

98. En vertu d'une sélection naturelle, **déterminée précisément par les progrès réalisés** dans cette double voie de la compréhension théorique et de l'application, et parallèlement à l'observation des faits, les idées, les lois, les conceptions se succèdent, tantôt ne se prêtant qu'à une courte apparition, tantôt, au contraire, devant aux facilités qu'elles créent de sembler définitives. [Milh1898] p. 202

99. Nous avons déjà évoqué ce propos à plusieurs reprises dans notre partie 1 consacrée à [Gons1936].

> En ce sens, **la technique à laquelle le matériel axiomatique revisé donne prise est une technique strictement logique**. §112

Le schéma avait été introduit comme outil cardinal de la démarche axiomatique. A-t-il rempli son rôle ? GONSETH nous délivre encore une belle image, puissamment évocatrice :

> Tout au long de l'axiomatisation, [...] nous avons pris la peine de revenir sur **les buts de l'axiomatisation**. C'est, expliquions-nous, **de reconstruire** rationnellement (ou, mieux encore, déductivement) **le contenu de l'intuition**. [...] nous avons désigné la signification extérieure en face de laquelle le schéma axiomatique se constituait : *C'était précisément le contenu de l'intuition.* §113

Il nous rappelle toutefois de veiller à ne pas retomber dans le mythe d'une réalité prédonnée, mythe tombé depuis les avancées de la physique atomique [100] :

> La connaissance instrumentée a fait surgir, à l'intérieur de la connaissance sensible, une réalité métasensible. [...] la connaissance intuitive[...] se trouve reléguée du rôle (usurpé) de connaissance immédiate et définitive au rang de connaissance intermédiaire, de connaissance provisoire. Il nous faut renoncer à l'idée que son objet, que l'objet de son intention est une réalité en soi. Il nous faut enfin reconnaître que ce n'est qu'un horizon de réalité.
>
> [...]
>
> Ne manquons pas de le répéter : la variation de doctrine qui s'exprime par l'abandon de l'idée de réalité toute simple au profit de l'idée d'horizon de réalité est la conséquence fatale de la variation de la doctrine physique relative aux propriétés de la substance matérielle. §116

Le schéma apparaît alors non plus comme outil central de la démarche axiomatique mais plus généralement comme pièce maîtresse de la *création du réel et de la connaissance* (pas seulement géométrique) et ce à travers leurs *horizons* respectifs :

> un schéma ne se présente pas nécessairement comme image réduite ou simplifiée d'une réalité déjà donnée par elle-même. Au contraire, le schéma peut se présenter comme moyen constitutif essentiel d'un horizon de réalité. C'est lui qui déterminer la forme sous laquelle cet horizon se constituera pour nous. Il apparaît alors parfaitement adéquat à sa signification extérieure. Il paraît faire un avec elle. Celle-ci ne s'en détache que lorsqu'on l'envisage comme objet d'une connaissance qui l'épouserait étroitement. Sa signification extérieure n'a pas de forme antérieure et plus précise que celle qu'il lui confère. En un mot, *c'est par lui que l'horizon de réalité se constitue.*
>
> [...]
>
> Pour le dire une dernière fois, *pour l'horizon de connaissance qui ferme, provisoirement peut-être la perspective, le schéma représente le moyen même par lequel l'horizon de connaissance de sa signification extérieure se trouve précisé, bien plus, grâce auquel il prend sa spécification.* **Le schéma** est alors tout le contraire d'une imitation simplifiée, tout le contraire d'une création après coup. C'est au contraire lui qui **apporte l'élément créateur par excellence, l'élément sans lequel il n'y aurait pas de connaissance puisqu'il n'y aurait pas de forme d'expression de cette connaissance**.
>
> [...]
>
> **Les résultats précédents** ont une valeur qui dépasse le cadre de la géométrie. Ils **concernent l'ensemble de la connaissance**, nous voulons dire l'état dans lequel toute connaissance se présente à nous, à un instant déterminé : **rien ne nous autorise à penser que notre connaissance, même à ses dernières frontières, soit davantage qu'un *horizon de connaissance* ; que les dernières « réalités » que nous ayons conçues, soient davantage qu'un *horizon de réalité*.** §116

100. La physique d'aujourd'hui ne permet plus d'imaginer une localisation aussi déterminée. Il suffit d'évoquer l'idée de l'électron, parquet d'énergie ondulatoire ! Certes ! l'idée, selon laquelle l'objet est formé d'une certaine quantité de matière toute ramassée dans un morceau d'espace bien délimité est **merveilleusement efficace ; est admirablement adaptée aux nécessités humaines.** Néanmoins, [...] *l'idée d'objet que nous suggère la réalité la plus commune n'est que sommairement juste*, au même titre que l'idée de droite que nous suggère un fil tendu. [Gons1937] §6

C'est dans ce cadre global de la connaissance que s'exprime pleinement la concordance schématique. D'une part dans la *théorie des modèles*, dont « il saute aux yeux qu[e la méthode] n'est pas de la même nature que les règles de la logique déductive » [101], d'autre part dans la *légitimation de la démarche théorique*, apportant une réponse aux propos de HAHN que nous citions [102] à la section 1.17 (§133 de [Gons1936]) :

> l'explication théorique d'un fait confère à ce dernier une certaine garantie rationnelle qu'il ne possédait pas encore. — Et quant à la théorie elle-même, quel en est **le garant** ? **C'est sa convenance**, ce dernier mot devant être parfois pris dans un sens très strict et d'autres fois dans un sens beaucoup plus large.
>
> [...] **C'est dans une trame extrêmement complexe et serrée d'explications et de confrontations qu'elle s'éprouve. Son *idonéité* ne lui était pas acquise d'avance. Elle l'acquiert en la méritant**. §123

Avant de conclure cet important chapitre, GONSETH revient sur l'aspect purement logique de l'axiomatique évoqué au §112, aspect logique qui fonde l'*indépendance de l'axiomaticien* :

> La théorie des objets, fondements de l'autonomie (relative) de l'horizon axiomatique, se présente sous les trois aspects principaux que voici :
> a) comme ***physique de l'objet quelconque***,
> b) comme ***charte de nos libertés naturelles***,
> c) comme ***canon élémentaire de nos jugements***. §124

Ces trois aspects (que GONSETH développe) méritent commentaire.

Nous avons déjà étudié la physique de l'objet quelconque, que nous rebaptiserions volontiers *logique combinatoire*. Il est par ailleurs à noter que « [l]a physique de l'objet quelconque va [...] de pair avec une **Logique de nos conduites élémentaires** » : nous pensons trouver exprimé ici le fondement du *jeu de langage*, la façon dont nous réagissons à et utilisons le langage.

Nos libertés naturelles incluent celles de notre esprit, par exemple la liberté *d'itérer indéfiniment*, « mais les justes prétentions de l'esprit vont encore plus loin. Il revendique de pouvoir rassembler dans la conception d'un seul objet un processus de genèse qui peut comporter une suite illimitée de moments ». N'en déplaise à ZÉNON, cette revendication est criante en géométrie lors des processus de *mesure* utilisant des méthodes exhaustives, terreau fertile d'où émerge *le continu*. Nous sommes déjà avertis et ne confondrons pas ce "guide intuitif" (nos capacités mentales à appréhender la notion de limite) avec quelque vérité empirique, même si *in fine* c'est bien l'empirique qui jugera de la qualité de ce guide :

> Toute la théorie du continu témoigne de la liberté dont l'esprit dispose vis-à-vis de son expérience, de la liberté de la compléter, de la prolonger, de l'intégrer dans une théorie. Il est clair qu'un énoncé tel que **l'axiome [du point-limite] n'est pas susceptible d'une vérification expérimentale directe**. Nous sommes cependant **libres de l'admettre** comme une hypothèse directrice et simplificatrice. L'efficacité de **cette mesure** trouve alors sont expression dans la cohérence de tout le système. Elle **retombe, par ce biais, sous le coup de l'expérience**.
>
> [...]
>
> Il n'y a pas de doute que la théorie de continu, cette façon d'extrapoler et de « fermer » l'expérience de l'espace en accord avec nos vues intuitives, correspond à une façon admissible de faire. Comment s'expliquer qu'elle put causer aux philosophes grecs des difficultés qu'ils ne surmontèrent jamais. C'est naturellement qu'ils n'étaient pas parvenus à dégager la dialectique des raisonnements de ce genre. Ce n'est que beaucoup plus tard, le problème se posant à nouveau au sujet du calcul différentiel, que la dialectique adéquate finit par se constituer — à travers tous les tâtonnements et toutes les difficultés que l'on sait. §124

Le troisième aspect est *normatif* – pas au sens « ça *doit* être ainsi » mais au sens où l'*on reconnaît* que « c'*est* ainsi » – et sans appel :

101. on lira au même §117 : « La méthode des modèles sort [...] clairement de la tradition rationnelle. Sa seule justification est l'existence des concordances schématiques dont nous relevons le jeu à toutes les articulations de notre connaissance spatiale. »
102. « Pourquoi ce qui contraint notre pensée contraindrait-il aussi le cours du monde ? »

> La physique de l'objet quelconque n'est pas toute la physique, elle n'en est que le chapitre le plus élémentaire. La charte de nos libertés naturelles n'est pas codification de tout ce dont nous sommes et serons capables, elle n'en est que la très sommaire esquisse. En tant que canon de nos jugements, la logique n'est pas une instance aux compétences illimitées. Ce n'est, en somme, qu'un instance préalable. Mais elle est impitoyable.
>
> [...]
>
> l'esprit est capable, dans un climat normatif inconditionnel, de décider si tel système de jugements est ou non recevable. §124

La deuxième synthèse dialectique de la géométrie, comme dialectique des horizons constitués par les schémas, est maintenant achevée.

2.5 Les géométries non euclidiennes

Historiquement, c'est bien la "découverte" des géométries non euclidiennes qui a précédé l'axiomatisation hilbertienne et non l'inverse comme Gonseth le reconstitue pour nous guider vers une meilleure compréhension de ses thèses.

Nous y voyons un parallèle avec les paradoxes de Russell et de Richard qui pourraient être présentés dans un cours de théorie des ensembles : le premier, découvert en 1901 et publié en 1903, devrait pédagogiquement figurer *après* le second malgré la postériorité de ce dernier, publié en 1905. En effet, tant que l'on reste dans la sphère intuitive, un certain typage intuitif nous empêche de donner sens à une quelconque auto-appartenance [103] et d'engendrer ainsi le paradoxe de Russell [104] ; néanmoins, une fois le langage formalisé (une issue naturelle au paradoxe de Richard), l'auto-appartenance n'est plus qu'un prédicat singulaire comme un autre et nous oblige à limiter le schéma de séparation sous peine de permettre à Russell de nous acculer à la contradiction.

Nous sommes par conséquent bien disposé à accueillir cet écart gonsethéen à l'histoire.

Sans réflexion critique, telle la démarche gonsethéenne, les sentiments de l'évidence, de la plénitude du sens qui coule dans les canaux déductifs, ne sont généralement pas problématiques. C'est alors souvent l'apparition d'une contradiction qui vient ruiner ces sentiments naïfs : si l'on s'accroche coûte que coûte à quelque signification "évidente" (qu'elle soit intuitive ou abstraite), la contradiction devient une authentique *antinomie* qui dévaste tout, comme Frege en a fait les frais suite à l'antinomie russellienne. Il semblerait plus sage d'appeler *l'évidence à la barre des accusés* et de lui accorder un *juste procès* :

> Il n'y a pas à en douter, c'est bien l'évidence et l'intuition qui sont mises en cause par l'expérience géométrique dont nous tirons à ce moment les conséquences. Il est d'ores et déjà établi qu'elles ne sortent pas indemnes de cette épreuve. Mais, gardons-nous de considérer l'évidence comme un témoin de vérité qui aurait déçu notre confiance et qui, de ce fait, ne mériterait plus d'être cru. [...] **L'idée qui faisait de l'évidence un témoin irrécusable et incorruptible, c'est la nôtre**. [...] **ce qui ne sort pas intact de l'aventure, c'est notre propre vision du rôle de l'intuition**. [...]
>
> Le problème de l'évidence, c'est donc de mieux savoir quelle est la valeur, et quelle est la portée de l'évidence. Ce n'est pas de choisir l'une ou l'autre de ces deux solutions, dont ni l'une ni l'autre ne convient, celle de l'évidence absolue que l'expérience réfute et celle de l'évidence fallacieuse que la pratique dément. [...] **Le sentiment de certitude qui accompagne la prise en conscience de l'évidence** [...] **est un sentiment (éprouvé par un homme) dont il n'est pas interdit de se demander jusqu'à quel point il est justifié**. §151

Nous sommes passés sur la plus grande teneur de ce cinquième chapitre, à savoir :

1. construire proprement une axiomatique non euclidienne (celle du disque de Poincaré, sur lequel agissent les homographies de la droite complexe) ;
2. écrire les objets et énoncés "analogues" des notions premières de l'euclidien ;

103. J'entends : si l'on fixe son attention sur l'emploi, on n'a jamais l'idée d'écrire "f(f)". D'un autre côté, lorsqu'on utiliser les signes du calcul pour ainsi dire *sans présupposé*, l'on peut aussi écrire "f(f)" et il faut alors tirer les conséquences, et ne pas oublier que l'on n'a encore aucune *idée* d'une éventuelle application de ce calcul. [Witt1937-44] p.187

104. le propos est en fait de Gonseth même : nous l'avons mentionné à la section 1.15 (§117 de [Gons1936])

3. tisser les parallèles avec une axiomatique euclidienne "classique" en mettant en regard les éléments euclidiens et non-euclidiens.

Une des conclusions sera bien sûr l'*indépendance du cinquième postulat* (§138). Il nous paraît à ce propos judicieux de citer [Gons1926] qui récapitule la question de manière particulièrement concise :

> Est-il possible d'imaginer, que par le point A, il existe plus d'une non-sécante ? [à une droite donnée]
>
> **Une fois prononcé le seul mot d'axiomatique, il est malaisé de comprendre que la question même ait pu se poser ; nous n'en saisissons plus le sens. Mieux encore, elle n'a pour nous plus de sens du tout**, et nous nous étonnons sérieusement qu'on ait pu écrire ceci, par exemple : « il est contraire au bon sens, et à la sainte raison — à la morale aussi, comme pour la Relativité, — d'admettre l'existence de plus d'une parallèle. » [Gons1926] §9

Vu la fausseté du cinquième postulat en géométrie hyperbolique, le procès de l'évidence trouve sa place au cours de l'établissement de *l'autonomie de la géométrie hyperbolique*. Cette autonomie nous semble par ailleurs être un exemple typique tombant sous les conclusions du chapitre passé (§124) que nous avons précédemment exposées.

La leçon à tirer de la découverte de l'indépendance du non euclidien est forte : en se retournant sur elle-même, la géométrie traditionnelle s'est démultipliée, tranchant les chaînes kantiennes qui aliénait la mathématique au réel. C'est *une véritable libération* :

> C'est sur le versant théorique que le fait le plus saillant se présente : ce n'est pas *une* géométrique (*la* géométrie !) qui sort théoriquement affermie de l'épreuve axiomatique, ce sont *des* géométries. L'unicité de la vision géométrique ne nous est pas rendue intacte. En un mot, l'idée de géométrie s'est ouverte. Si univoque et parfaitement achevée en elle-même qu'elle ait pu nous paraître au début, elle ne vient pas moins se dédoubler : l'idée que nous avions primitivement de la géométrie rationnelle a donné naissance à deux « réalisations » concurrentes et logiquement inconciliables. Résultat vraiment remarquable : une expérimentation d'un genre inédit, **l'expérimentation dans le schéma axiomatique, fait sauter la forme traditionnelle de l'idée de géométrie et rend à l'imagination mathématique la liberté de s'en emparer pour la modeler à nouveau**. §154

Cette leçon vient mettre en péril la première synthèse dialectique :

> *C'est sur le plan théorique que l'idée de géométrie s'est ouverte*. L'événement restera-t-il localisé, ou nous faudra-t-il aussi réviser l'idée de la géométrie intégrale, réalisée par la synthèse dialectique des trois aspects ? L'ouverture de l'aspect théorique nécessitera-t-elle une nouvelle synthèse dialectique, sous une nouvelle idée dominante ? §154

C'est toutefois bien l'ouverture de l'*espace*, à travers celle de la géométrie, que GONSETH vise : ce sera l'objet du chapitre final.

2.6 La troisième synthèse dialectique : ouverture non euclidienne de l'espace

Les cinquante premières pages de ce chapitre sont consacrées à explorer l'autonomie du théorique, à travers la présentation des modèles de CAYLEY-KLEIN (chacun inclus dans le plan projectif) qui peuvent réaliser la géométrie hyperbolique tout comme celle sphérique (ou elliptique). Elles constituent donc quelque part une prolongation du chapitre précédent.

Il est un théorème, que GONSETH nomme "de l'approche" (§184), qui permet de réaliser tout espace métrique euclidien *borné* comme limite d'espaces hyperboliques ou limite d'espaces sphériques (l'énoncé du théorème est en termes projectifs). La synthèse dialectique des géométries précédemment développées peut alors prendre place (ce sera *la troisième synthèse dialectique*) :

Au-delà du privilège euclidien valable tout d'abord à notre échelle, et prolongeable dans un horizon qui élargit notre horizon naturel dans des proportions imprévues, un privilège non euclidien tout aussi naturel, mais de plus fine trame, pouvait donc être imaginé [grâce au théorème de l'approche]. L'euclidien prendrait la signification d'une approche naturellement idoine à une certaine échelle, le non-euclidien, celle d'une approche encore meilleure, correspondant au passage à une autre échelle.

[...]

[L'intuition] porte en elle [...] la structure de notre organisation mentale qui nous assure une connaissance a priori efficace à notre échelle, mais sommaire dans un horizon d'une contexture plus « fine » par rapport à notre horizon naturel.

[...]

Nous sommes enfin capables (nous ne le savions pas d'avance et il nous a fallu l'apprendre) de superposer à notre intuition primaire, en prenant même appui sur elle pour nous en écarter, une vision secondaire de l'espace, faite d'une étoffe intellectuelle plus consciemment tissée, capable de doubler la première sans entrer en désaccord avec elle dans notre horizon naturel, mais capable aussi d'en suspendre la valeur et de proposer une autre forme de l'espace, une autre structure de l'étendue. §185

Face à cette ouverture [105] vers le non euclidien, il est rassurant d'affirmer à nouveau le rôle et la validité de l'intuition euclidienne :

l'intuition primitive n'a jamais cessé d'être au nombre des moyens grâce auxquels notre expérience géométrique a pu prendre son départ et se poursuivre. C'est en fonction même de l'inaliénabilité de nos vues primitives que nous avons trouvé accès à cette intuition secondaire dont nous avons montré qu'elle pouvait, par exemple, nous guider dans l'édification autonome de la géométrie hyperbolique. **C'est en prenant appui sur l'intuition primitive que nous avons pu nous en écarter**.

[...]

la variante nouvelle ne se substitue pas en l'effaçant à la variante à partir de laquelle elle s'est développée. La variante première reste en fonction, inaliénablement en fonction. Elle garde sa valeur, son applicabilité sommaire (à peine nuancée par une action en retour) dans l'horizon de sa validité originelle. Au stade évolué, la connaissance n'est pas épurée de la première variante que la seconde aurait simplement et avantageusement remplacée. Le sens que l'une et l'autre prennent en définitive s'établit par un va-et-vient entre l'une et l'autre. §187

Avant de conclure (longuement) dans une quatrième partie, GONSETH consacre une troisième section à esquisser *une histoire « des doctrines préalables* (le plus souvent implicites) selon lesquelles la vérité géométrique s'accorde avec l'aspect physique et avec l'image que les sens nous procurent de celle-ci ». Cette esquisse recoupera sans surprises des propos déjà formulés (déchéance du vrai, procès de l'évidence). Il y sera question d'EUCLIDE, CLAIRAULT, LEGENDRE, GAUSS, J. BOLYAI, LOBATCHEVSKI et PASCH.

Sans présenter tous ces auteurs, il nous paraît intéressant de regarder les extrêmes (historiquement). La position euclidienne, tout d'abord, où l'on assiste à *la genèse du vrai idéal détaché de toute empirie*, critiquée par LOBATCHEVSKI :

Pour les Grecs, la géométrie sembla avoir été le modèle même à partir duquel s'est formé l'idée d'une connaissance purement rationnelle.

De ce fait **l'idée du vrai qui doit s'imposer avec nécessité en géométrie** (aussi bien dans les axiomes que dans les théorèmes) **prend une telle prédominance que l'aspect expérimental de ces mêmes vérités en est dévalorisé**, qu'il n'apparaît plus tel quel.

La géométrie des Grecs est l'exemple privilégié (elle le reste encore aujourd'hui dans une large mesure) d'**une science qui ne devrait rien à l'expérience, si ce n'est à l'expérience de l'esprit qui ne serait lié que par sa propre loi**. §188

« On avouera, écrit [Lobatshefski] ailleurs, qu'aucune discipline mathématique ne commence avec des notions aussi obscures que celles que, suivant l'exemple d'Euclide, on met à la base de la

105. GONSETH aurait certainement été heureux de pouvoir assister au sémainaire *New Spaces in Mathematics and Physics* qui se déroulera à l'IHP du 28 septembre au 2 octobre prochains.

géométrie, et que nulle part en mathématique on ne tolère une absence de rigueur comparable à celle qu'on a dû admettre dans la théorie des parallèles. §193

Au lieu de la connaissance intuitive, c'est plus spécifiquement d'une sphère *sensible* qu'émergeront chez LOBATCHEVSKI les notions géométriques premières :

> « Les premières notions, continue-t-il un peu plus loin, avec lesquelles une science quelle qu'elle soit, entend commencer, doivent être claires et réduites à leur nombre minimum : c'est seulement alors qu'elles peuvent offrir à la discipline une base solide et suffisante.
>
> » les notions de ce genre sont **acquises par l'exercice des sens, on ne saurait se fier aux idées innées**.
>
> [...]
>
> Il faut remarquer que **l'obscurité de ces notions [espace, étendue, lieu, corps, surface, ligne, point, direction, angle] est le fait de leur caractère abstrait**, caractère qui devient superflu lorsqu'il s'agit de mesures véritables, et qui par conséquent a été inutilement induit dans la théorie. »
>
> Mais si l'on rejette l'édification déductive de la discipline géométrique, quelle sera donc la méthode qui permettre de la construire ? Les citations qui précèdent sont déjà révélatrices à cet égard. Qu'on veuille bien y remarquer le rôle attribué à l'activité sensorielle dans la formation de nos connaissances assurées. Ce rôle est décisif. Lobatschefski admettra bien que, dans leur saisie du réel, les sens puissent être aidés par des moyens artificiels. **Le jugement de nos sens n'en reste pas moins l'instance dernière et définitive**.
>
> [...]
>
> L'accord ainsi réalisé entre l'aspect théorique et l'aspect expérimental doit cependant être payé d'un très haut prix : **la synthèse lobatschefskienne se voit obligée de rejeter comme obscur et indigne de confiance presque tout le côté intuitif de notre connaissance**. Ce n'est que par un long détour à travers l'expérimental qu'elle pourra s'intégrer les connaissances de notre horizon naturel. §193

La critique de GONSETH a de quoi surprendre : où range-t-il donc le sensible sinon dans l'expérimental, lui qui écrivait plus haut (§49) : « [l]a sécurité [de l'intuition] ne lui vient-elle pas de s'être formée sous la pression de l'expérience ? » ?

Si le nom d'HILBERT n'est qu'évoqué dans cette ébauche historique, c'est à dessein car il rompt de par sa démarche formaliste avec les idées de son précédent, PASCH, qui « se place » ainsi « à la fin d'un premier grand épisode de la crise de la légitimité en géométrie » tandis qu'il « restait engagé dans une conception assez scolastique du réel » (§194).

Les conclusion s'étendent sur près de cinquante page et nous nous efforcerons uniquement de reprendre les thèses principales de *La géométrie et le problème de l'espace*.

★ L'*idonéité* de la démarche scientifique (qui s'auto-fonde mais pourrait tout autant s'auto-détruire) :

> Lorsque nous exigeons des preuves, nous ne parlons pas de preuves en un sens absolu, mais de **la preuve** au sens courant de la science ; **au sens dont la science a montré le bien-fondé**. p. 582

> Le passage de la situation de départ à la situation évoluée n'est pas le fait d'une nécessité logique. Il répond à certaines exigences de cohérence et d'adéquation, ou, pour tout dire en mot, à certaines exigences d'**idonéité** [106]. Il comporte un moment de création (mentale ou technique) qui ne saurait être identifiée avec une procédure formalisatrice. p. 583-584

> Il n'est aucunement nécessaire de supposer que le schéma soit d'ores et déjà d'en emploi universellement efficace et parfaitement délimité. Son statut est d'être une hypothèse plausible ou même très plausible. Toute la pratique des sciences le suggère de la façon la plus pressante et la plus convaincante. Il reste cependant au rang des hypothèses qu'on n'est jamais définitivement dispensé de mettre et de remettre à l'épreuve.

106. en gras dans le texte

> Ni en droit, ni en fait, la mise à l'épreuve d'une doctrine préalable dont la validité n'accède pas à l'inconditionnel ne se fait indépendamment du progrès de la recherche qu'elle inspire et qu'elle informe. **Le banc d'essai, ce n'est pas une activité antérieure à cette recherche, c'est cette recherche elle-même**. Ce qui est réellement antérieur, c'est le passé de cette recherche, passé dont les suggestions ont été peut-être recueillies pour être engagées dans une activité ultérieure dont les résultats ne sauraient être entièrement indiqués à l'avance, — pour être engagé à nouveau sous la forme déjà plus précise de la doctrine préalable. p. 591
>
> L'épreuve cruciale que doit subir l'hypothèse intégrante, celle qui consacre son droit à l'existence, c'est la réussite de la double procédure de l'insertion du nouveau et de la révision de l'ancien.
> La doctrine de la connaissance schématisante n'a donc pas à recevoir sa légitimité d'une doctrine antérieurement constituée, la réussite de la double procédure dont nous venons de parler est elle-même créatrice de légitimité. p. 611-612

★ Son caractère *vivant* (ce qui à nos yeux revient au même) et (fait relié) qu'elle *commence* quelque part mais n'est *nulle part fondée* (le mythe du fondement) :

> L'activité scientifique qui s'y profile est à la fois **plus souple** et **plus efficace**, **plus libre** et **plus complexe** que la simple (et hypothétique) interprétation du formel dans le réel. Elle comporte en particulier, à côté du **moment de création** dont nous avons parlé, un **retour sur l'acquis** et **une révision de ce dernier**, faute desquels on ne voit guère comment l'**évolution** des conceptions scientifiques resterait possible.
> [...]
> Voici donc le point de départ qui peut être offert à un nouveau discours : la simple conception d'une science qui ne soit pas invariablement liée à ses positions antérieures, mais libre encore d'expérimenter et de se corriger.
> [...]
> le succès de l'activité scientifique ne tient pas nécessairement à son enracinement dans un situation de départ définitivement assurée. La recherche scientifique jouit, en réalité, d'une liberté beaucoup plus considérable, de **la liberté de ne pas remonter à un fondement dernier, mais de commencer dans le relatif, avec tout ce que l'on a de connaissances approchées et provisoires, pourvu qu'on ne fasse pas injustement de celles-ci des connaissances achevées et immuables**. Le droit à cette liberté est un droit réel. Il était donc tout indiqué que nous en usions. p. 584-585
>
> En son point décisif, notre étude démontre [...] par le fait, par la pratique et le succès, la non-nécessité et la facticité de la doctrine du fondement sur le instance première (ou antérieure) de légitimité. p. 617

★ Le *jeu dialectique des trois*[107] *aspects* de la connaissance géométrique (*intuitif-empirique-théorique*), au fondement de tout enseignement :

> Si l'idée préalablement achevée de l'élémentarité nous fait défaut, il n'en est pas moins **faux de conclure à l'impossibilité de dégager une perspective élémentaire d'une relative et suffisante sécurité**. Cette perspective existe, et nous pouvons en prendre conscience sans grand effort : C'est sur elle que se fonde, en pratique, l'enseignement, le premier enseignement de la géométrie. [...]
> [...] tout le succès de l'enseignement géométrique, dans ses débuts, tient à **l'appui que les trois aspects sont capables de se prêter mutuellement**. Pourquoi faudrait-il feindre de l'ignorer ? Nous pensons, au contraire, que ce fait doit être mis à sa place, avec toute l'importance qui lui revient. p. 597

★ Le *juste procès de l'évidence* (qui rejoint le mythe du fondement et le caractère vivant) :

107. on ne peut oublier de ce jeu l'aspect *idéal* ou *abstrait* étudié dans [Gons1936]

la validité éprouvée de la géométrie à l'échelle dite humaine, qu'on nomme ainsi pour la distinguer des grandes échelles de la cosmogonie et des petites échelles de la microphysique. Cette validité relative est aussi un fait d'expérience, c'**est même l'un des faits d'expérience les plus constants et les plus sûrs auxquels nous puissions nous référer**.

[...]

Il ne s'agissait donc pas de dévaloriser complètement l'évidence en tant qu'instance de garantie, et même en tant qu'instance dernière en tel ou tel état de nos connaissances. Il fallait réussir à **en détacher**, comme un moment subjectif, **la valeur d'absolu qui nous semble en être inséparable**. Il fallait arrive à comprendre pourquoi les évidences éveillent en nous, éveillent nécessairement en nous, **la croyance en leur vérité inébranlable**, même si leur domaine de justesse ne peut pas s'étendre indéfiniment vers les très grandes et vers les très petites dimensions. p. 606-607

Ce que l'histoire nous offre ici, c'est la preuve par le fait, que la doctrine de l'évidence rationnelle ne s'impose pas avec nécessité ; c'est aussi que les vues sur ce qui fait la légitimité d'un énoncé, d'un raisonnement, d'une méthode en géométrie est susceptible de varier, d'évoluer et de progresser. p. 625

★ Le caractère *exemplaire du géométrique* dans une connaissance *ouverte* et *schématisante* :

Le progrès de la connaissance physique nous révèle l'un des caractères fondamentaux de notre vision intuitive ou de notre reconstruction théorique des formes étendues : **il existe entre ces formes et les réalités qu'elle prétendent saisir une différence analogue à celle qui sépare un schéma de la chose schématisée**. Nous pouvions l'ignorer, tant que les mesures restaient à notre échelle ; la chose devient patente aux échelles atomiques.

Va-t-on de ce fait conclure que les moyens que la géométrie nous offre ne conviennent pas à l'investigation du monde réel ? Nous sommes dans l'incapacité d'y renoncer. Le problème qui se pose n'est pas de remplacer la géométrie par quelque chose dont nous n'avons encore aucune idée. C'est au contraire, ayant accepté le fait tel qu'il est, d'en tirer les conséquences quant à l'idée que nous nous faisons de nos propres facultés de connaissance.

L'aide que la géométrie nous prête à ce moment, c'est d'être un irrécusable modèle d'un mode de connaissance qui est nôtre comme le sont nôtres les organes de nos sens. Le seul parti raisonnable est par conséquent de passer à l'élaboration d'**une théorie de la connaissance schématique**, en s'appuyant sur l'exemple de la géométrie. p. 611

On s'accorda longtemps dans la conviction que les idées géométriques offraient le modèle même des idées parfaitement achevées et arrêtées, des idées fermées en soi et invariables du fait de leur idéale perfection. Que venons-nous d'apprendre ? Il est maintenant devenu clair que cette conviction doit être sérieusement relativisée, si l'on ne veut pas être contraint de la jeter par dessus bord : au terme de notre expérience, la géométrie s'offre désormais comme le **modèle d'une discipline ouverte, — ouverte jusqu'aux racines de la conscience que nous en pouvons prendre**.

C'est là un résultat qui demande d'être intégré dans la méthodologie géométrique ; mais c'est surtout, à travers la géométrie, **une exigence à intégrer dans toute théorie de la connaissance**. Une théorie de la connaissance qui veut rester en accord avec la pratique efficace de la connaissance doit elle-même être **telle que les idées ouvertes y trouvent leur place légitimes**. p. 617

Que dégagerons-nous de ce travail écrit sur presque dix années ? Encore une fois, nous tâcherons d'être succinct :

♠ Le *mythe du fondement*, destituant l'évidence, ou plutôt la *re*situant dans une *sphère intuitive*, mythe témoin d'une *vivance* et d'une *idonéité* de la pratique connaissante ainsi que d'une *évolutivité* de ses concepts.

♣ La construction (héritée de [Gons1936]) de la réalité, de la connaissance, se trouve également précisée : elle s'effectue *par horizons*, donnés chacun par un *schéma*, le mode constitutif de ce dernier étant légitimé par le *principe* – éprouvé – *de concordance schématique*.

Gonseth parlait (p. 584) d'un « moment de *création* » et de « l'*évolution* des conceptions scientifiques ». Ce serait sans doute, dans ce contexte, dévoyer sa pensée que d'associer ces deux mots soulignés et d'évoquer ainsi une *évolution créatrice*. Pourtant, le caractère « *en devenir* », le principe d'*analogie*, le fondement dans l'*action* et le « *pragmatiquement* assuré », voire le recours à *quelque certitude* que jamais l'empirie ne vint renverser, tout cela nous sembler rendre plausible un pont vers l'auteur de *L'évolution créatrice* et légitimer la pensée d'*une science ancrée dans le vivant*. Ce sera l'objet de notre troisième et dernière partie.

3 De la non-certitude en mathématique

3.1 La vie, une source fondatrice (Tsuda, Bergson, Wittgenstein)

> Nous sentons que, à supposer même que toutes les questions scientifiques possibles soient résolues, les problèmes de notre vie demeurent encore intacts. À vrai dire, il ne reste plus alors aucune question ; **et cela même est la réponse**.
>
> La solution du problème de la vie, **on la perçoit à la disparition de ce problème**.
> (N'est-ce pas la raison pour laquelle les hommes qui, après avoir longuement douté, ont trouvé la claire vision du sens de la vie, ceux-là n'ont pu dire alors en quoi ce sens consistait ?)
> [Witt1922] 6.52 & 6.521

> On pourrait dire : « "Je sais" exprime **une certitude *tranquille***, non celle qui lutte encore. »
>
> **Je veux voir cette certitude** non comme quelque chose qui s'apparente à de la précipitation ou à de la superficialité, mais **comme (une) forme de vie**. (Cela est très mal exprimé et sans doute mal pensé aussi.)
>
> Mais cela signifie bien que je veux la concevoir comme quelque chose qui se trouve en dehors de ce qui est justifié ou non justifié : et donc, pour ainsi dire, **comme quelque chose d'animal**.
> [Witt1949-51] 357-359

En tant que "croyant" mathématique, ce qui nous animait était une recherche de vérité puis de *certitude* en science, et tout particulièrement *en mathématique*. Il semble inévitable, lors d'une telle recherche, de passer à côté de questions *logiques* et *langagière* (autres qu'intra-mathématiques) et de personnages tels Russell, Frege, Wittgenstein ou Quine. À nos yeux, Wittgenstein reste celui qui a poussé le questionnement au plus profond, en remontant autant qu'il pouvait sans se retourner, en révélant par ses remarques [108] percutantes l'indicible – *le mystique* [109] – duquel semble émaner nos capacités langagières [110] et épistémiques. Évidemment, avec de tels mots (*mystique*, *vie*) à la résonance occulte ou hyperuniverselle, la porte semble ouverte à toutes les élucubrations imaginables. Deux auteurs nous semblent pourtant avoir jeté une lumière significative sur la question : Itsuo Tsuda et Henri Bergson.

Nous aimerions faire valoir que la vie se trouve aux deux extrémités du cercle, parcouru dans un sens par notre recherche de la certitude (et la philosophie de Wittgenstein dont notre première citation pointe une fin) et dans l'autre par le vivant dont parlent nos deux auteurs :

> **Est-ce que tout l'acheminement tortueux de la pensée occidentale est inutile ? Inutile si on est déjà libéré de toute souffrance humaine. Utile si on ne l'est pas**. Utile, non seulement pour les Occidentaux, mais pour toute l'humanité, car il est inévitable qu'elle prenne une couche d'occidentalisation tôt ou tard, avec le progrès technique et industriel.
> Par le mot occidentalisation, j'entends la tendance à la polarisation de toute activité humaine au cerveau, cette partie frontale de la tête. [Tsud1973] p. 44

> Une extraordinaire continuité d'efforts soutenus caractérise les œuvres de ces maîtres [Ueshiba, Noguchi, Kasetsu]. J'ai l'impression de trouver dans un terrain aride, des puits d'une profondeur exceptionnelle. **Là où s'arrête le travail de catégorisation** [111] **n'est que leur point de départ**. Ils y ont percé bien au-delà. Ils ont atteint les veines d'eau, la source de la vie. [Tsud1973] p. 10

> Si **la mise en doute des concepts** est une œuvre relativement récente en France, avec Bergson et l'Ecole française de Sociologie, ce **n'est que le premier pas** dans l'enseignement du Zen dont la tradition remonte déjà à plusieurs siècles, au Japon. [Tsud1973] p. 33

108. In theory of knowledge, what is fundamental is **noticing**, not sensation. [Russ1940] p. 314
109. Ce n'est pas *comment* est le monde qui est le Mystique, mais *qu'il soit*. [Witt1922] 6.44
110. Tu ne dois pas oublier que **le jeu de langage est**, pour ainsi dire, **quelque chose d'imprévisible**. Je veux dire : **il n'est pas fondé. Pas raisonnable (ou déraisonnable). Il est là — comme notre vie**. [Witt1949-51] 559
111. loin de nous [M. S., pas I. T.] l'idée de réduire l'entière pensée occidentale à un travail de catégorisation

Nous invoquerons surtout BERGSON[112] car le rapport de la vie *à la connaissance* est abordé de manière singulièrement lumineuse dans [Berg1889] et surtout [Berg1907]. Son introduction témoigne d'ailleurs clairement de la compénétration des deux – vie et connaissance :

> C'est dire que la *théorie de la connaissance* et la *théorie de la vie* nous paraissent inséparables l'une de l'autre. Une théorie de la vie qui ne s'accompagne pas d'une critique de la connaissance est obligée d'accepter, tels quels, les concepts que l'entendement met à sa disposition : elle ne peut qu'enfermer les faits, de gré ou de force, dans des cadres préexistants qu'elle considère comme définitifs. Elle obtient ainsi un symbolisme commode, nécessaire même peut-être à la science positive, mais non pas une vision directe de son objet. D'autre part, une théorie de la connaissance, qui ne **replace** pas **l'intelligence dans l'évolution générale de la vie**, ne nous apprendra ni comment les cadres de la connaissance se sont constitués, ni comment nous pouvons les élargir ou les dépasser. **Il faut que ces deux recherches, théorie de la connaissance et théorie de la vie, se rejoignent, et, par un processus circulaire, se poussent l'une l'autre indéfiniment**. [Berg1907] p. IX

D'autres auteurs ont également abordé la connaissance plus spécifiquement *de la vie* (nous pensons à BERNARD et CANGUILHEM) : c'est en fait et ainsi toute la connaissance qu'ils poussent à réviser[113] et à évoluer[114]. Nous en tirerons bénéfice pour notre intérêt initial – la certitude en mathématique.

Notre point de départ est simple :

> **La seule chose qui compte dans la vie, c'est la vie elle-même dont découle tout le reste**. C'est la vie qui suscite le besoin qui réalise la forme : comme la science est construite à partir de la forme, on finit par croire que c'est la forme qui engendre le besoin et la vie. D'où résultent toutes les complications de la vie moderne. [Tsud1979] p. 94

Avant donc de se demander ce que la science peut apporter à la vie, il fallait se souvenir du véritable ordre génétique :

> En principe, le seitai n'est pas contre la science. Celle-ci est après tout un produit de notre activité cérébrale, et on doit la respecter. Mais il y a une chose à laquelle il ne faut pas oublier de penser, c'est que **c'est la vie qui a créé la science**, et que **la science n'a jamais créé la vie**. La science tente d'expliquer la vie, de manière différente selon l'optique propre à chaque branche de recherches, ce qui est différent de créer la vie. [Tsud1983] p. 91-92

> Les formes vivantes étant des totalités dont le sens réside dans leur tendance à se réaliser comme telles au cours de leur confrontation avec leur milieu, elles peuvent être saisies dans une vision, jamais dans une division. [...]
> Charles Nicolle a souligné très vigoureusement **le caractère apparemment alogique, absurde, des procédés de la vie, l'absurdité étant relative à une norme qu'il est en fait absurde d'appliquer à la vie**. [Cang1952] p. 14/28

> les tendances intellectuelles, aujourd'hui innées, que la vie a dû créer au cours de son évolution, sont faites pour tout autre chose que nous fournir une explication de la vie. [Berg1907] p. 20

> l'intuition est l'esprit même et, en un certain sens, la vie même : l'intelligence s'y découpe par un processus imitateur de celui qui a engendré la matière. Ainsi apparaît l'unité de la vie mentale. On ne la reconnaît qu'en se plaçant dans l'intuition pour aller de là à l'intelligence, car de intelligence on ne passera jamais à l'intuition. [Berg1907] p. 268

112. que TSUDA mentionne sept fois dans ses ouvrages : *cf.* [Tsud1973] p. 21, 30, 33, 120, [Tsud1975] p. 73, 116 et [Tsud1983] p. 105

113. les systèmes ne sont pas dans la nature, mais seulement dans l'esprit des hommes. [...] Les systèmes tendent [...] à asservir l'esprit humain, et la seule utilité que l'on puisse, suivant moi, leur trouver, c'est de susciter des combats qui les détruisent en agitant et en excitant la vitalité de la science. [Bern1865] p. 306/309

114. suivre l'indication des phénomènes naturels en me servant des théories comme de flambeaux destinés à éclairer la route et devant être remplacés à mesure qu'ils étaient brûlés [Bern1947] p. 221

Bergson nous avait d'ailleurs prévenu dès son introduction :

> notre pensée, sous sa forme purement logique, est incapable de se représenter la vraie nature de la vie, la signification profonde du mouvement évolutif. Créée par la vie, dans des circonstances déterminées, pour agir sur des choses déterminées, comment embrasserait-elle la vie, dont elle n'est qu'une émanation ou un aspect ? Déposée, en cours de route, par le mouvement évolutif, comment s'appliquerait-elle le long du mouvement évolutif lui-même ? Autant vaudrait prétendre que la partie égale le tout, que l'effet peut résorber en lui sa cause, ou que le galet laissé sur la plage dessine la forme de la vague qui l'apporta. [...] En vain nous poussons le vivant dans tel ou tel de nos cadres. Tous les cadres craquent. Ils sont trop étroits, trop rigides surtout pour ce que nous voudrions y mettre. Notre raisonnement, si sûr de lui quand il circule à travers les choses inertes, se sent d'ailleurs mal à son aise sur ce nouveau terrain. [...]
>
> [...] une intelligence tendue vers l'action qui s'accomplira et vers la réaction qui s'ensuivra, palpant son objet pour en recevoir à chaque instant l'impression mobile, est une intelligence qui touche quelque chose de l'absolu. L'idée nous serait-elle jamais venue de mettre en doute cette valeur absolue de notre connaissance, si la philosophie ne nous avait montré à quelles contradictions notre spéculation se heurte, à quelles impasses elle aboutit ? Mais ces difficultés, ces contradictions naissent de ce que **nous appliquons les formes habituelles de notre pensée à des objets sur lesquels notre industrie n'a pas à s'exercer et pour lesquels, par conséquent, nos cadres ne sont pas faits**. [Berg1907] p. VI-VII

À ceux qui se demanderaient quelle est cette vie dont nous parlons, qui chercheraient à la *cerner*, nous rappellerons avec Wittgenstein que le mystique est précisément ce qui ne peut pas être *dit*[115] mais seulement *montré*. C'est à nos yeux tout le mérite des deux auteurs qui nous accompagnent que de nous suggérer cet insaisissable :

> C'est en voulant trop savoir que la vie meurt. On peut définir la vie, mais la *vie rejette toute définition*. [Tsud1975] p. 53

> [L'intelligence] [...] ne saurait, sans renverser sa direction naturelle et sans se tordre sur elle-même, penser la continuité vraie, la mobilité réelle, la compréhension réciproque et, pour tout dire, **cette évolution créatrice qui est la vie.** [Berg1907] p. 162

> que chaque instant soit un apport, que du nouveau jaillisse sans cesse, qu'un forme naisse dont on dira sans doute, une fois produite, qu'elle est un effet déterminée par ses causes, mais dont il était impossible de supposer prévue ce qu'elle serait, attendu qu'ici les causes uniques en leur genre, dont partie de l'effet, ont pris corps en même temps que lui, et sont déterminées par lui autant qu'elles le déterminent : c'est là quelque chose que nous pouvons sentir en nous et deviner par sympathie hors de nous, mais non pas exprimer en termes de pur entendement ni, au sens étroit du mot, penser. [Berg1907] p. 165

> En renonçant ainsi à l'unité factice que l'entendement impose du dehors à la nature, nous en retrouverons peut-être **l'unité vraie, intérieure et vivante**. [Berg1907] p. 200

La vie s'exprime et se déploie, selon nous, en *agissant*. C'est donc elle – *la vie* – que nous pensons retrouver en remontant suivant Wittgenstein les chaînes explicatives jusqu'à *l'action* (et nous finirons sur la première note de notre étude gonsethéenne) :

> Comme si la justification n'avait pas une fin quelque part. Mais cette fin n'est pas une présupposition non fondée : **c'est une manière d'agir**. [Witt1949-51] 110

> Pourquoi est-ce que je ne m'assure pas que j'ai deux pieds quand je veux me lever de ma chaise ? Il n'y a pas de pourquoi. Je ne le fais pas, c'est tout. **C'est ainsi que j'agis**. [Witt1949-51] 148

> donner des raisons, justifier l'évidence, a une fin ; — mais la fin n'est pas que certaines propositions nous frappent immédiatement comme vraies ; **c'est** non pas une façon de *voir*, mais **ce que l'on *fait* qui se trouve au fondement du jeu de langage**. [Witt1949-51] 204

115. et donc sur quoi il faudrait se taire, selon le dernier aphorisme du *Tractacus*

> Nos paroles acquièrent leur sens du reste de **nos actions**. [Witt1949-51] 229
>
> L'écureuil n'infère pas par induction qu'il va encore avoir besoin de provisions l'hiver prochain. Et nous n'avons pas plus besoin d'une loi d'induction pour justifier nos action ou nos prédictions. [Witt1949-51] 287
>
> j'écris consolé « **Au commencement était l'action**. » [Witt1949-51] 402

BERGSON nous rappelle que l'action n'est pas une simple exécution programmée, qu'elle déborde toute intention préalable, rejoignant ainsi les caractères jaillissant et génial de la vie, ce qui conforte notre propos (*l'action est une composante essentielle de la vie*) :

> pour peu que l'action intéresse l'ensemble de notre personne et soit véritablement nôtre, elle n'aurait pu être prévue, encore que ses antécédents l'expliquent une fois accomplie. Et, tout en réalisant une intention, elle diffère, elle, réalité présente et neuve, de l'intention, qui ne pouvait être qu'un projet de recommencement ou de réarrangement du passé. [Berg1907] p. 47

Une des qualités de [Berg1907] est de préciser la genèse de l'intelligence à partir de la vie. La connaissance étant produite par l'intelligence, nous devrions donc connaître *pour agir* :

> Notre intelligence, telle que l'évolution de la vie l'a modelée, a pour fonction essentielle d'éclairer notre conduite, de **préparer notre action sur les choses**, de prévoir, pour une situation donnée, les événements favorables ou défavorables qui pourront s'ensuivre. [Berg1907] p. 29

> La connaissance, si connaissance il y a, n'est qu'implicite. Elle **s'extériorise en démarches précises** au lieu de s'intérioriser en conscience. [Berg1907] p. 147
>
> encore que ce soit **en vue de l'utilité pratique** qu[e l'intelligence] a fait son apparition dans le monde. [Berg1907] p. 152
>
> L'intelligence, à l'état naturel, vise **un but pratiquement utile**. [Berg1907] p. 156
>
> Attelés, comme des bœufs de labour, à une lourde tâche, nous sentons le jeu de nos muscles et de nos articulations, le poids de la charrue et la résistance du sol : **agir et savoir agir**, entrer en contact avec la réalité et même la vivre, mais dans la mesure seulement où elle intéresse l'œuvre qui s'accomplit et le sillon qui se creuse, voilà la fonction de l'intelligence humaine. [Berg1907] p. 192
>
> Nous sommes faits pour agir autant et plus que pour penser ; — ou plutôt, quand nous suivons le mouvement de notre nature, **c'est pour agir que nous pensons**. [Berg1907] p. 296
>
> **Le rôle de l'intelligence est** [...] **de présider à des actions**. [Berg1907] p. 298
>
> Quel est l'objet essentiel de la science ? C'est d'accroître notre influence sur les choses. [. . .] Si haut qu'elle s'élève, elle doit être prête à **retomber dans le champ de l'action**, et à s'y retrouver tout de suite sur ses pieds. [Berg1907] p. 329

Cette source *vitale* et *agissante* de la connaissance étant posée, voyons comment cette dernière se déploie. Nous espérons que nos allusions (section 1) à la *vivance* des conceptions gonsethéennes se trouveront ainsi éclairées.

3.2 La sphère primitive (GONSETH, BERGSON, QUINE)

Avant de retourner dans la sphère primitive [116] de GONSETH, citons la contribution de WITTGENSTEIN à la *certitude* qui abriterait cette sphère telle le lit d'une rivière, de manière bien plus décisive que le *pragmatiquement assuré* gonsethéen :

116. Comme signalé en introduction, nous préférons éviter le champ lexical – par ailleurs trop vaste – de l'intuition car seul compte pour nous le caractère *premier* de cette sphère. Ainsi renommerons-nous l'*intuition* gonsethéenne *connaissance primitive* (ou *première*). Par exemple, au lieu de « *L'intuition n'est que connaissance schématique, donc sommaire* » ([Gons1937] §44), nous écrirons « *La connaissance première n'est que schématique, donc sommaire* ».

Mon image du monde, je ne l'ai pas parce que je me suis convaincu de sa justesse ; ou parce que je suis convaincu de sa justesse. Elle **est la toile de fond dont j'ai hérité et sur laquelle je distingue le vrai du faux**.

Les propositions qui décrivent cette image du monde pourraient appartenir à une sorte de mythologie. Et leur rôle serait semblable à celui des règles d'un jeu ; et le jeu peut aussi être appris de façon purement pratique, sans qu'on ait à apprendre de règles explicites.

La mythologie peut revenir à un état de flux ; **dans la rivière, le lit des pensées peut se déplacer. Mais je distingue entre le mouvement de l'eau dans le lit de la rivière et le déplacement du lit lui-même** ; bien qu'il n'y ait pas de séparation nette entre les deux.

Et **le bord de la rivière est fait partiellement de roche dure, susceptible d'aucune altération ou d'une altération imperceptible ; et partiellement de sable, que l'eau lave ou dépose ici et là**. [Witt1949-51] 94 95 97 99

Nous nous plaçons désormais *dans la sphère primitive* de GONSETH.

Nous voudrions emprunter à ce dernier et BERGSON pour proposer une genèse des éléments de la connaissance primitive dans les domaines suivants.

Insistons que la *validité* d'une telle connaissance a été établie par GONSETH, par exemple à travers sa *physique de l'objet quelconque* pour la connaissance logique – nous laissons le lecteur établir de semblables discours pour les autres domaines :

1. lois naturelles portant sur des phénomènes ;
2. lois du continu portant sur les nombres [117] réels [118] ;
3. lois géométriques portant sur les points, droites, cercles... ;
4. lois opératoires portants sur nos actions ;
5. lois arithmétiques portant sur les nombres entiers ;
6. lois ensemblistes portant sur les ensembles finis ;
7. lois existentielles & prédicatives (portant, si jamais sur quelque chose, sur l'objet quelconque).

Notre point de départ, disions-nous, est la *vie agissante* et *connaissante*. Il est délicat de démêler les deux aspects tant la construction de la réalité (la connaissance gonsethénne) est en fin compte une *action* sur la réalité (et l'action, à travers l'*expérience*, participe bien sûr de notre connaissance). Nous pensons cependant ne pas perdre notre lecteur en parlant d'une composante "positive", le *mouvement* de la vie, et d'une composante "négative", les *formes primitives* de sa connaissance ainsi que la mémoire :

$$\begin{array}{ccccc} & \text{positif} \nearrow & \longrightarrow & \text{mouvement} & \\ \text{vie} & \nearrow\!\!\searrow & & \downarrow\uparrow & \\ & \text{négatif} \searrow & \longrightarrow & \begin{array}{c}\text{formes primitives}\\ \text{mémoire}\end{array} & . \end{array}$$

Dès lors que notre conscience, définie par BERGSON chez tout être vivant comme « une différence arithmétique entre l'activité virtuelle et l'activité réelle » qui « mesure l'*écart entre la représentation et l'action* » [119], commence à porter un regard sur elle-même, à observer cette écart entre la représentation (permise par les formes

117. Dedekind est le premier à parler de « *nombre* irrationnel » et de « *nombre* réel », même si on peut rétrospectivement faire remonter les premières ébauches, non thématisées et non justifiées, d'arithmétique du continu aux algébristes arabes et notamment à Al-Karajî (≈ 953, ≈ 1029). **Même Weierstraβ et Cantor parlent encore de « *grandeur* irrationnelle » ou de « grandeur numérique »** [Zahlengrösse], **et s'appuient *fondamentalement* sur le concept de *limite*.** L'expression “nombre réel” indique suffisamment par elle-même l'objectif de Dedekind de fonder les procédés de l'analyse réelle sur un concept purement arithmétique, un concept qui soit logiquement antérieur aux notions de variation, de limite et de convergence, et donc défini indépendamment d'elles et pouvant servir, inversement, à les définir. [Dede1854-99] p. 33-34 (note de la traductrice)

118. il peut être utile de rappeler en quoi les nombres *entiers* et *réels* sont de deux ordres profondément distincts, les premiers *comptent*, les second *mesurent* : Frege's main point on this respect is that, just as natural numbers provide the **cardinality** of concepts [...], so real numbers provide the **measures** of magnitudes. [PanSer2013] p. 62

119. [Berg1907] p. 145

primitives) et l'action, à le "spatialiser"[120], elle découpe dans le mouvement de la vie, elle introduit de l'homogène dans la durée[121], bref elle isole dans notre action des *actes indivisibles*[122]. Avec GONSETH, BROUWER et HELMHOLTZ, nous avons déjà vu (section 1.6) le rôle de la *mémoire* qui garde trace de ces actes. Chez l'homme, la conscience et la mémoire sont développées à ce point qu'elles permettront l'édification d'une connaissance d'un tout autre ordre que chez les autres êtres vivants. En résumé :

$$\begin{array}{c} \text{mouvement/action} \\ \downarrow \\ \text{conscience} \downarrow \text{mémoire} \\ \downarrow \\ \text{actes/actions} \end{array} .$$

C'est le moment d'emprunter à GONSETH la forme primitive de l'*objet*. Introduire l'objet dans le mouvement engendre la *dynamique*, l'introduire dans les actes engendre la *combinatoire* :

$$\begin{array}{ccc} \text{mouvement} & \longrightarrow & \text{dynamique} \\ & \updownarrow \text{objets} & \\ \text{actes} & \longrightarrow & \text{combinatoire} \end{array} .$$

Si nous devions spécifier la différence, aidons-nous de la grammaire :

C. la **combinatoire**, étude des actions (*pluriel*) sur les objets, compose *plusieurs moments* qu'elle considère *chacun indivisible* ;

D. la **dynamique**, étude du mouvement (*partitif singulier*) avec objets, prend *un seul moment* et le considère *dans sa durée* (quitte dans un second temps à spatialiser cette dernière).

Chacun de ces deux domaines va alors produire ses connaissances propres.

De la dynamique sort :

1. la *probabilité*, le fait pour un événement d'être "probable", dont le concept de loi naturelle n'est qu'un cas extrême ;
2. le *continu*[123], que la mathématique nommera $\mathbf{R}$;
3. la *géométrie spatiale*, qui *n'est pas* l'étude du continu $\mathbf{R}^3$ comme le rappelle DEDEKIND[124], bien que dans un second temps la volonté de mesurer et notre capacité à concevoir la limite puissent bâtir un pont de la géométrie vers les nombres réels.

   Résumons ces aspects dans un diagramme sagittal (nous mettons en gras **les objets** sur lesquels porte la connaissance primitive correspondante) :

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & \text{probabilité} & \begin{array}{c}\nearrow\!\longrightarrow \\ \searrow\!\longrightarrow\end{array} & \begin{array}{c}\text{lois naturelles} \\ \textbf{phénomènes}\end{array} \\ \nearrow & & & & \\ \text{dynamique} & \longrightarrow & \text{continu} & \begin{array}{c}\nearrow\!\longrightarrow \\ \searrow\!\longrightarrow\end{array} & \begin{array}{c}\text{lois du continu} \\ \nearrow\textbf{nombres réels}\end{array} \\ \searrow & & & & \\ & \searrow & \begin{array}{c}\text{géométrie} \\ \text{spatiale}\end{array} & \begin{array}{c}\nearrow\!\longrightarrow \\ \searrow\!\longrightarrow\end{array} & \begin{array}{c}\text{lois géométriques} \\ \textbf{points}, \textbf{droites}, \textbf{cercles}...\end{array} \end{array} .$$

120. la pure durée pourrait bien être qu'une succession de changement qualitatifs qui se fondent, qui se pénètrent, sans contours précis, sans aucune tendance à s'extérioriser les uns par rapports aux autres, sans aucun parenté avec le nombre : ce serait l'hétérogénéité pure. [...] **dès l'instant où l'on attribue la moindre homogénéité à la durée, on introduit subrepticement l'espace**. [Berg1889] p. 77

121. La conscience *est* durée, elle n'est pas *dans* la durée [Berg1907] p. 395 (note de F. WORMS)

122. Comment diviserait-on l'unité, s'il s'agissait ici de **cette unité définitive qui caractériser un acte simple de l'esprit** ? [...] Si l'unité avec laquelle vous composez votre nombre est **l'unité d'un acte**, et non d'un objet, aucun effort d'analyser n'en fera sortir autre chose, que l'unité pure ou simple. [Berg1889] p. 60-61

123. une loi typique du continu est le *théorème des valeurs intermédiaires*, dont une version primitive serait : tout courbe commençant d'un côté d'une droite et finissant de l'autre doit couper cette droite

124. toute la Géométrie d'Euclide demeure sans lacune si, ayant choisi un système de coordonnées et une unité, on ne considère comme existant que les points dont les coordonnées sont des nombres algébriques [...]. **Dans la géométrie euclidienne, si longtemps tenue pour refléter l'espace réel, la discontinuité est** donc **partout présente**, bien qu'elle ne soit pas *perçue*. Rien dans les axiomes ni dans les assomptions implicites d'Euclide ne nous conduit logiquement à la continuité. **L'idée est d'autant plus importante qu'elle paraît contre-intuitive**. Il est donc vain d'espérer trouver dans la géométrie euclidienne un concept rigoureux de la continuité. [Dede1854-99] p. 39-40

De la combinatoire émerge :

1. la *praxilogie*[125], théorie des actes[126], *via* les monoïdes ;
2. l'*arithmologie*, propos sur les ensembles finis ;
3. l'*ontologie*, discours sur l'être pur :

$$\text{combinatoire} \begin{array}{c} \nearrow \\ \longrightarrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \text{praxilogie (monoïdes)} \\ \text{arithmologie (ensembles)} \\ \text{ontologie (être pur)} \end{array}.$$

Quelques précisions s'avéreront utiles :

1. **praxilogie.** Nous voudrions replacer *l'acte* (les actions) au fondement de la mathématique. Cette dernière a tendance à ne parler que d'actions de *groupes* (Poincaré sera allé jusqu'à préinscrire la notion de groupe de Lie dans notre esprit[127]). Cependant, dans la réalité, la *réversibilité* de nos actions n'est pas assurée : il est d'ailleurs rare de trouver le groupe $\mathbf{Z}$ plus naturel que le monoïde $\mathbf{N}$! C'est pourquoi nous pensons que c'est plutôt la notion de *monoïde* qui doit être mise au centre, l'archétype étant celui des *endomorphismes*[128] d'une structure – qui agissent de manière fonctionnelle.

   Afin de nourrir notre propos dans le cas des nombres (et appuyer ainsi leur vision *ordinale*), nous exposons en annexe (section 4) une caractérisation praxique de ces derniers :

   > *notre action itérative* (au sens où un départ et une fonction itérable engendrent une suite)
   > *est* ***exclusivement*** *fondée* (en un certain sens catégoriel)
   > *sur les nombres* (au sens de l'axiomatique de Peano).

2. **arithmologie.** J. Mayberry ouvre son livre [Mayb2000] en nous rappelant (p. 18) la définition euclidienne d'un nombre dans le Livre VII des *Éléments* :

   A number (*arithmos*) is a multitude composed of units.

   L'idée est simple : revenir au sens originel (euclidien) du nombre et considérer ce dernier comme un *ensemble* (fini)[129]. As a matter of fact, « [t]his original meaning of "number" still survives in English, as when we say, "Lieutenant Litghtoller was included among the *number of*[130] *survivors* in the wreck of the Titanic" »[131]. Mayberry nous signale également l'usage obligatoire en arabe de parler des nombres de 3 à 10 en termes *ensemblistes*[132], c'est-à-dire d'écrire « There is **a five of** horses in the field » au lieu de « **There are five** horses in the field ». Et de rejoindre la sphère primitive pragmatique en devenir de Gonseth[133].

3. **ontologie.** La logique gonsethéenne fait émerger les lois primitives de l'être pur : c'est simplement cela que nous entendons par *ontologie*.

---

125. de *praxis*, *acte* (le terme *praxéologie* étant déjà usité, nous préférons en forger un légèrement différent)
126. la **logique de l'acte quelconque** énonçant les lois de combinaisons des actions compatibles ou incompatibles [Gons1945-55] §112
127. Dans notre esprit préexistait l'idée latente d'un certain nombre de groupes ; ce sont ceux dont Lie a fait la théorie. [Poin1902] p. 107
128. Cet exemple est universel au sens du théorème de Cayley (qui plonge tout groupe dans un groupe symétrique) : chaque monoïde M se plonge dans $EndM$ en agissant par composition ("homothétie"). Il est alors naturel de définir l'*action* d'un monoïde M sur une structure S par un morphisme $\left\{\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & EndS \\ m & \mapsto & s \mapsto m \cdot s \end{array}\right.$, lequel se restreint en une action de groupes $M^\times \longrightarrow AutS$ (dans le cas ensembliste, on retrouve le groupe symétrique et la combinatoire traditionnelle). Les *orbites* de l'action (définies pour chaque $s \in S$ par $M \cdot s$) recouvrent alors toute S et l'immense avantage des groupes est de permettre leur *disjonction*.
129. Il est d'ailleurs connu que les nombres entiers réalisent un modèle de ZFC privé de l'axiome de l'infini. On définit (entre deux entiers n et N) une "appartenance" $n \in N$ si le n-ième bit de N (écrit en binaire) est plein : $n \in \sum_{i \geq 0} a_i 2^i \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} a_n = 1$. Ainsi deux entiers sont-ils "égaux" (au sens de la double inclusion) ssi ils ont les mêmes bits, *i. e.* ssi ils sont égaux au sens usuel (en tant que nombres).
130. nous pensons retrouver ici la conception du *nombre-de* propre à Stella Baruk
131. [Mayb2000] p. 21
132. [Mayb2000] p. 25 (footnote)
133. the ancient conception of number under consideration was not an exact and artificial scientific concept but a concept **in common use**. [...] The domain of applicabilty of such a concept typically **is sharply and clearly delineated at its centre, but fades into vagueness at its periphery**. [Mayb2000] p. 23

Ces trois domaines ne sont d'ailleurs pas sans lien :

P. les lois ontiques, unies à celles ensemblistes, aboutissent aux lois *prédicatives* ;

A. les lois *arithmétiques* peuvent être dérivées des lois ensemblistes du nombre *cardinal* (selon la vision de MAYBERRY) comme des lois praxiques du nombre *ordinal* (selon notre vision).

Résumons ces aspects de la combinatoire (nous mettons toujours en gras **les objets** de la connaissance), le croisement sagittal résultat de la double-vision sus-mentionnée de l'arithémétique :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \nearrow & \text{praxilogie} & \begin{matrix}\nearrow\!\longrightarrow\\ \searrow\!\longrightarrow\end{matrix} & \begin{matrix}\textbf{fonct} \longrightarrow \textbf{nb ord.}\\ \text{lois opératoires} \longrightarrow\end{matrix} & \begin{matrix}\longrightarrow\!\searrow\\ \searrow\end{matrix} & \searrow\!\!\!\nearrow\textbf{nombre cardinal}\\
\nearrow & & & & & & \\
\text{combinatoire} & \longrightarrow & \text{arithmologie} & \begin{matrix}\nearrow\!\longrightarrow\\ \searrow\!\longrightarrow\end{matrix} & \begin{matrix}\textbf{arithmoï} \longrightarrow\\ \text{lois ensemblistes}\searrow \longrightarrow\end{matrix} & \begin{matrix}\nearrow\\ \longrightarrow\!\nearrow\end{matrix} & \searrow\!\!\!\nearrow\text{lois arithmétiques}\\
\searrow & & & & & & \\
 & \searrow & \text{ontologie} & \longrightarrow & \text{lois existentielles} \quad \searrow & \longrightarrow & \text{lois prédicatives}
\end{array}.$$

Un deuxième aspect de GONSETH permet l'efficacité de cette connaissance. Il s'agit bien sûr de la forme primitive *type*, apportant souplesse de reconnaissance des objets imparfaits, d'où souplesse des lois portant sur ces objets et – partant – *efficacité* des jugements, tant dans leur *établissement* que dans leur *application.* De là le lacis primitif de la vérité-évidence-jugement-raisonnement, *pratiquement assurée.*

Ce dernier caractère emprunte énormément à HUME, qu'il convient de réhabiliter. C'est l'*habitude* (de la répétition, des régularités), à caractère *foncièrement pragmatique*, qui fonde la validité (primitive !) de nos inférences :

> **All inferences from experience** [. . .] **are effects of custom**, not of reasoning. [Hume1748] p. 136
>
> Custom is that principle, by which this correspondence has been effected ; so necessary to the subsistence of our species, and the regulation of our conduct, in every circumstance and occurrence of human life. [Hume1748] p. 160
>
> this customary transition of the imagination from an object to its usual attendant, is the sentiment or impression from which we form the idea of power or necessary connexion. **Nothing farther is in the case**. [Hume1748] p. 206
>
> define a cause to be *an object, followed by another, and where all the objects similar to the first are followed by objects similar to the second.* [...] call it, *an object followed by another, and whose appearance always conveys the thought to that other.* [...] We may consider the relation of cause and effect in either of these two lights : but **beyond these, we have no idea of it**. [Hume1748] p. 208-210
>
> While we cannot give a satisfactory reason, why we believe, after a thousand experiments, that a stone will fall, or fire burn ; can we ever satisfy ourselves concerning any determination, which we may form, with regard to the origin of worlds, and the situation of nature, from, and to eternity ? [Hume1748] p. 404

Alors que le dernier paragraphe cité a pu être interprété comme une forme de scepticisme aigu, nous n'y voyons qu'une invitation à la *prudence* et l'*humilité*, attitudes on ne peut plus qu'idoines dans une sphère épistémique *en perpétuel devenir* – car vivante !

Comme nous l'avons déjà signalé lors de la justification du principe de correspondance schématique, l'habitude humienne nous paraît fonder le pragmatiquement assuré gonsethéen, dépassant ainsi ce pour quoi elle était désignée à l'origine (démystifier la *nécessité*). Nous ne saurions trop renchérir :

La force de l'habitude doit par conséquent être réhabilitée
et pleinement exploitée pour établir notre connaissance.

En particulier, le fait que notre connaissance fonctionne pratiquement en se fondant sur l'habitude *est lui-même une habitude* dont l'on doit tirer les conséquences !

Nous voyons ainsi émerger, dans la constitution de la connaissance primitive, *la primauté de l'expérience* dont seul le vécu des régularités créé l'habitude. Ce n'est qu'affirmer à nouveau la dialectique vivante du connaître-agir :

> That the cube root of 64 is equal to the half of 10, is a false proposition, and can never be distinctly conceived. But that Caesar, or the angel Gabriel, or any being never existed, may be a false proposition, but still be perfectly conceivable, and implies no contradiction.
>
> 29. The existence, therefore, of any being can only be proved by arguments from its cause or its effect ; and these arguments are founded entirely on experience. If we reason a priori, anything may appear able to produce anything. The falling of a pebble may, for aught we know, extinguish the sun ; or the wish of a man control the planets in their orbits. **It is only experience, which teaches us the nature and bounds of cause and effect, and enables us to infer the existence of one object from that of another**. Such is the foundation or moral reasoning, which forms the greater part of human knowledge, and is the source of all human action and behaviour. [Hume1748] p. 410

> **Il est de l'essence du raisonnement de nous enfermer dans le cercle du donné. Mais l'action brise le cercle**. Si vous n'aviez jamais vu un homme nager, vous me diriez peut-être que nager est chose impossible, attendu que, pour apprendre à nager, il faudrait commencer par se tenir sur l'eau, et par conséquence savoir nager déjà. Le raisonnement me clouera toujours, en effet, à la terre ferme. Mais si, tout bonnement, je me jette, à l'eau sans avoir peur, je me soutiendrai d'abord sur l'eau tant bien que mal en me débattant contre elle, et peu à peu je m'adapterai à ce nouveau milieu, j'apprendrai à nager. Ainsi, **en théorie, il y a une espèce d'absurdité à vouloir connaître autrement que par l'intelligence ; mais, si l'on accepte franchement le risque, l'action tranchera peut-être le nœud que le raisonnement a noué et qu'il ne dénouera pas**. [Berg1907] p. 193-194

Nous citerons également Jean BIÈS qui, mention spéciale, relève (en note de bas de page) la singularité wittgensteinienne sur laquelle nous ouvrions cette dernière partie :

> **Toute connaissance vraie est d'abord non point pensée mais vécue et intégrée**. Les mises en système viennent après, au risque d'alourdir, compliquer, déformer les énonciations initiales, dont le caractère ineffable ne gagne jamais à être traduit en langage cérébralisé. L'Orient vient nous rappeler que pour connaître la Vérité, il n'est nul autre moyen que de la devenir. La seule preuve qu'on ait de l'Absolu, – mais décisive et définitive, – est d'en faire l'expérience, celle-ci risquât-elle de faire sombrer dans la folie ou dans la mort. Elle est essentiellement dépouillement et dépassement des limitations du mental, de ses volitions, de ses empiètements continuels, perte du moi dans le Soi ; elle est l'illustration suprême que **l'on devient ce que l'on sait et** que **l'on ne sait authentiquement que ce que l'on est**. A ce niveau de réalisation, toute dialectique ou recherche de « preuves » s'évanouit : on est soi-même la preuve cherchée, on est à soi-même sa propre démonstration. [...]
>
> Ainsi, aux réformes déjà mentionnées, – rectification des erreurs et des préjugés, élargissement de la pensée par la redécouverte d'autres domaines de connaissance, acquisition de « points de vue » non plus contradictoires mais complémentaires, priorité de la pratique sur la théorie, – viendra s'en ajouter une dernière : la suspension de l'activité intellectuelle. C'est ainsi que **devant des « problèmes » réputés difficiles ou insolubles**, on ne se contentera plus seulement de se demander si les questions ont été bien ou mal posées, si les éléments séparés étaient vraiment séparables, si même les différentes angles de vision ont été examinés et intégrés ; **on découvrira que lesdits « problèmes » étaient seulement secrétés par un mental en perpétuelle ébullition et qu'ils n'existaient qu'en lui [134].** [Biès1982] p. 180-181

Une légère digression, enfin, sur la valeur des *témoignages*, *expérience* de seconde main :

134. Quelques Occidentaux redécouvrent cette voie du « dépassement de la question », surtout au plan psychologique. Wittgenstein remarque dans son *Tractacus logico-philosophicus*, VI : « La solution du problème de la vie se trouve dans la disparition du problème. »

> there is no species of reasoning more common, more useful, and even necessary to human life than that which is derived from the testimony of men, and the reports of eye-witnesses and spectators [Hume1748] p. 284

> « Si je ne fais pas confiance à *ce* témoignage de preuve, pourquoi devrais-je faire confiance à n'importe lequel ? » [Witt1949-51] 668

Résumons notre propos sur la connaissance primitive.

• La vie, élan fondateur, s'exprime positivement en *agissant* et négativement en *connaissant.*
• Notre *conscience* découpe dans l'action *des* actions que notre *mémoire* peut retenir.
• La forme primitive (de notre connaissance) *objet* donne alors naissance :

1. d'une part, mêlée au mouvement, à la *dynamique*, d'où la probabilité, le continu et la géométrie (spatiale) ;
2. d'autre part, mêlée aux actes, à la *combinatoire*, d'où les logiques propositionnelle et prédicative, les agents, les ensembles, puis les arithmétiques (ordinale et cardinale).

• La forme primitive *type* permet alors *pratiquement* l'*énoncé* et l'*emploi* de *lois primitives* de ces domaines.
• C'est en fin de compte l'*expérience* qui fera émerger l'*habitude* et, avec elle, le sentiment du *pragmatiquement sûr*.

Une critique nous sera facilement adressée : nous disions en introduction vouloir travailler par le moins, vouloir éclairer plutôt que bâtir. En quoi ce qui précède n'est-il pas "encore une autre théorie explicative" ?

À travers cette genèse insolite, nous pensons avoir éclairci de nombreux éléments, souvent entremêlés, et dont les "connexions génétiques" sont souvent présentées *à l'inverse de l'ordre* qui nous paraît naturellement suivre l'élan vital et résumé dans les tableaux précédents. Par exemple, un espace affine n'est pas un espace vectoriel "sans origine" (exposé usuel en mathématique supérieure) mais c'est l'espace vectoriel qui, primitivement, est un espace affine vectorialisé en une origine choisie : à moins de faire tourner le monde autour de nous, notre vision "spatiale" est éminemment *affine* et c'est elle que l'on vectorialisera en des origines convenables (d'ailleurs, au collège, où la connaissance est encore rarement sortie de son cocon primitif, la géométrie affine est introduite (et comprise) avant les vecteurs). De même :

1. la dynamique n'est pas permise par l'espace, c'est l'espace qui est une partie du mouvement ;
2. la dynamique n'est pas une géométrie en mouvement (dans quoi ?), c'est la géométrie qui est une dynamique figée (nous reconstituons ensuite une dynamique artificielle grâce à un procédé cinématographique [135]) ;
3. la probabilité n'est pas une nécessité approximative ou dégénérée, c'est la nécessité qui primitivement est une probabilité maximale ;
4. le nombre ordinal n'est pas le nombre cardinal que l'on aurait étiqueté, c'est le nombre cardinal qui est le nombre ordinal abstraction faite de l'ordination ;
5. la logique propositionnelle n'est pas un cas particulier de la logique prédicative (comme il est possible de le présenter dans les cours de logique actuels), c'est la logique prédicative qui est une logique propositionnelle enrichie ;
6. un ensemble (fini) n'est pas un nombre fini d'objets pris ensemble, c'est le nombre (euclidien) qui est un ensemble fini d'objets.

Nous venons de voir que l'habitude fondait nos inférences, permettant par là un plein épanouissement de la sphère primitive.

Il convient à présent d'observer que l'habitude va nous permettre également *de sortir de cette sphère* et d'aller *à la rencontre de l'abstrait* (grâce au formel). La répétition du passé est en effet *la source même du mode intellectuel*, notre intelligence ne pouvant fonctionner autrement que *par analogie avec du déjà connu* :

135. Au lieu de nous attacher au devenir intérieur des choses, nous nous plaçons en dehors d'elles pour recomposer leur devenir artificiellement. Nous prenons des vues quasi instantanées sur la réalité qui passe, et, comme elles sont caractéristiques de cette réalité, il nous suffit de les enfiler le long d'un devenir abstrait, uniforme, invisible, situé au fond de l'appareil de la connaissance, pour imiter ce qu'il y a de caractéristique dans ce devenir lui-même. [Berg1907] p. 305

> Notre intelligence [...] isole [...] instinctivement, dans une situation, ce qui ressemble au déjà connu ; elle cherche le même, afin de pouvoir appliquer son principe que « le même produit le même ». En cela consiste la prévision de l'avenir par le sens commun. La science porte cette opération au plus haut degré possible d'exactitude et de précision, mais elle n'en altère pas le caractère essentiel. Comme la connaissance usuelle, la science ne retient des choses que l'aspect *répétition*. Si le tout est original, elle s'arrange pour l'analyser en éléments ou en aspects qui soient *à peu près* la reproduction du passé. Elle ne peut opérée que sur ce qui est censé se répéter, c'est-à-dire sur ce qui est soustrait, par hypothèse, à l'action de la durée. Ce qu'il y a d'irréductible et d'irréversible dans les moments successifs d'une histoire lui échappe. [Berg1907] p. 29

> l'intelligence, même quand elle n'opère plus sur la matière brute, suit les habitudes qu'elle a contractées dans cette opération : elle applique des formes qui sont celles mêmes de la matière inorganisée. Elle est faite pour ce genre de travail. Seul, ce genre de travail la satisfait pleinement. Et c'est qu'elle exprime en disant qu'ainsi seulement elle arrive à la *distinction* et à la *clarté*. [Berg1907] p. 161

Cette conclusion bergsonienne nous paraît parfaitement éclairer le *principe d'analogie* dont il a déjà été question avec GONSETH et POINCARÉ, justifiant ainsi son *caractère schématisant*. Et BERSGON d'appuyer l'avantage (oserons-nous dire l'idonéité ?) de ce dernier :

> cette connaissance toute *formelle* de l'intelligence a sur la connaissance *matérielle* de l'instinct un incalculable avantage. **Une forme, justement parce qu'elle est vide, peut être remplie tour à tour par un nombre indéfini de choses, même par celles qui ne servent à rien. De sorte qu'une connaissance formelle ne se limite pas à ce qui est pratiquement utile, encore que ce soit en vue de l'utilité pratique qu'elle a fait son apparition dans le monde**. Un être intelligent porte en lui de quoi se dépasser lui-même. [Berg1907] p. 152

Nous allons maintenant sortir de la sphère primitive pour aborder celles idéale et formelle, à travers la schématisation. DUHEM sera notre référent.

3.3 Modéliser, interpréter (DUHEM, MILHAUD)

> le tableau physique du monde manque de toutes les qualités sensibles qui concourent à former le Sujet de la Connaissance. Le modèle est incolore, inaudible et impalpable. De la même façon, et pour la même raison, le monde de la science manque, ou est privé, de tout ce qui ne prendrait un sens que par rapport au sujet contemplant, percevant et sentant consciemment. J'entends par là tout d'abord les valeurs éthiques et esthétiques, toutes les valeurs, tout ce qui est lié au sens et au but de l'ensemble de l'apparaître. Toute cela n'est pas seulement absent, mais ne peut, d'un point de vue purement scientifique, être inséré de manière cohérente. Si quelqu'un essaie de l'y mettre, dedans ou dessus, comme un enfant met de la couleur sur ses dessins, cela n'ira pas. Car **tout ce qui est fait pour entrer dans ce modèle du monde prend bon gré mal gré la forme d'une énoncé factuel scientifique ; et en tant que tel, il devient faux**. [Schr1956] p. 265

Ces propos de SCHRÖDINGER nous mettent directement en face de l'impossibilité : les lois de la nature, une fois formulées, ne peuvent plus parler de la nature dont participe le sujet ! Cette entrée en matière se veut introduire la scission entre *le monde physique* prétendument décrit par les lois et *ce que les lois mathématiques peuvent effectivement décrire*.

Revenons en effet sur le langage utilisé dans la formulation des lois physiques :

> *si les théories physiques ont pour objet d'expliquer les lois expérimentales, la Physique théorique n'est pas une science autonome ; elle est subordonnée à la Métaphysique.* [Duhe1906] p. 31

> *Une Théorie physique n'est pas une explication. C'est un système de proposition mathématiques, déduites d'un petit nombre de principes, qui ont pour but de représenter aussi simplement, aussi complètement et aussi exactement que possible, un ensemble de lois expérimentales.* [Duhe1906] p. 44

> Lorsqu'on analyse une théorie créée par un physicien qui se propose d'expliquer les apparences sensibles, on ne tarde pas, en général, à reconnaître que cette théorie est formée de deux parties bien distinctes ; l'une est la partie simplement représentative qui se propose de classer les lois ; l'autre est la partie explicative qui se propose, au-dessous des phénomènes, de saisir la réalité. [Duhe1906] p. 60

Ces premières citations donnent le ton : il y a d'un côté *les phénomènes physiques* qui nous intéressent, de l'autre *la mathématique* qui les "code", qui les "modélise". Le reste n'est qu'ingérence métaphysique :

> La Physique théorique ne saisit pas la réalité des choses ; elle se borne à représenter les apparences sensibles par des signes, par des symboles. [Duhe1906] p. 168

> à son point de départ, comme à son point d'arrivée, **le développement mathématique d'une théorie physique ne peut se souder aux faits observables que par une traduction**. [Duhe1906] p. 190

> *Une expérience de Physique est l'observation précise d'un groupe de phénomènes accompagnée de l'*INTERPRÉTATION *de ces phénomènes ; cette interprétation substitue aux données concrètes réellement recueillies par l'observation des représentations abstraites et symboliques qui leur correspondent en vertu des théories admises par l'observateur.* [Duhe1906] p. 209

> Qu'en présence d'un mouvement matériel offert par l'expérience nous énoncions une relation quelconque entre les concepts de temps, de vitesse, d'accélération, de masse, de force, **qu'exprimerons-nous au fond sinon une vue spéciale de l'esprit, quelque chose de purement intelligible, non pas même impliqué dans le phénomène observé, ce qui n'aurait aucun sens, mais seulement pensé par nous à l'occasion de ce phénomène ?** Ce sera, si l'on veut, une façon de penser et de parler correspondant à la chose observée ; disons le mot, ce sera un *langage spécial*, créé par l'esprit pour la désigner. **Si les phénomènes de mouvement se prêtent désormais à la méthode mathématique et à des raisonnement rigoureux, c'est qu'ils pourront se traduire dans une langue parfaite**. [Milh1898] p. 96-97

Pourquoi avoir choisi la mathématique comme domaine modélisant ? Parce qu'elle est le domaine *discursif* dont – tout le travail de [Gons1936] le justifie – la *validité* est *optimale* : si l'on veut assurer un discours rationnel, une démonstration, c'est assurément en mathématique qu'il faut chercher à s'exprimer. (Ce point est indépendant de la scission physique-mathématique opérée par DUHEM mais trouve ici particulièrement sa place, le rôle de la mathématique ayant été clairement mis à jour dans [Duhe1906].)

Comme l'explicitait la dernière citation de BERGSON qui closait la partie précédente, une autre raison à la pertinence – osons le mot : l'idonéité ! – de la mathématique comme langage des lois naturelles est son caractère *unifiant*, sa pluri-interprétabilité, résultant directement de son caractère *formel*. Plusieurs phénomènes d'apparence très éloignés pourront ainsi être interprétés dans une *même* loi :

> Le troisième exemple va nous montrer comment **nous pouvons apercevoir des analogies mathématiques entre des phénomènes qui n'ont physiquement aucun rapport** ni apparent, ni réel, de telle sorte que les lois de l'un de ces phénomènes nous aident à deviner celles de l'autre.
>
> Une même équation, celle de Laplace, se rencontre dans la théorie de l'attraction newtonienne, dans celle du mouvement des planètes, dans celle du mouvement des liquides, dans celle du potentiel électrique, dans celle du magnétisme, dans celle de la propagation de la chaleur et dans bien d'autres encore.
>
> Qu'en résulte-t-il ? **Ces théories semblent des images calquées l'une sur l'autre ; elles s'éclairent mutuellement, en s'empruntant leur langage** ; demandez aux électriciens s'ils ne se félicitent pas d'avoir inventé le mot de flux de force, suggéré par l'hydrodynamique et la théorie de la chaleur.
>
> Ainsi **les analogies mathématiques**, non seulement **peuvent nous faire pressentir les analogies physiques**, mais encore ne cessent pas d'être utiles, quand ces dernières font défaut.
>
> En résumé **le but de la physique mathématique** n'est pas seulement de faciliter au physicien le calcul numérique de certaines constantes ou l'intégration de certaines équations différentielles.
>
> Il est encore, il **est surtout de lui faire connaître l'harmonie cachée des choses en les lui faisant voir d'une nouveau biais**. [Poin1905] p. 108

Revenons à cette scission physique-mathématique duhemienne. On peut grâce à elle démystifier le concept de *vérité* physique, de vérité d'un ensemble de lois (*i. e.* d'une théorie), tout particulièrement quand les deux théories sont irréconciliables :

> une théorie *vraie*, ce n'est pas une théorie qui donne, des apparences physiques, une explication conforme à la réalité ; c'est une théorie qui représente d'une manière satisfaisante un ensemble de lois expérimentales ; une théorie *fausse*, ce n'est pas une tentative d'explication fondée sur des suppositions contraires à la réalité ; c'est un ensemble de propositions qui ne concordent pas avec les lois expérimentales. [Duhe1906] p. 45
>
> Quand un physicien constate une contradiction entre deux théories qui lui sont également chères, il dit quelquefois : Ne nous inquiétons pas de cela mais tenons fermement les deux bouts de la chaîne bien que les anneaux intermédiaires nous soient cachés. Cet argument de théologien embarrassé serait ridicule si l'on devait attribuer aux théories physiques le sens que leur donnent les gens du monde. En cas de contradiction, l'une d'elles au moins devrait alors être regardée comme fausse. Il n'en est plus de même si l'on y cherche seulement ce qu'on y doit chercher. **Il peut se faire qu'elles expriment l'une et l'autre des rapports vrais et qu'il n'y ait de contradiction que dans les images dont nous avons habillé la réalité**. [Poin1902] p. 175

Duhem relève à ce sujet *l'impertinence des querelles métaphysiques* que nous évoquions plus haut, d'où – et nous y tenons ! – *un grand soulagement pour l'esprit vierge qui se sentirait opprimé par de telles disputes* :

> Philosophe plus profond que Laplace, Ampère voit avec une parfaite clarté **l'avantage qu'il y a à rendre une théorie physique indépendante de toute explication métaphysique ; par là, en effet, on la soustrait aux querelles qui divisent les diverses écoles cosmologiques** ; on la rend acceptable, en même temps, à des esprits qui professent des opinions philosophiques incompatibles [Duhe1906] p. 84
>
> Que de discussions scientifiques où chacun des deux tenants prétend écraser son adversaire sous le témoignage irrécusable des faits ! On s'oppose l'un à l'autre dans des observations contradictoires. **La contradiction n'est pas dans la réalité, toujours d'accord avec elle-même ; elle est entre les théories par lesquelles chacun des deux champions exprime cette réalité**. [Duhe1906] p. 226

Ainsi tombe le mythe de la causalité physique, qui est d'une part renvoyée à la nécessité mathématique des lois, d'autre part filtrée et altérée par la traduction de ces lois et de leurs conséquences dans le monde physique.

Poussant cette conception plus loin, Duhem titre un autre de ses ouvrages *Sauver les apparences* [Duhe1908]. La valeur d'une modélisation ne se mesure qu'à sa capacité à s'interpréter près des faits, aussi complexe soit cette modélisation mathématique. Si la théorie nous dit que le Soleil tourne autour de la Terre, il faudra certainement la complexifier grandement pour qu'elle colle aux observations mais nous ne devons pas nous sentir moins engagés dans son interprétation que si l'on avait dit que la Terre tournait autour du Soleil. Certainement cette dernière modélisation est-elle plus *commode* (pour citer Poincaré) mais elle n'est pas plus ou moins vraie (ce qui n'aurait aucun sens) :

> La grande découverte de David Hume (1711-1776) consiste à remarquer que **la relation entre la cause et l'effet n'est pas directement observable et** qu'elle **n'exprime rien d'autre que la succession régulière**. Cette découverte épistémologique fondamentale a conduit les grands physiciens Gustav Kirchhoff (1842-1887), Ernst Mach (1838-1916), et bien d'autres, à affirmer que **la science de la nature ne fournit aucune explication, mais qu'elle vise seulement à obtenir une description complète et économique** (Mach) **des faits observés, et qu'elle ne peut au demeurant rien atteindre de plus**. [Schr1948] p. 86
>
> Newton dit que, par cela seul qu'un homme se livre à la recherche des causes premières, il prouve qu'il n'est pas un homme de science. [...] la forme apparente de cette cause première, [...] nous ne devons jamais la regarder [...] que comme **une convention de langage susceptible d'être modifiée avec les progrès de la science**. [Bern1947] p. 196-197

> **La science est avant tout une vue de l'esprit**, un système d'interprétation du monde. Ce système peut évoluer selon les exigences du temps. Ces exigences peuvent être déterminées par la structure sociale, tradition et religion, les progrès technologiques et le désir d'en savoir davantage. Il serait vain de discuter sur la.véracité de l'héliocentrisme avec des gens de la haute antiquité ou du Moyen Age, alors qu'ils ne possédaient même pas de télescope. D'ailleurs, **si vous n'en sentez pas le besoin** comme une connaissance requise par les professions telles que les équipages d'aviation au long cours, les employés de télécommunication internationale ou les astronomes, **rien ne vous oblige à changer votre façon de concevoir l'univers**.
>
> [...]
>
> De toute façon, **il n'y a pas un système absolument valable, en tous lieux et en toutes circonstances**. La théorie de la relativité complexe n'intervient pas dans le travail de quelqu'un qui plante des choux dans son jardin. Quand on veut tapisser un salon, une simple multiplication arithmétique suffit, car on n'a pas à y tenir compte de la vitesse de la lumière ou d'une dimension imaginaire.
>
> **Il n'y a jamais le dernier mot de la science, car celle-ci évolue tant qu'il y a l'activité intellectuelle chez l'Homme**. On ne peut pas prévoir ce que sera la représentation du monde dans un siècle ou deux chez les chercheurs. [Tsud1983] p. 112-113

Résumons ce qui précède :

• La mathématique a émergé *idoinement* de la sphère *primitive* comme *discours rationnel optimal.*
• Le caractère *schématisant* de la mathématique la rend singulièrement *apte à unifier.*
• La "réalité" physique est *modélisée* par la "réalité" mathématique, *abandonnant les querelles métaphysiques* aux frontières du continent mathématique.
• C'est l'*idonéité* (et non la vérité) des modélisations que juge *l'expérience* de leur utilisation.

Nous ne pouvons résister à citer l'admirable synthèse de MILHAUD (tant d'années avant GONSETH et DUHEM !) :

> A mesure que l'observation et l'expérimentation des faits se poursuivent et se perfectionnent, l'esprit s'efforce d'en dégager des notions, des lois, des formules, des théories, qui lui permettent de constituer la science, c'est-à-dire d'**interpréter les faits sous une forme compréhensible**, qui substitue l'unité à la multiplicité, l'ordre au désordre, le lien, le rapport, à la diversité brutale, la constance au perpétuel changement. Cette interprétation en **un langage forgé par l'esprit au contact des choses**, et inspiré, suggéré par elles, lui permet d'ailleurs non seulement de comprendre, **en** les **reliant** entre eux, **les phénomènes** dont la trame complexe forme la réalité, mais encore de **les prévoir**, et, par la suite, aussi de **les utiliser** de mieux en mieux. En vertu d'une **sélection naturelle, déterminée précisément par les progrès réalisés** dans cette double voie de la compréhension théorique et de l'application, et parallèlement à l'observation des faits, les idées, les lois, les conceptions se succèdent, tantôt ne se prêtant qu'à une courte apparition, tantôt, au contraire, devant aux facilités qu'elles créent de sembler définitives. **Ainsi se réalise** dans les voies parallèles de l'expérience et de l'idée, **un double progrès indéfini**, ainsi se forme et se formera indéfiniment la science. [Milh1898] p. 201-202

3.4 Modéliser, interpréter *en mathématique* (DUHEM^2, QUINE)

Nous avons plus haut dénoncé le mythe de la causalité, renvoyée à celle mathématique *modulo* quelque transformation résultant de la traduction retour de la mathématique vers la physique. Il est temps de parler un peu de ce monde modélisant.

Nous pensons hautement pertinent d'*appliquer* DUHEM *à lui-même*[136]. Ce qu'il dit de la *physique*, munie d'un concept mystifié de causalité et d'un autre de vérité, modélisée par la mathématique, nous pourrions tout à fait (et nous le faisons !) le transporter à la *mathématique*, munie d'un concept mystifié de nécessité et d'un autre de vérité, modélisé par le symbolisme formel. Ce transport est d'autant plus naturel qu'en mathématique surgit un *troisième* concept (nous reparlerons très bientôt des deux premiers) dont le caractère problématique n'apparaît pas aussi immédiatement en physique : celui d'*objet* (en un mot : *de quoi* parlent les lois ?).

136. d'où l'exposant quadratique dans le titre de cette section

Cela nous amène en retour à nous demander ce qu'est un objet physique. Au niveau macroscopique, la question semble oiseuse : ce boulet de canon qui décrit une trajectoire, a-t-on besoin de questionner son existence ? (Peut-être oui si l'on questionne toute notre perception immédiate, mais nous n'en parlerons pas.) Au niveau microscopique, la question est beaucoup plus intéressante : les descriptions d'objets classiques sont des outils mathématiques qui n'ont plus rien à voir avec un point ou une partie de l'espace : champs des équations de MAXWELL, fonctions d'ondes en mécanique quantique, groupes simples en théorie des particules, singularités d'une variété quadri-dimensionnelle en relativité générale... Où sont donc passées les "visées" classiques, ces objets bien localisés dont nous avions l'habitude à notre échelle ? GONSETH nous a déjà répondu :

> la notion de l'objet se dégrade jusqu'à n'être plus qu'**un « préjugé macroscopique »**. [Gons1936] §62

Cette réponse gonsethéenne résonnera quarante-six ans plus tard chez QUINE :

> **La science est un prolongement du sens commun, et utilise la même tactique que lui : gonfler l'ontologie pour simplifier la théorie**. [Quin1980] p. 79

Cette phrase percutante est extraite de *Deux dogmes sur l'empirisme*. Son auteur y aborde de plein fouet la question ontologique en science, non sans rappeler le conventionalisme de DUHEM dont nous avons parlé [137]. La citation est longue mais le point quinien (ci-dessus) est clair :

> Étant empiriste, je continue à concevoir, en dernière instance, le schème conceptuel de la science comme un instrument, destiné à prédire l'expérience future à la lumière de l'expérience passée. Les objets physiques sont introduits conceptuellement dans ce contexte en tant qu'intermédiaires commodes – non qu'ils soient définis en termes d'expérience, simplement ce sont des entités postulées [*posits*] irréductibles, comparables, épistémologiquement parlant, aux dieux d'Homère. En ce qui me concerne, en tant que physicien profane, je crois aux objets physiques et non pas aux dieux d'Homère ; et je considère que c'est une erreur scientifique de croire autrement. Mais **du point de vue de leur statut épistémologique, les objets physiques et les dieux ne diffèrent que par degré et non par nature. L'une et l'autre sortes d'entités ne trouvent de place dans notre conception qu'en tant que culturellement postulées. Si le mythe des objets physiques est épistémologiquement supérieur à la plupart des autres, c'est qu'il s'est révélé être un instrument plus efficace que les autres mythes**, comme dispositif d'intégration d'une structure maniable dans le flux de l'expérience.
>
> [. . .]
>
> Du point de vue épistémologique, [les entités abstraites qui forment la substance des mathématiques] ont le même statut de mythe que les objets physiques et les dieux, ni meilleur ni pire : la seule différence étant le degré avec lequel ils facilitent nos interactions avec les expériences sensorielles.
>
> [. . .]
>
> **La science totale, qu'elle soit mathématique, naturelle et humaine est [. . .] sous-déterminée par l'expérience. Les bordures du système doivent rester en ligne avec l'expérience ; le reste, avec tout son assortiment de mythes et de fictions complexes, a pour objectif la simplicité des lois.**
>
> **Les questions ontologiques sont, de ce point de vue, sur le même plan que les questions de sciences naturelles**. [. . .] Carnap maintient que ce n'est pas une question de fait, mais qu'il s'agit de choisir une forme de langage commode, un schème conceptuel ou un cadre commode pour la science. Je suis d'accord avec lui, mais à condition de dire la même chose des hypothèses scientifiques en général. [. . .]
>
> La question de savoir s'il existe des classes semble être davantage une question de commodité du schème conceptuel ; la question de savoir s'il existe des centaures ou des maisons de brique dans la rue des Ormes semble être davantage une question de fait. Mais j'ai insisté sur le fait que **cette différence n'est qu'une différence de degré et qu'elle provient de notre inclination vaguement pragmatique à ajuster tel fil de l'étoffe de la science, plutôt que tel autre, pour rendre compte d'une expérience récalcitrante particulière**. Le conservatisme joue un rôle dans des choix de ce type, tout comme la recherche de la simplicité. [Quin1980] p. 79-81

137. et le holisme que nous n'avons pas abordé (en bref : considérer l'édifice scientifique dans sa *totalité* organique afin d'en constater la *solidarité* des différentes parties – que ce soit dans sa genèse comme dans son évolution)

Revenons aux deux autres points soulevés par ce DUHEM appliqué à lui-même, vérité et nécessité : que sont la vérité et la nécessité en mathématique ? Il semblerait fou de remettre en question ces notions : si l'on doute de la mathématique, que reste-t-il de la science ? Et pourtant GONSETH a déjà fait « le sacrifice des notions que nous avons dites « éternellement fixées », des concepts « préalablement et exactement délimités » pour leur substituer les concepts « en devenir » et « ouverts vers leur avenir » » [138].

L'analyse pénétrante de DUHEM n'a même pas effleuré cette possible mutabilité de la mathématique, alors qu'un parallèle très évident lui était à portée de main (le transport dont nous parlions plus haut) pour peu que l'on se posât quelque question sur le sens des énoncés mathématiques. Comment cela se peut-il de la part d'un esprit aussi clarifiant ? Rappelons une citation antérieure (fin de section 1.16) :

> C'est [...] aux définitions, et non pas aux axiomes, que les Mathématiques doivent la puissance qui réside en elles de développer une suite illimitée de théorèmes toujours et vraiment nouveaux ; c'est par les définitions, et non par les axiomes, que se manifeste en elles l'activité créatrice de notre intelligence.
>
> Il est aisé maintenant de comprendre ce qu'on entend par généralisation en Mathématiques.
>
> [...] ce qui rend possible la généralisation des théorèmes mathématiques, c'est la généralisation des définitions. [Duhe1912] p. 542-543

Formellement, les définitions ne font qu'organiser les théorèmes, rendre plus claires leurs interactions, elle n'apportent aucune connaissance puisqu'on peut s'en dispenser. Ceci montre, selon nous, pourquoi DUHEM *ne pouvait pas* avoir une conception formaliste des mathématiques : mais alors ses « définitions » deviennent "créations de concepts" et son propos devient tautologique. Pour être génératrice de connaissance, cette libre créativité conceptuelle doit être *guidée* par quelque chose : nous l'appellerons "intuition" – et n'en dirons pas plus sur le sujet.

Revenons à ce transport duhemien : à travers lui, ce ne sont pas seulement les propos de DUHEM mais plus généralement tout ce qui peut être dit du rapport entre physique et mathématique qui trouvera une interprétation dans un rapport entre mathématique et symbolisme. Nous nous retrouvons *en pleine sphère formelle* : au lieu par exemple de modéliser une force physique par un vecteur mathématique, on modélise le vecteur mathématique comme notion première au sein d'une axiomatique (typiquement celle des espaces vectoriels).

Nous ne reviendrons pas sur l'aspect formel de la connaissance, vidé de tout contenu, qui se réduit à une jeu combinatoire réglé par une grammaire, motivé par des objets et propriétés primitifs dont l'on souhaite capter l'"essence". Le succès de cette entreprise hilbertienne n'est plus à démontrer en mathématique depuis le vingtième siècle – et n'est pas (c'est notre point !) sans rappeler furieusement DUHEM qui formalisait phénomènes physiques en mathématiques.

Le formalisme a par ailleurs l'immense avantage de *cerner où se fonde* la certitude des énoncés mathématiques : *in fine*, dans notre capacité à jouer, jeu dont le jugement de la bonne application des règles ressort du domaine *primitif* de notre connaissance. GONSETH nous avait préparé le terrain, fondant la connaissance formelle sur celle primitive.

Qu'on nous permette une métaphore ! La connaissance primitive est celle des objets de notre Terre, dont nous ne pouvons pas échapper à l'emprise de la gravité. Nos concepts correspondent alors exactement aux objets empiriques [139]. Enclencher la démarche formaliste, c'est couper la gravitation, nous permettant d'aller explorer l'espace au-delà de notre surface terrestre, de prendre littéralement du recul sur cette connaissance primitive, de l'englober, de la dépasser. Nous voyons alors (mais *comment le pourrions-nous autrement ?*) nos concepts se décoller, se désolidariser de leurs enveloppes terrestres, pour vivre leur indépendance abstraite dans la sphère gonsethéenne consacrée [140].

Si les concepts combinatoires et dynamiques (qui englobent ceux arithmétiques et géométriques) ont tant fait couler d'encre, c'est à notre avis qu'ils sont *les seuls* concepts mathématiques originellement indissociables de leur réalisations (réalisations où ils prennent par ailleurs naissance), constituant par là même *l'unique pierre de touche* qui jugera de l'idonéité d'une connaissance.

138. [Gons1936] §8

139. Nous empruntons cette citation de PASCH à [Gons1945-55] §194

140. **cette dissociation du sens et du nom concrétise**, pour la géométrie élémentaire, **le processus fondamental qui a libéré la mathématique des chaînes qui l'attachaient trop étroitement au réel** ; il a permis toutes les conquêtes inespérées réalisées depuis un siècle et ses applications surprenantes à la physique. [Dieu1987] p. 54

Se pose évidemment la question (adressée à HILBERT par FREGE en 1899 dans leur correspondance [141]) du rapport des formes au *contenu visé* : en quoi une déduction formelle (donc vide) serait-elle porteuse de sens ? Cette question n'est rien d'autre que l'image, suivant notre transport duhemien, de HAHN critiquant la pensée comme pouvant décider des faits : pourquoi les formes pourraient-elles décider du contenu ?

Nous voudrions offrir une autre image : la méthode formelle creuse des tunnels dans la roche, préparant le passage aux éventuels fluides (contentuels) qui voudront bien les parcourir. Selon sa nature, le fluide pourra s'infiltrer ici mais pas là. La main humaine n'est cependant pas de la facture divine qui décidera de l'immersion des tunnels. Hermann WEYL nous parle merveilleusement de ces formes (symboles) comme réceptacle à quelque chose de plus grand, sans mettre au rebut le désir idéalisant propre à l'être humain et nous ne résistons pas à le citer à nouveau [142] :

> In axiomatic formalism, [...] consciousness makes the attempt to 'jump over its own shadow,' to leave behind the stuff of the given, to represent the transcendent – but how could it be otherwise ?, only through the *symbol*. [...] It cannot be denied that a theoretical desire, incomprehensible from the merely phenomenal point of view, is alive in us which urges toward totality. Mathematics shows that with particular clarity ; but it also teaches us that that desire can be fulfilled on one condition only, namely, **that we are satisfied with the symbol and renounce the mystical error of expecting the transcendent ever to fall within the lighted circle of our intuition**. » [Weyl1926] p. 65-66

Nous pensons à présent être en mesure de reparler de la sphère idéale.

3.5 La sphère idéale (GONSETH, CONNES)

> Artistes à jamais admirables, les Grecs ont créé un type de vérité suprasensible, comme de beauté sensible, dont il est difficile de ne pas subir l'attrait. **Dès qu'on incline à faire de la métaphysique une systématisation de la science, on glisse dans la direction de Platon et d'Aristote. Et, une fois entré dans la zone d'attraction où cheminent les philosophes grecs, on est entraîné dans leur orbite**. [Berg1907] p. 346

Reprenons les quelques éléments de la connaissance primitive dont nous avons présenté la genèse à la section 3.2. Voyons comment une idéalisation naïve procéderait :

1. les phénomènes et objets physiques deviendraient une *réalité absolue* ;
2. les lois naturelles deviendraient autant de lois *causales*, "déterministes" [143] ;
3. les qualités deviendraient des *universaux* ;
4. les lois ontiques et prédicatives constitueraient une *logique absolue* ;
5. l'expression "tous" donnerait accès à l'*infini actuel* à travers les ensembles ;
6. les objets concrets deviendraient des *idées mathématiques* ;
7. la vérité des lois mathématiques deviendrait une *vérité mathématique*.

Nous avons déjà assisté à la déchéance du statut absolu de toutes ces notions, malgré l'attrait qu'il exerce sur nous. Par exemple, les universaux, avec RUSSELL – et non sans humour :

141. [RivRou1990] p. 215-235
142. nous le citions déjà section 1.18
143. Il nous paraît utile de rappeler la genèse de ce mot forgé en ce sens par C. BERNARD (puis dévoyé) : Je pose comme un principe scientifique que personne ne contestera, je pense, que dans les phénomènes de la nature brute ou vivante, il n'y a pas d'effets sans cause, c'est-à-dire que quand un phénomène apparaît, c'est qu'il y a eu une condition *déterminante* de cette manifestation. Hé bien ! je dis : **le savant n'a pas d'autre objet que de chercher à connaître cette condition déterminante, afin de régler ensuite le phénomène à son gré**, ou, en d'autres termes et d'une manière générale, le savant doit rechercher le *déterminisme* des phénomènes qu'il observe. **Fallait-il dire le *conditionalisme* ?** J'avoue que j'aurais reculé. Mais, employez le mot que vous voudrez, la chose essentielle est de savoir qu'il faut distinguer dans tout phénomène ces deux choses. [Bern1947] p. 265

> there is an almost irresistible tendency [...] to argue that, while there are many dogs, the one word "dog" is applicable to them all. Hence we come to think that dogs all have in common a certain canine essence, which is what the word "dog" really means. And hence we arrive at Plato **and the dog laid up in heaven**. [Russ1940] p. 27

La causalité, avec GOODSTEIN et SCHRÖDINGER (que nous avons déjà cité section 3.3) :

> Hume's answer to the question how predicates are related to past experience is refreshingly non-cosmic. When an event of one's kind frequently follows upon an event of another kind in experience, a habit is formed that leads the mind, when confronted with a new event of the first kind, to pass to the idea of an event of the second kind. **The idea of necessary connection arises from the felt impulse of the mind in making this transition**. [Good1953] p. 60

> La grande découverte de David Hume (1711-1776) consiste à remarquer que **la relation entre la cause et l'effet n'est pas directement observable** et qu'**elle n'exprime rien d'autre que la succession régulière**. Cette découverte épistémologique fondamentale a conduit les grands physiciens Gustav Kirchhoff (1842-1887), Ernst Mach (1838-1916), et bien d'autres, à affirmer que **la science de la nature ne fournit aucune explication, mais qu'elle vise seulement à obtenir une description complète et économique** (Mach) **des faits observés, et qu'elle ne peut au demeurant rien atteindre de plus**. [Schr1948] p. 86

La métaphysique, avec BERGSON :

> Du jour où l'intelligence, réfléchissant sur ses démarches, s'aperçoit elle-même comme créatrice d'idées, comme faculté de représentation en général, il n'y a pas d'objet dont elle ne veuille avoir l'idée, fût-il sans rapport direct avec l'action pratique. [Berg1907] p. 160

> L'intelligence, à l'état naturel, vise un but pratiquement utile. Quand elle substitue au mouvement des immobilités juxtaposées, elle ne prétend pas reconstituer le mouvement tel qu'il est ; elle le remplace simplement par un équivalent pratique. **Ce sont les philosophes qui se trompent quand ils transportent dans le domaine de la spéculation une méthode de pensée qui est faite pour l'action**. [...] *Notre intelligence ne se représente clairement que l'immobilité.* [Berg1907] p. 156

Toujours la métaphysique (à un niveau causal et ontologique) avec MILHAUD (non sans une forte consonance duhemienne) :

> Deux points matériels quelconques s'attirent mutuellement, proportionnellement à leurs masses, et en raison inverse du carré de leur distance. Loi vraiment admirable de simplicité [...]. Loi dont **la fécondité peut bien à elle seule justifier, à tous les yeux, les fictions qui ont servi de point de départ à la mécanique céleste, mais à la condition que cette justification soit comprise**. Si nous avons su dans cette étude exprimer notre pensée, on jugera comme nous que les vérifications expérimentales de toutes sortes, qu'elle recevra, non seulement **ne prouveront l'existence d'aucune attraction, au sens métaphysique du mot**, mais encore **n'établiront aucun lien nécessaire entre les phénomènes eux-mêmes et nos fictions** ; celles-ci forment un langage d'une perfection incontestable, mais ce langage ne cesse d'appartenir au domaine de l'intelligible, et de se former parallèlement à l'observation des faits, **sans que jamais nous puissions juger objectivement nécessaire**, sous prétexte de vérification, **un seul des éléments dont il est formé**. [Milh1898] p. 102

> En résumé, **la mathématique ne nous permet jamais de porter sur les phénomènes non observés une affirmation certaine, à l'abri du principe de contradiction**. Quand, ayant pris son essor à l'occasion de quelques postulats suggérés par l'observation, elle se montre particulièrement utile et instructive, non seulement **elle ne permet jamais qu'une prédiction probable**, mais encore, les prédictions d'un certain ordre fussent-elles indéfiniment réalisées, elle **n'apprend jamais rien sur les postulats, envisagés non seulement dans leur signification métaphysique, mais même dans leur réalité phénoménale**.

> Lorsque enfin elle semble permettre la vérification des grandes hypothèses et jouer ainsi un rôle immense dans la connaissance générale de l'univers, **ou bien** l'hypothèse porte directement sur des faits inconnus, et alors **elle ne cesse jamais** d'avoir un caractère provisoire, et **de se présenter comme explication suffisante, non nécessaire ; ou bien** l'hypothèse peut, sous une certaine forme, entrer décidément dans la science et fournir à **la mathématique** l'occasion de développements définitifs, mais c'est alors à la condition que celle-ci **renonce à toute prétention objective et remplisse simplement sa fonction de langage créé par l'esprit pour l'esprit**. [Milh1898] p. 110-111

Le platonisme en mathématique avec PRAWITZ :

> The adherent of the platonistic principle of meaning faces a dilemma [...] : **either** he concedes that his principle does not yield any consequences beyond the ones obtained by **equating meaning with knowing how to use sentences in proofs**, in which case his formulation must said to be misleading and to introduce an unnecessary detour, **or** he himself insists that knowledge of truth-conditions transcends any knowledge about proofs, in which case he may have to admit that this transcendence has no empirical consequences, and if so, his principle again fails to add anything to the elucidation of what it is to know the meaning of a sentence and is now also guilty of **introducing assumptions without empirical import**. [Praw1977] p.15

Cette idéalisation naïve n'est ainsi plus d'actualité.

Celle que nous décrit GONSETH, en revanche, évite cet écueil d'un absolu qui descendrait se réaliser, et décrit la genèse de la sphère idéale en la sphère primitive, par un acte *sui generis*, ainsi que l'évolution par axiomatisations, par schématisations mentales successives [144]. Mais quand il s'agissait (section 1.5) de justifier les liaisons entres les éléments idéaux, nous sommes restés face un vide : comment en effet ne pas oublier *toute la subjectivité* de ces actes *sui generis* (idéalisation de l'objet, saisies des liaisons entre objets idéaux), subjectivité propre à l'individu que ces actes "traversent" ?

Un des mérites de GONSETH, à nos yeux, consiste à décrire la genèse et l'évolution des abstraits *au sein d'un même individu*, à reconstituer ce *sens* dont nous demandions avec Stella BARUK en introduction s'il était bien nécessaire de pratiquer la sélection par la destruction dans l'œuf. Cette sphère idéale est pour nous *vivante* et en cela consiste sa valeur : elle nous porte, elle nous *anime*. Elle n'est surtout pas une réalité (mathématique ou autre) prédonnée que nous découvririons petit à petit. *Nous* construisons, chacun, individuellement, un « château intérieur » [145], une carte du territoire, tout comme nous construisons notre réalité [146]. Le miracle est que nous puissions communiquer avec autrui, tant dans le réel que dans le mathématique. *Êtres dispensables, fictions indispensables* : ainsi pensons-nous les "objets" la sphère abstraite.

Il y a néanmoins une immense différence : si dans la réalité ce n'est qu'à l'aune des *résultats* des actions qu'elle porte que l'on pourra juger *in fine* de la *valeur* d'une croyance (et cela constitue à nos yeux la seule acception recevable de sa *vérité* – en fait de celle de son contenu), le consensus en mathématiques sur la "valeur" d'un énoncé (pour ne pas dire sa vérité) s'établit grâce à l'outil *formel* dont elle s'est dotée, outil qui sanctionnera en

144. **On monte dans l'abstraction à des hauteurs vertigineuses ; cela n'est possible que parce que chaque objet abstrait est devenu concret par l'usage ; c'est une question de temps et d'énergie, mais on y parvient toujours**. C'est ce qui fait en revanche l'immense difficulté de vulgariser les mathématiques. À ce propos, un professeur avait défini un objet abstrait comme un objet qu'on ne peut ni voir ni toucher, et un objet concret comme un objet qu'on peut voir et toucher. Oui, avait acquiescé un élève, mon caleçon, par exemple, est concret tandis que le vôtre est abstrait, parce que je ne peux ni le voir ni le toucher. Plus sérieusement, **un objet concret est un objet abstrait auquel on a fini par s'habituer**. [Schw1997] p. 166

145. l'image est un souvenir de notre lecture de [Schw1997]

146. « Rien ne prouve, dis-tu, la réalité de ces objets en dehors de notre cerveau ». Comparons la réalité mathématique au monde matériel qui nous entoure. Qu'est-ce qui prouve la réalité de ce monde matériel en dehors de la perception que notre cerveau en a ? Principalement, la cohérence de nos perceptions, et **leur permanence**. Plus précisément, la cohérence du toucher et de la vue pour un seul et même individu. Et la cohérence entre la perception de plusieurs individus. La réalité mathématique est de même nature. Un calcul effectué de plusieurs manières différentes donne le même résultat, qu'il soit fait par un seul individu ou par plusieurs. [...] On a commencé par explorer la réalité mathématique dans des zones où l'imagerie mentale liée au réel est très simple. C'est le cas pour la géométrie euclidienne. Ensuite, grâce aux procédés axiomatiques ou aux problèmes concrets posés par la théorie des nombres, on a pu accéder à des régions beaucoup plus éloignées de la réalité matérielle. Il n'empêche que **la réalité à laquelle on est alors confronté est tout aussi solide que la réalité quotidienne. La frustration éprouvée par un mathématicien qui ne parvient pas à voir ce qui se passe dans cette réalité est tout à fait comparable à celle d'un aveugle qui cherche son chemin**. [ChaCon1989] p. 40

fin de compte[147]. Et c'est d'ailleurs toujours par l'*action* (sur les symboles) que le formalisme pourra trancher. Ainsi l'action boucle-t-elle sur elle-même, l'action dirigée par la connaissance se fondant *in fine* sur l'action primitive.

Nous accordera-t-on une image électrique pour décrire les deux premières axiomatisations gonsethéennes ? (La deuxième, rappelons-le, aboutissait au logique pur, au formalisable.)

Prenons une plaque métallique horizontale et chargeons-la électriquement. Au-dessus de cette plaque, l'air se charge en conséquence. Cet air chargé peut évoluer, constituer nuages et orages, mais il lui manque l'équilibre, sa charge continuelle devant tôt ou tard neutraliser par la foudre celle de la première plaque. Lorsque cet air chargé devient, après insistance suffisante du générateur, véritable matrice d'où naît une *deuxième* plaque métallique en regard de la première, le courant peut s'établir entre les deux plaques. Ces dernières sont par ailleurs faites du même métal et le passage du courant les altérera, transformant en retour la nature du courant .

Prenons notre sphère intuitive, et chargeons-la de notre activité connaissante primitive. Au-delà de cette sphère, les nuages de l'idéalisation s'amoncellent. Ces idéaux peuvent évoluer, constituer théories et mirages, mais il leur manque l'équilibre, un contrôle sans lequel leur vaine excessivité les fera précipiter. Lorsque cet abstrait devient, après insistance de la volonté de connaître, véritable matrice d'où naît une *deuxième* sphère en regard de la première, la montrée en abstraction peut s'établir entre les deux sphères. Ces dernières sont par ailleurs quelque part de la même facture – eu égard eu caractère *primitif* du formel – et la montée de l'abstrait les altérera toutes deux, faisant évoluer le formalisme et la connaissance primitive, transformant en retour l'abstrait selon le primitif qui le fonde et le formel qui l'encadre.

La synergie plaques-courant figure ainsi celle de la dialectique primitif-abstrait-formel où le formel s'immerge dans le primitif – la boucle de l'action que nous mentionnions.

Nous avons insisté sur le caractère *foncièrement subjectif* de la montée des abstraits, fût-elle contrôlée par un formalisme. Et pourtant... poursuivons notre écoute d'Alain CONNES :

> Je crois qu'il faut se garder de confondre la réalité mathématique et son illustration possible dans des phénomènes naturels. Quand je parle de l'existence indépendante de la réalité mathématique, je ne la localise absolument pas dans la réalité physique. Un certain nombre de modèles physiques, utilisent, il est vrai, les mathématiques pour décrire des phénomènes naturels, mais ce serait une grave erreur de réduire les mathématiques à ces phénomènes. Je pense que le mathématicien développe un « sens », irréductible à la vue, à l'ouïe et au toucher, qui lui permet de percevoir une réalité tout aussi contraignante mais beaucoup plus stable que la réalité physique, car non localisée dans l'espace-temps. Lorsqu'il se déplace dans la géographie des mathématiques, le mathématicien perçoit peu à peu les contours et la structure incroyablement riche du monde mathématique. Il développe progressivement une sensibilité à la notion de simplicité qui lui donne accès à de nouvelles régions du paysage mathématique. [ChaCon1989] p. 49

Et pourtant, au fur et à mesure de la pratique mathématique, l'interprétation devient plus apte à faire passer les *idées*, le *sens profond* d'un résultat, d'une question. Cette *juste interprétation* devient ainsi *esprit de synthèse* et participe du dialogue à tous ses niveaux.

Petit à petit, notre intuition s'affine : auparavant endormie et brutalisée par de grossières analogies à la portée bien courte, la voilà maintenant capable de deviner par-delà les faits observés ce qui pourrait les *unifier*, la voici apte à « rapprocher des faits que les apparences séparaient » – la visée scientifique par excellence.

Petit à petit se développe le *sens critique*, permettant de séparer, parmi les questions qui s'offrent à nous et les résultats récoltés, le bon grain de l'ivraie, l'*essentiel* de l'*accessoire*, d'un côté l'amande logique d'un concept (sous forme d'axiomes simples et efficaces) et la résonance profondément motrice d'un problème qui a animé la mathématique pendant plusieurs siècles, de l'autre les propriétés accidentelles et marginales, les interrogations futiles et superficielles.

Enfin se dévoilera sans doute la forme la plus épurée de notre intelligence : la *simplicité*.

147. une langue formelle symbolique résulte de contraintes très fortes : la réduction du signifié aux règles de l'usage des signes ; la clôture du lexique ; l'existence de règles de bonne formation des expressions ; la réduction des définitions des termes non primitifs à des abréviations ; l'explicitation complète des règles d'inférence permettant de constituer les séquences d'expressions ayant valeur d'enchaînement déductifs ; des exigences définies concernant les propriétés du système d'axiomes (axiomatique) requis pour une théorie. [...] **Pour s'assurer de l'identité de signification d'un langage formel pour tous les sujets mathématiciens, il n'y a d'autres vérifications à opérer que de voir si les règles ont été appliquées**. [Cave2001] p. 166

3.6 Applications et ouvertures

Notre travail visait à démystifier, à lever le voile. Voyons quelques exemples.

Le langage. Le sens de nos mots "concrets" est ancré dans le vécu sensible de notre sphère primitive : perception d'un objet, sensation d'une qualité, vécu d'un acte. L'analogie, la similarité et notre vivance permettent ensuite de reconnaître et d'étendre leurs "classes de dénotation" (ouvertes car en devenir) et d'en édifier le sens abstrait – en toute *subjectivité*. Ce qui nous met d'accord, c'est notre *usage* des mots.

En physique.

La vérité d'une théorie physique. Une théorie physique est une théorie *mathématique*, laquelle est plus ou moins *commode* (POINCARÉ), *éclairante*, *puissante* (GÖDEL (cité plus bas)), *idoine*, *convenable* (GONSETH), *pertinente*, *adéquate*, selon qu'elle s'interprète bien dans, qu'elle modélise bien le réel. Sa vérité n'a aucun autre sens.

La causalité. Que ce soit notre pensée ou notre formalisme, aucun n'a droit de cité à contraindre le réel. Si une théorie est idoine, on le constatera et ce sera l'*habitude* de cette constatation qui fondera notre confiance en la démarche théorique – plus spécifiquement, en le principe de schématisation.

L'objet, la réalité. L'objet est un *préjugé macroscopique* hérité de notre forme primitive "objet", originellement extrêmement bien adaptée aux fins de notre action. Garder ce préjugé lorsqu'on explore l'abstrait et affinons ainsi notre construction/connaissance de la réalité est une entrave à notre intelligence. De là tous les blocages métaphysiques aux grande et petite échelles.

Le temps. Le temps vécu est la durée bergsonienne. La modélisation du temps newtonien est une droite, donc pleinement de l'espace. La dissipation (chose faite depuis DUHEM) de cette illusion (déjà relevée par GONSETH [148]) fonde le départ de la réflexion de BERGSON [149].

La probabilité. La notion de phénomène *probable* est primitive, ainsi la probabilité comme *possibilité de survenue*, possibilité *plus ou moins "grande"*. La "grandeur" dont il est question à ce stade primitif est *tout sauf numérique*, la question (pragmatique) n'étant souvent pas tant de "comparer" les probabilités de plusieurs phénomènes que de savoir si étant donné *un* phénomène l'on agit en croyant ou non à sa survenue.

Le paradoxe de BERTRAND [150] met à jour DUHEM : la variété des possibilités de modélisation à travers d'une part celle de l'"univers des possibles" (choix de l'espace à mesurer) d'autre part celle de l'"aléa" (choix de la mesure de probabilité) montre l'absurdité de parler de "la" probabilité d'un phénomène sans précision aucune.

Le paradoxe de SIMPSON [151] nous rappelle par ailleurs qu'une modélisation statistique reste une modélisation et non un oracle, cet outil pouvant du reste tout à fait se révéler inapte à guider notre action.

En mathématique.

148. A M. METZ. Quelle imagination vous manifestez lorsque M. Bergson vous demande si le temps des relativistes n'est pas un temps fictif et irréel ! Et pourtant il ne faut pas en douter ! [...] **Le temps – et surtout celui qu'on mesure – n'existe pas en lui-même. Il n'est qu'un certain ordre établi entre certaines phénomènes**, et peut varier selon les phénomènes privilégiés dont on se sert. M. FABRE. Qu'est-ce en effet le temps scientifique, sinon une monstruosité conventionnelle. L'AUTEUR. **Au même titre que toute création de notre esprit !** [Gons1926] §35

149. En réalité, la métaphysique n'attirait beaucoup moins que les recherches relatives à la théorie des sciences, surtout à la théorie des mathématiques. Je me proposais, pour ma thèse de doctorat, d'étudier, les concepts fondamentaux de la mécanique. C'est ainsi que je fus conduit à m'occuper de l'idée de temps. Je m'aperçus, non sans surprise, qu'il n'est jamais question de *durée* proprement dite en mécanique, ni même en physique, et que le "temps" dont on y parle est tout autre chose. Je me demandait alors où est la durée réelle, et ce qu'elle pouvait bien être, et **pourquoi notre mathématique n'a pas de prise sur elle**. C'est ainsi que je fus graduellement du point du vue mathématique et mécanistique où je m'étais placé tout d'abord, au point de vue psychologique. De ces réflexions est sorti l'*Essai sur les données immédiates de la conscience* où j'essaie de saisir la durée pure. [Berg1889] p. 282-283 (lettre à Giovanni PAPANI)

150. Version discrète : deux promeneurs s'assoient successivement (distinctement et "indépendamment") sur l'une des quatre places disponibles sur deux bancs, on considère l'éventualité que les deux promeneurs s'assoient côte à côte.

151. Un article de *Pour la science* (n429 juillet 2013) est consacré à ce paradoxe.

La vérité. La seule vérité effective est celle primitive, celle de nos actes sur les symboles [152].

La vérité abstraite est une chimère, ce qui n'est pas renier le caractère vivant des visions qui ont traversé les grands esprits mathématiciens et animé des générations entières – bien au contraire. « L'objectivité revient [...] à une unanimité de subjectivité » [153].

La vérité formelle enfin est (en tant que vérité) un non-sens : une "forme véridique", la *prouvabilité*, a pris sa place.

La nécessité logique. L'unique nécessité observée l'est dans le primitif (elle est donc sommaire), sa formalisation conduit à des *règles* de dérivations, *librement* (mais non arbitrairement) *choisies.* Encore une fois, leur bonne application ressort du primitif.

La preuve formelle. Eu égard à son caractère formel et à *notre décision* que ses formes propagent la "vérité" (qui ne fait plus sens), il conviendrait de la nommer plutôt "forme prouvale" (ou "forme-preuve"). Le choix des règles d'inférence est idoine [154] – donc potentiellement révisable.

L'objet mathématique. Quel est-il ? Où est-il ? Nous ferions mieux de nous demander *comment* il est. Et nous répondrions alors qu'il se développe par une *pratique* de la forme axiomatique à laquelle on le soumet et qu'il évolue par *horizons de réalité* dans un *abstrait vivant* – être dispensable, fiction indispensable.

Au passage, nous venons de dissiper les trois implicites de la mathématique pratiquée ou enseignée que nous mentionnions en introduction.

Le cinquième postulat. Est-il vrai ? Est-il faux ? Nous avons vu [155] avec GONSETH en quoi la question n'a pas de sens. On travaille avec cette forme-axiome ou l'on ne travaille pas avec. Et cela en un sens plus fort qu'un simple arbitraire vu que les deux options peuvent trouver physiquement réalisation.

L'axiome du choix. Encore pire : il ne pose problème qu'avec l'infini – or quand nous parlons d'infini nous avons déjà quitté la sphère primitive. Il est donc insensé d'énoncer cette "axiome" en-dehors d'un formalisme (nous avons similairement évoqué le non-sens d'une auto-appartenance en terrain primitif). DUHEM nous a délivré de ces querelles métaphysiques dont témoignent les cinq lettres sur la théorie des ensembles [156]. La véritable question concernant AC est celle de son *idonéité* [157] au sein d'une axiomatique.

Les cardinaux infinis. Au stade primitif, les seuls cardinaux concevables sont *finis*, l'infini traduisant l'*impossibilité* de l'arrêt de l'énumération, ce qu'on modélise au sein de ZFC (Z suffirait) par la *dénombrabilité* – l'équipotence avec $\mathbf{N}$. Dans ZFC, la notion de cardinal est claire : ordinal minimal dans sa classe d'équipotence. Mais pourquoi avoir choisi l'*équipotence* (certes primitivement indiquée) plutôt qu'une autre formalisation ? Pourquoi par exemple ne pas parler des *numerosities* de V. BENCI et M. di NASSO [158] qui respectent, à défaut de l'équinumérosité, le principe « les parties strictes sont de numérosité strictement plus petite » ? Ces questions relèvent de l'*idonéité* de choix de définitions, non de vérité primitive.

Le cardinal du continu. Le continu est-il dénombrable ? La question est tranchée dans ZF mais « ce qu'il y a de dangereux, de trompeur dans l'idée : « On ne peut pas mettre les nombres réels en série », ou « l'ensemble... n'est pas dénombrable », c'est qu'elle fait **apparaître comme un fait de nature ce qui est** une détermination, une **construction conceptuelle**. » [159]. Si l'on osait par malheur penser *primitivement* le

152. « Mais ce calcul n'est-il qu'un *usage ;* n'y a-t-il pas également une *vérité* qui corresponde à cette suite ? » **La *vérité*, c'est que le calcul s'est vérifié.** – « Veux-tu donc dire qu'"être vrai" signifie être utilisable (ou utile) ? » – Non : j'entends qu'on ne peut pas dire de la série des nombres naturels – non plus que de notre langage – qu'ils sont vrais, mais qu'ils sont utilisables et surtout qu'*ils sont utilisés.* [Witt1937-44] p. 34

153. [Gons1936] §13 (citant F. KAUFMANN), *cf.* section 1.2

154. De 1930 à 1940 [...] la ligne de démarcation entre les termes inextensibles (logiques) et extensibles (descriptifs) sembla se stabiliser. Une liste, contenant un petit nombre de termes logiques, finit par recueillir **un large consensus**, de sorte que la définition générale de la vérité logique devint possible ; la vérité logique ne l'était plus "relativement" à une liste *ad hoc* de constituants. (Cf. Tarski [1935]). [Laka1964] p. 132 (footnote)

155. section 2.5

156. [RivRou1990] p. 287-307

157. There might exist axioms so abundant in their verifiable consequences, shedding so much light upon a whole discipline, and furnishing such powerful methods for solving given problems (and even solving them, as far as possible, in a constructivistic way) that quite irrespective of their intrinsic necessity they would have to be assumed at least in the same sense as any established physical theory. K. GÖDEL, *What is Cantor's Continuum Problem ?* (1947), cité dans [Fefe1990] p. 182-183

158. un exposé est disponible à l'URL http ://maths.york.ac.uk/www/sites/default/files/Di_Nasso-slides.pdf

159. [Witt1937-44] p. 125-126

cardinal du continu, la conclusion de WITTGENSTEIN frappera de plein fouet.[160] (Et au passage un théorème de COHEN nous dit que ZFC est complètement incapable de déterminer $2^{\aleph_0}$, au sens où[161] ayant fixé un cardinal λ on peut toujours trouver un modèle de ZFC où $2^{\aleph_0} > \lambda$.)

En "métamathématique".

La métamathématique. "méta" de quoi, au juste ? Nous avons un fondement, un roc primitif, c'est de celui-là que nous pouvons – et devons – nous élever. Quel sens cela aurait-il de chapeauter les cieux platoniciens d'une dalle de béton, sinon celui d'un monde à l'envers ?

Les théorèmes de la logiques propositionnelle. Ces théorèmes, *e. g.* celui de la déduction ($\mathcal{T}+A \vdash \Theta$ équivaut à $\mathcal{T} \vdash A \Rightarrow \Theta$) ou celui de la complétude (décidabilité *via* les tables de vérité), reposent souvent sur une récurrence[162] sur la complexité d'une formule : leur vérité est avant tout *primitive* et ressort de l'*arithmétique*[163] – en fait de ce que nous avons appelé *combinatoire*.

Nous proposons de distinguer ces théorèmes primitifs de leurs formalisations possibles dans une forme-axiomatique peanienne, par exemple **en les préfixant**[164] **d'un "h-"** (comme "**h**umain"), d'un "p-" (comme "**p**rimitif"), d'un parapluie (pour indiquer que leur sens est *à l'abri*), or whatever you might consider suitable.

Seraient ainsi précisés *h-théorèmes* les énoncés suivants : *si une théorie prouve une contradiction, alors elle prouve tout énoncé* ; *rajouter un indécidable préserve la consistance* ; *les formules sont énumérables*[165].

La théorie des modèles. Qu'est-ce qu'un modèle sinon un *ensemble*, donc une forme-objet que l'on appréhende par une pratique symbolique ? Si je dis que $\bigstar \leftrightarrow \blacktriangle$ est modèle de $\forall a, \exists b, a \neq b$ (avec l'interprétation évidente) je suis dans le primitif et je parlerai alors plutôt de *h-modèle* ; *a contrario*, la paire $\{\emptyset, \mathfrak{P}(\emptyset)\}$ est bien un modèle au sens habituel – *ensembliste*.

A-t-on cependant gardé en tête que, devenant "prouvabilité dans ZFC", *la vérité ensembliste de référence "primitive" a disparu* ?

Si je veux h-prouver l'indémontrabilité de la commutativité en théorie des permutations, je peux exhiber dans ZFC un groupe non abélien : mais j'aurai alors simplement h-montré que la donnée d'une forme-preuve de la commutativité entraîne la (h-)non-consistance de ZFC. Il vaut mieux exhiber des h-modèles (nécessairement finis), par exemple le h-graphe de $\mathfrak{S}_3$, afin que la preuve de l'absurde soit contentuelle et non seulement formelle.

La question de l'idonéité des modèles *infinis* (nécessairement en un sens formel) est alors posée. Dès lors, pourquoi se restreindre à des (formes de) preuves *finies*, résidues des h-preuves ? L'idonéité des (formes de) *preuves infinies* doit être considérée.

Le théorème de LOWEINHEIM-SKOLEM. Comment ZFC pourrait-il admettre un modèle *dénombrable*, lui qui contient toute une hiérarchie d'infinis – dont l'indénombrable continu ? Le paradoxe naît de la confusion de l'aspect idéal de la dénombrabilité (naïvement attribué à certains objets d'un univers ensembliste platoniquement prédonné) avec son aspect formel (satisfaire une forme-prédicat nommée par l'usage "équipotence à $\mathbf{N}$").

Abandonnons cette confusion platonicienne et clarifions les choses depuis la sphère formelle : dans un modèle de ZFC, la forme-relation "appartenance" n'a aucune raison d'être la forme-relation $\in$, *a fortiori* la forme-relation "équipotence" n'a aucune raison d'être l'équipotence formulée en termes de $\in$ ni la "dénombrabilité" l'$\in$-dénombrabilité.

Le théorème de LOWEINHEIM-SKOLEM[166] conforte la vision primitive d'un infini insondable et indéterminé qui s'évanouit aux frontières de l'énumérabilité indéfinie.

---

160. Si l'on disait : « La réflexion sur le procédé de la diagonale nous montre que le *concept* de "nombre réel" a beaucoup moins d'analogie avec le concept de nombre cardinal que l'on incline à le penser à cause de certaines analogies trompeuses », cela aurait un sens véridique et honorable. Mais c'est justement le *contraire* qui se produit : dans la "mesure" où l'on compare "l'ensemble" des nombres réels soi-disant selon leur grandeur avec celui des nombres cardinaux. La différence de genre des deux conceptions est exposée comme différence d'extension par le truchement d'une expression erronée. Je crois et j'espère qu'une génération à venir rira de cette jonglerie. [Witt1937-44] p. 126

161. communication personnelle avec M. DZAMONJA (12 août 2015)

162. You might say : (1) The real proof would be the whole chain. In some mystical way, I've done all these operations. (2) In some way what I've done is the *same as* doing all 3000 – I can only say it's not the same. [Witt1939] p. 304

163. I'm really trying only to examine the difference between counting in mathematics and ordinary counting, and the difference between a mathematical proposition and an experimental one. [Witt1939] p. 141

164. l'idée est d'un ami : Gilles TAUZIN

165. fait fondamental établissant la numérotation de GÖDEL, ingrédient clef pour établir le théorème de complétude de la logique prédicative ; il se traduit dans ZFC par l'équipotence $\mathbf{N} \simeq \mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$

166. Il est primordial que la logique sous-jacente soit du *premier* ordre, le second ordre permettant la catégoricité de chaque cardinalité.

Le temps et la place nous manquent ; nous aimerions toutefois dire deux mots sur les théorèmes de GÖDEL, non sans lien avec [Detl1986].

La convergence des suites de GOODSTEIN. Un énoncé qui serait vrai mais non prouvable ? Voyons voir. Sa "vérité" n'est que sa prouvabilité dans ZFC grâce à l'intervention des puissances itérées du premier ordinal infini ω. Quant à sa non-prouvabilité [167], KIRBY et PARIS ont h-montré qu'une formulation du théorème de GOODSTEIN implique la consistance de PA [168], d'où l'on h-déduit (par le second théorème d'incomplétude de GÖDEL) l'inconsistance de PA (mais alors le théorème de GOODSTEIN est trivial). Finalement, il faudrait énoncer :

la convergence des suites de GOODSTEIN *est (h-)prouvée dans ZFC mais*
elle ne peut être (h-)prouvée dans PA sans y être en même temps infirmée.

Les entiers non standards. Il est traditionnel chez les mathématiciens de doter ZFC (disons au moins Z) d'une "interprétation primitive", considérant ainsi les entiers de ZFC comme les "vrais entiers" [169]. Nous avons déjà dénoncé cet ineptie en parlant de théorie des modèles. Donnons un argument supplémentaire en notre faveur.

En identifiant les "vrais" entiers avec ceux d'une interprétation primitive de ZFC, nous comprendrons *a minima* (et à dessein) : « pour tout théorie T, l'interprétation dans tout modèle de ZFC de l'énoncé arithmétique $\neg Cons T$ donne une h-preuve d'une contradiction dans T ». Or l'h-improuvabilité dans ZFC de $Cons(\text{ZFC})$ (second théorème d'incomplétude de GÖDEL) nous permet, avec le théorème de complétude de la logique prédicative, d'exhiber un modèle Ω de "ZFC+$\neg Cons(\text{ZFC})$". Dans ce modèle, que nous dit l'axiome $\neg Cons(\text{ZFC})$? Si les entiers de Ω sont les "vrais entiers", cet axiome nous donne une preuve de l'inconsistance de ZFC, d'où une contradiction dans ZFC, *a fortiori* dans Ω. Si l'on tient à la consistance du cadre ensembliste, la conclusion est sans appel : on ne peut pas exclure les entiers non standards [170] dans une interprétation "primitive" de ZFC.

Le théorème de HENKIN. Rappelons son énoncé : une théorie (consistante) peut se compléter en une théorie (consistante) *explicitement complète*, quitte à enrichir son langage d'une infinité dénombrable de constantes. L'idée est simple : on liste les énoncés puis, pour chacun d'eux, on rajoute ou bien sa négation (s'il introduit une contradiction) ou bien cet énoncé tel quel, en rajoutant dans ce dernier cas un témoin au langage si l'énoncé est existentiel. La "théorie limite" répond alors au problème.

Le procédé de "construction" précédent pose toutefois un sérieux problème : il n'est pas justement pas constructif, tant dans son déroulement (comment sait-on que choisir à telle étape ?) que dans son achèvement (que l'on nous décrive une telle théorie prolongeant PA de manière explicitement complète !).

Ce dernier point est d'importance, GONSETH nous ayant rappelé [171] en quoi la mathématique intuitionniste de BROUWER étendait notre sphère primitive, fondation des h-théorèmes "méta"mathématiques.

Le théorème de complétude. (de GÖDEL & HENKIN) Partant d'une théorie consistante, rendue au besoin explicitement complète, on en "construit" un modèle en prenant les termes du langage *modulo* indistinguabilité (au sens de LEIBNIZ), un terme s'interprétant alors dans ce modèle comme sa classe d'indistinguabilité et la vérité d'un énoncé par sa prouvabilité (dans la théorie de base). On montre par une h-récurrence sur la complexité d'un énoncé (récurrence qui *devra* tenir compte du connecteur $\neg$) que ce dernier énoncé est vrai si et seulement s'il est prouvé.

Le "modèle construit" ici pèche à deux égards : il est ensembliste (avec les réserves que nous avons déjà formulées) et la détermination de son interprétation soulèvement des questions d'effectivité – indistinguabilité effective de deux termes, prouvabilité effective d'un énoncé.

Les théorèmes d'incomplétude. En quoi l'énoncé G de GÖDEL serait-il "vrai" mais non prouvable ?

Sa "vérité" revient à la prouvabilité suivante : une théorie T axiomatisée de manière récursive et contenant RA prouve $Cons T \Longrightarrow G$. On comprend alors que, sitôt que l'on souhaiterait accorder une "vérité primitive"

167. communication personnelle avec J. FICHOT (19 mai 2015)

168. voir par exemple l'URL http ://logic.amu.edu.pl/images/3/3c/Kirbyparis.pdf

169. On peut toujours ensuite s'amuser à construire des modèles non standards de PA en rajoutant au-delà de $\mathbf{N}$ un $\mathbf{Q}$-ordre de copies de $\mathbf{Z}$.

170. il est clair qu'une preuve de catégoricité implique toujours un isomorphisme entre modèles par rapports au même modèle du cadre ensembliste utilisé : or, si la théorie des ensembles n'est pas catégorique – et elle ne l'est pas effectivement si elle possède un modèle –, il semble **impossible d'appliquer la distinction entre standard et non standard** à ses modèles. **La notion de même de modèle standard est donc relative**, même pour un système d'axiomes formalisé dans une logique non-élémentaire ; ainsi la catégoricité de l'arithmétique est démontrée par rapport à un modèle *relatif* – et non absolu – de la théorie des ensembles. [cité de *The foundations of Mathematics de Beth* (1959)] [Hein2013] p. 147

171. [Gons1936] § 139

à une telle théorie (par exemple ZFC), l'antécédent devient trivial et le conséquent vrai. Ce n'est cependant qu'abus de langage.

Quand à l'improuvabilité de G, elle sous-entend la consistance de la théorie ambiante : si une théorie T contenant RA et axiomatisée de manière primitive récursive h-prouve G, alors elle h-prouve également sa négation. Et l'établissement de ce résultat d'improuvabilité est *constructif* : à partir d'une preuve de G, on indique comment construire une preuve de $\neg G$.

3.7 En guise de conclusion (Caveing, Frege)

Nous avons déjà cité M. Caveing qui décrivait très bien comment nous pouvions nous approprier un "objet" mathématique : en jouant avec les axiomes formels que l'on a posés. Sa conception nous semble rejoindre celle gonsethéenne très imagée des horizons de réalité tout en adoucissant la violence que nous disions en introduction réveillée en nous ([Cave2001] p. 239) :

> **le M-objet** [...] **n'est finalement qu'un** moment thématique dans le parcours du réseau des relations, un **repos provisoire entre deux enchaînements d'actes** [...]
>
> la nécessité épistémologique de l'unité thématique d'un système de relations est prise pour une nécessité ontologique [...] **L'illusion assurément n'empêche en aucune façon de « faire des mathématiques »**, de tirer des conclusions valides, d'obtenir des résultats valides. Elle a simplement pour effet d'introduire une herméneutique métaphysique des mathématiques.
>
> Maurice Caveing, *Le problème de l'objet dans la pensée mathématique* (2001)

Mais comment poserait-on un formalisme permettant de disposer d'un M-objet sinon grâce aux *signes* dont nous parle si admirablement Frege ? ([Freg1882-1923] p. 63-64)

> [L'homme] serait limité à ce que la main peut façonner ou la voix faire entendre, sans cette grande découverte que fut celle des signes. Les signes donnent présence à ce qui est absent, invisible, et le cas échéant inaccessible aux sens. Je ne nie pas que même sans le secours de signes, la perception d'un objet puisse réunir un faisceau d'images mentales. Mais nous ne pouvons pas nous y attacher : chaque perception nouvelle précipite ces images dans la nuit et en fait surgir d'autres. En offrant au regard le signe d'une représentation, elle-même appelée à la conscience par une perception, on crée un nouveau foyer stable autour duquel s'assemblent d'autres représentations. Parmi celles-ci, on en pourra de nouveau choisir une et offrir au regard son signe. Ainsi pénétrons-nous pas à pas dans le monde intérieur des représentations, et y évoluons-nous à notre gré, usant du sensible lui-même pour nous libérer de sa contrainte. **Les signes ont, pour la pensée, la même importance qu'eut pour la navigation, l'idée d'utiliser le vent afin d'aller contre le vent**. Que personne ne méprise les signes, tant dépend de leur choix pertinent ! Et leur valeur n'est pas amoindrie si après un long usage il n'est plus nécessaire de produire effectivement le signe, si nous n'avons plus besoin de parler tout haut pour penser. **On n'en pense pas moins dans les mots et**, sinon dans des mots, **dans des signes mathématiques**, ou dans d'autres encore.
>
> Sans les signes, nous nous élèverions difficilement à la pensée conceptuelle. En donnant le même signe à des choses différentes quoique semblables, on ne désigne plus à proprement parler la chose singulière mais ce qui est commun : le concept. Et c'est en le désignant qu'on prend possession du concept ; puisqu'il ne peut être objet d'intuition, il a besoin d'un représentant intuitif qui nous le manifeste. **Ainsi le sensible ouvre-t-il le monde de ce qui échappe aux sens**.
>
> Gootlob Frege, *Que la science justifie le recours à une idéographie* (1882)

Nous devons prendre acte du formalisme, de notre action avec et sur les symboles par laquelle le sens se constitue pour chacun d'entre nous, action se déroulant dans une sphère primitive où nous pouvons utiliser une connaissance pragmatiquement assurée.

Nous devons demander à Parfait de déposer les armes, l'absoluité de la sphère idéale étant tombée. C'est au contraire dans notre action primitive que prend pied la sphère abstraite, à l'ontologie dispensable mais la vivance indispensable.

Nous devons quelque part concéder à Sceptique la plaisanterie de Russell according to which « mathematics may be defined as the subject in which *we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true* » ([Russ1917] p. 71).

Nous devons rejoindre Idoine quant à *l'idonéité de son idonéisme* et lui reconnaître l'origine primitive puis idéale d'un formalisme. Nous lui refusons cependant le caractère *systématique* de la nécessité d'une dialectique accompagnant toute axiomatique (*cf.* section 2.3) – refus au nom de l'honneur de l'esprit humain, de la vivance du monde des mathématiciens, de ceux et celles qui souhaitent prendre le flambeau et partir en éclaireur affronter les ténèbres de telle direction inexplorée de l'humanité, sans mépris pour leurs pairs qui seraient restés en amont affairés à des synthèses moins téméraires mais tout aussi nobles.

4 Annexe technique : le nombre est *action*

Cet expose propose un certain regard sur le texte *Qu'est-ce sont et à quoi servent les nombres ?* écrit en 1888 par Richard DEDEKIND. Nous travaillerons sur la traduction par Hourya SINACEUR extraite de [Dede2008] à laquelle réfèrent toutes les paginations de cet annexe.

Notre propos est simple : mettre en exergue l'approche *itérative* de fondement de l'arithmétique en opérant une sorte de *reverse mathematics* depuis le théorème 126 (existence et unicité d'une suite définie "par récurrence") vers l'axiome de l'infini de ZERMELO (qui remplace le "théorème" 66 de DEDEKIND).

4.1 Introduction

Motivation.

Rappelons que l'opération ***successeur*** s agit sur un ensemble en lui rajoutant un certain élément (lui-même), *i. e.* agit comme $a \mapsto a \cup \{a\}$.

Dans l'approche ensembliste moderne, l'axiome de l'infini (il existe un ensemble contenant $\emptyset$ et stable par s) permet de disposer d'un infini *actuel* réalisant la potentialité d'un infini *potentiel* (celle de pouvoir toujours itérer), d'où l'on obtient un ensemble [172] $\mathbf{N}$ qui satisfait les axiomes de PEANO avec unicité à unique isomorphisme [173] près : cet axiome permet donc d'avoir un modèle de l'arithmétique (de PEANO) et ce de façon catégorique. Chemin faisant de cet infini actuel vers une structure arithmétique, il a fallu construire les opérations de l'arithmétique, ce qui se fait usuellement de manière *itérative* : l'addition se définissant par itération du successeur (à penser comme l'incrémentation $n \mapsto n+1$) et la multiplication par itération de l'addition. Pour légitimer ces constructions par itération, il suffit de pouvoir itérer n'importe quelle fonction stabilisant un ensemble donné depuis n'importe quel élément de cet ensemble. Cette possibilité est réalisée grâce à l'ensemble $\mathbf{N}$ et prend la forme du théorème (ensembliste)

$$\forall A, \left\{ \begin{array}{c} \forall f \in A^A \\ \forall @ \in A \end{array} \right., \exists! a \in A^{\mathbf{N}}, \left\{ \begin{array}{l} a_0 = @ \\ \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+1} = f(a_n) \end{array} \right. \quad \text{où l'on a abrégé } n+1 := s(n),$$

lequel n'est qu'une traduction moderne du théorème 126 de DEDEKIND.

Ce dernier nous semble par conséquent coder toute l'essence de l'arithmétique (ordinale), à travers la possibilité d'*itérer indéfiniment*, autrement dit *via* le fait que $\mathbf{N}$ soit au sens de cette possibilité un *infini itératif.* Nous nous proposons de partir de ce théorème, de regarder ce qu'il requiert pour faire sens, et d'en déduire une forme d'axiome de l'infini codant les axiomes de PEANO.

En un mot : *un infini potentiel au sens* itératif *du théorème 126 de* DEDEKIND *doit être un infini actuel au sens* peanien *de l'axiome de l'infini.*

Fondement de notre action : objet initial.

Le théorème 126 peut se formuler aisément dans un cadre catégoriel. Il s'énonce en effet (de manière très compactée) sous la forme d'un diagramme sagittal :

$$\begin{array}{ccccc} o & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & N & \stackrel{\sigma}{\longrightarrow} & N \\ \downarrow & & \downarrow & \exists! a & \downarrow \\ \forall @ & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & A & \stackrel{\forall f}{\longrightarrow} & A \end{array}.$$

Prenons pour objets les triplets (a, f, A) tels que A contienne a et soit stable par f. Un morphisme entre deux tels triplets (a, f, A) et (b, g, B) sera défini par une application $\varphi : A \longrightarrow B$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} a & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & A & \stackrel{f}{\longrightarrow} & A \\ \downarrow & & \downarrow \varphi & & \varphi \downarrow \\ b & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & B & \stackrel{g}{\longrightarrow} & B \end{array}.$$

172. défini comme l'intersection de tous les ensembles contenant $\emptyset$ et stables par s

173. un morphisme d'un (N, s) vers un (N', s') est une application $f : N \longrightarrow N'$ faisant commuter le carré évident (*i. e.* telle que $f \circ s = s' \circ f$)

Alors le théorème 126 nous dit qu'un triplet (o, σ, N) tel que $\begin{cases} o \text{ appartient à } N \\ N \text{ est stable par } \sigma \end{cases}$ et $\begin{cases} \sigma \text{ est injective} \\ \sigma \text{ n'atteint pas } o \end{cases}$ est un objet *initial* de cette catégorie[174]. *Les nombres forment donc cet objet initial* et c'est en ce sens que nous disons que le théorème 126 les caractérise comme le fondement de notre action.

Axiomes de l'infini.

Pourquoi, dans l'axiome de l'infini, prend-on comme objet à éviter le vide et pour fonctionnelle injective le successeur ?

Fixons plus généralement un objet o (généralisant le vide) et une fonctionnelle σ partout définie (généralisant le successeur). On abrégera par commodité $a' := \sigma(a)$ pour tout objet a.

Introduisons quelques notations pour faciliter notre discours :

$$Chaine_o^\sigma I \quad \text{abrège} \quad \begin{cases} \forall i \in i,\ i' \in I \\ o \in I \end{cases} \quad (i.\ e. : I \text{ est une } \sigma\text{-chaîne contenant } o)\,;$$
$$Infini_o^\sigma \quad \text{abrège} \quad \exists I,\ Chaine_o^\sigma I \quad (i.\ e. : \text{il y a une } \sigma\text{-chaîne contenant } o)\,;$$

Nous conviendrons d'appeler $Infini_o^\sigma$ l'***axiome de l'infini*** de ***départ*** o et de ***pas*** σ. Ainsi l'axiome de l'infini de DEDEKIND-PEANO s'écrit-il $Infini_\emptyset^s$ et est-il un axiome de l'infini au sens précédent.

Notre propos, rappelons-le, est de mettre en relief l'aspect *itératif*[175] du fondement de l'arithmétique. Dans cette perspective, les axiomes de l'infini sus-définis sont *typiquement itératifs* : ils affirment l'existence d'ensembles dans lesquels on peut itérer une certaine fonctionnelle sur un certain objet. De ce point de vue, l'axiome usuel vaut autant que les autres[176], sous de bonnes conditions à déterminer sur σ. Annonçons tout de suite la couleur : on peut montrer[177] que

en restreignant aux pas σ injectifs évitant leur départ o,
tous les énoncés $Infini_o^\sigma$ sont équivalents.

Motivons les deux conditions ci-dessus. Si un ensemble $\{o, o', o'', o''', ...\}$ postulé par $Infini_o^\sigma$ est par malheur fini, la σ-orbite[178] de o devra "boucler" ; le premier itéré sur lequel elle revient est alors ou bien o (cas d'une orbite en forme de "0") ou bien un itéré plus loin (cas d'une orbite en forme de "∂"). Le premier cas peut être évité en empêchant σ d'atteindre o, le second en imposant son injectivité. L'absence de "boucle", de "torsion", nous incite à appeler

$$\textbf{\textit{platitude}} \qquad \text{l'énoncé } Plat_o^\sigma \text{ abrégeant } \begin{cases} \sigma \text{ est injective} \\ \sigma \text{ n'atteint pas } o \end{cases}.$$

Les équivalences ci-dessus peuvent alors s'écrire (on sous-entend une quantification universelle) :

$$\left(Plat_o^\sigma \text{ et } Plat_O^\Sigma\right) \Longrightarrow \left(Infini_o^\sigma \Longleftrightarrow Infini_O^\Sigma\right).$$

Platitude et arithmétique.

Revenant à DEDEKIND, il ressort que la platitude apparaît dans la définition 71 d'un système simplement infini, notion caractérisée par quatre conditions (α, β, γ et δ) dont sont issues les axiomes de PEANO[179] (les conditions ci-dessus sont celles γ et δ). Afin de resserrer le lien entre arithmétique (au sens de PEANO) et infini (en notre sens itératif), introduisons deux autres énoncés[180] :

174. En corollaire tombe son unicité à (unique) isomorphisme près.
175. Selon nous, les entiers codent notre *action*. Une action *illimitée* signifie l'absence d'obstacle à l'action, *i. e.* que l'on peut toujours agir. C'est pourquoi l'on code l'*infinité* des entiers par un ensemble stable par une action (et contenant un point de départ).
176. D'un tout autre point de vue – celui technique –, le choix du départ $\emptyset$ et de pas s facilite grandement la technique ordinale. En effet, on définit habituellement l'ordre $a \leq b$ par l'inclusion des segments initiaux associés, définition qui est une identité précisément pour le choix $(\emptyset, s)$.
177. Voici une esquisse de preuve (les détails ne seront pas retranscrits). Soient (o, σ) et (O, Σ) deux tels couples. Notons N l'"infini minimal" associé à (o, σ). L'idée est d'adapter la démonstration du théorème 126 avec départ O et pas Σ (mais sans ensemble stable associé puisque nous en cherchons précisément l'existence !) : l'image de la "suite" obtenue – si elle faisait sens – serait un infini pour O et Σ. Or l'axiome de remplacement nous légitime précisément la considération de cette image.
178. sa suite des itérés
179. On lira dans la note de bas de page 178 : *De l'aveu de son auteur, l'axiomatique de Peano est inspirée de cette définition 71.*
180. le choix de la lettre N n'est pas anodin : lorsque $o = \emptyset$ et $\sigma = s$, on retrouve $N = \mathbf{N}$

$$
\begin{array}{llll}
InfiniMin_o^\sigma & \text{abrège} & \exists N, \left\{\begin{array}{l} Chaine_o^\sigma N \\ \forall I,\ Chaine_o^\sigma I \Longrightarrow N \subset I \end{array}\right. & \begin{array}{c}(i.\ e. : \text{il y a une plus petite} \\ \sigma\text{-chaîne contenant } o).\end{array} \\
Peano_o^\sigma & \text{abrège} & InfiniMin_o^\sigma \text{ et } Plat_o^\sigma & \begin{array}{c}(i.\ e. : \text{il y a une plus petite } \sigma\text{-chaîne} \\ \text{sans boucles contenant } o).\end{array}
\end{array}
$$

On observera alors que :

1. le prédicat $Chaine_o^\sigma$ traduit la condition α (être une σ-chaîne) et un bout de celle β (contenir o) ;
2. la condition de minimalité dans $InfiniMin_o^\sigma$ équivaut à l'autre bout de la condition β ("hérédité" de la récurrence) ;
3. les conditions distinguant $Peano_o^\sigma$ de $InfiniMin_o^\sigma$ sont exactement celles γ et δ (platitude) ;
4. les énoncés $InfiniMin_o^\sigma$ et $Infini_o^\sigma$ sont *équivalents* (si I dénote une σ-chaîne contenant o, alors l'intersection de ces dernières incluses dans I fait sens et est un candidat pour notre N).

En conséquence, un couple $\binom{\sigma}{o}$ vérifiera les axiomes de PEANO ssi il vérifie l'axiome $Infini_o^\sigma$ couplé aux deux restrictions donnant l'équivalence des axiomes de l'infini. En d'autres termes,

la platitude (qui suffit à l'équivalence des axiomes de l'infini) est
ce qu'il faut et suffit de rajouter à l'infini (au sens itératif)
pour obtenir l'arithmétique (au sens peanien).

Cette description devrait complètement démystifier ces conditions suffisantes. Peut-on alors poser la question de leur *nécessité* ?

Nécessité de la platitude ?

Revenons à l'équivalence conséquence de la platitude :

$$\left(Plat_o^\sigma \text{ et } Plat_O^\Sigma\right) \Longrightarrow \left(Infini_o^\sigma \Longleftrightarrow Infini_O^\Sigma\right).$$

Bien que cette équivalence redonne un sens itératif à l'axiome de l'infini et s'inscrive dans la perspective structuraliste qui traverse les remarques 130 et 131 de DEDEKIND, elle *n'est pas* notre cible. *Ses hypothèses*, en revanche, – la platitude – le sont, dans une démarche de *reverse mathematics*.

Dans cette perspective, quel théorème souhaitons-nous voir équivalent à la platitude ? Nous l'avons annoncé : c'est le théorème 126, lequel permet d'itérer une fonction *dans un ensemble déjà donné*[181] sur un objet de cet ensemble, et que nous avons signalé comme décrivant (en un sens catégoriel) le fondement de notre action.

4.2 *Reverse mathematics* : du théorème 126 de DEDEKIND aux axiomes de PEANO

Le cadre formel est le langage ensembliste, écrit au premier ordre, muni des axiomes : *extension*, *union*, *parties*, *remplacement* – mais pas *infini* ! Rappelons que *remplacement* donne *séparation*, ce qui avec *parties* permet de construire tous les ensembles fonctionnels $B^A = Fonc(A, B)$.

On se donne :

1. un objet o ;
2. une fonctionnelle σ définie partout (dont les images $\sigma(x) =: x'$ seront notées avec des primes) ;
3. un ensemble N pour lequel le théorème 126 *fait sens* et est vérifié. Rappelons cet énoncé :

$$\#126 : \qquad \forall A, \left\{\begin{array}{l} \forall f \in A^A \\ \forall @ \in A \end{array}\right., \exists! a \in A^{\mathbf{N}}, \left\{\begin{array}{l} \forall n \in N,\ a_{n'} = f(a_n) \\ a_0 = @ \end{array}\right. .$$

181. si l'esprit itératif est le même, la différence technique est de taille car met en jeu les axiomes de remplacement

Objectif : montrer $Peano_o^\sigma$!

Nous allons démontrer (dans l'ordre) chaque point annoncé en police grasse droite :

N **est une chaîne**
σ **ne fixe personne**
o **n'est pas atteint**
N **est la plus petite chaîne**
N **vérifie le théorème de récurrence**
Tout élément autre que o **est atteint**

[pause pour donner la direction]

N **possède une suite de segments initiaux**
N **vérifie le théorème de récurrence forte**
Un lemme de comparaison
σ **est injective**

Trois points sur quatre.

Convenons d'appeler ***chaîne*** tout ensemble satisfaisant $Chaine_o^\sigma$, *i. e.* contenant o et stable par σ.

N **est une chaîne.** Soient $A, f, @$ et a comme dans #126.

L'égalité $a_0 = @$ faisant sens, son membre de gauche a_0 fait sens, *i. e.* la fonction a est définie en o, donc ce dernier appartient au domaine N de a.

Soit $n \in N$. L'égalité $a_{n'} = f(a_n)$ faisant sens, son membre de gauche $a_{n'}$ fait sens, *i. e.* la fonction a est définie en n', donc ce dernier appartient au domaine N de a. Finalement, N est stable par σ.

σ **ne fixe personne.** Soit $n \in N$ tel que $n' = n$. Soit A un ensemble à deux éléments, par exemple[182] $\{\emptyset, \mathfrak{P}(\emptyset)\}$. Notons f la transposition des éléments de A : observer que f n'a aucun point fixe. Prenons n'importe quel départ $@ \in A$. Soit a la suite donnée par #126. On a alors les égalités $a_n = a_{n'} = f(a_n)$, ce qui montre que f fixe a_n, d'où la contradiction.

o **n'est pas successeur.** Soit $m \in N$ tel que $m' = o$. Soit A un ensemble à deux éléments. Soit f constante sur A. Notons $@$ l'élément de A non atteint par f. Soit a la suite donnée par #126. On a alors les égalités $@ = a_o = a_{m'} = f(a_m)$, ce qui est absurde.

N **est la plus petite chaîne.** Précisons que c'est ici *et seulement ici* que nous utiliserons l'*unicité* de la suite a dans #126, ce qui permet de cerner la force de cette partie du #126.

Suivant Dedekind (théorème 79), définissons A par l'intersection de toutes les chaînes : cela fait sens puisque N en est une. Il nous suffit de montrer que A, qui est incluse dans la chaîne N, *contient* en fait ce dernier.

Définissons à présent une suite $u : N \longrightarrow N$ qui vaut l'identité sur A et qui coïncide ailleurs[183] avec σ. Montrons que cette suite u et la suite identité (que nous noterons v) vérifient toutes deux les conditions de #126 avec départ o et pas σ : par l'unicité, elle devront coïncider, en particulier en dehors de A, d'où $\sigma = Id$ sur $N \setminus A$, ce qui s'écrit $\forall n \in N \setminus A\ ,\ n' = n$, d'où l'inclusion $N \setminus A \subset Fix\sigma = \emptyset$ et la conclusion recherchée $N \subset A$.

Par définition, la suite u coïncide avec v sur A ; puisque $o \in A$, elles ont même départ $u_o = o = v_o$. Soit maintenant $n \in N$. Il est immédiat que $v_{n'} = n' = \sigma(n)$. Par ailleurs, si $n \in A$, alors $n' \in A$ (car A est une chaîne), d'où les égalités $u_{n'} = Id(n') = n' = \sigma(n)$; si cette fois $n \notin A$, alors $n' \notin A$ (sinon la partie $A \amalg \{n\}$ serait une chaîne strictement plus grande), d'où les égalités $u_{n'} = \sigma(n') = \sigma(u_n)$, ce qui conclut.

N **vérifie le théorème de récurrence.** Rappelons ce schéma de théorèmes : *pour tout prédicat* P *singulaire, on a l'implication*

$$(P_o \wedge [\forall n \in N,\ P_n \implies P_{n'}]) \implies (\forall n \in N,\ P_n).$$

Considérons un prédicat P vérifiant la conjonction ci-dessus. Suivons Dedekind (théorème 80). La partie $\{n \in N\ ;\ P_n\}$ est par hypothèse une chaîne, donc contient la chaîne minimale N, ce qui conclut.

182. *remplacement* donne *paire*, les objets $\emptyset$ et $\mathfrak{P}(\emptyset)$ étant distincts puisque le second n'est pas vide (il contient $\emptyset$)
183. l'idée est de garder la même relation de récurrence, la même condition initiale mais de changer de "condition initiale" en dehors de A (*i. e.* dans la zone hors d'atteinte de la relation de récurrence) en décalant tous les éléments hors de A

Tout élément autre que le départ est successeur. Montrons par récurrence (théorème 78)

$$\forall n \in N,\ n \neq o \implies \exists a \in N,\ n = a'.$$

L'initialisation s'écrit "$o \neq o \implies \exists ...$", ce qui est de la forme "*faux implique [whatever]*" et est donc tautologique Soit ensuite un $n \in N$. On veut montrer l'implication "$n' \neq o \implies \exists a,\ n' = a'$", qui est de la forme "*[whatever] implique vrai*" (prendre $a := n$), donc vraie.

Une pause.

Donnons une autre démonstration du fait que o n'est pas successeur, laquelle nous servira d'inspiration pour montrer l'injectivité de σ.

Soit m (comme "moins un") un antécédent de o. L'idée est de "perturber" la boucle des itérés en insérant un élément étranger entre m et o, élément qui perturberait l'itération sans pourtant être visible dans les hypothèses de #126. Le diagramme suivant pourra nous guider :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mu & \longrightarrow & \longrightarrow & o & \longrightarrow & o' & \longrightarrow & \cdots \\ \uparrow & f & & \uparrow & & \sigma & & \downarrow \\ & \nwarrow & \longleftarrow & m & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Soit μ un objet hors[184] de N et notons $\overline{N} := N \amalg \{\mu\}$. On définit une application f stabilisant $\overline{N}$ qui agit sur $N \setminus \{m\}$ comme σ et qui agit ailleurs comme $m \mapsto \mu \mapsto o$. Soit a la suite à valeurs dans $\overline{N}$ de départ o et de pas f donnée par #126. Montrons $\forall n \in N,\ a_n = n$ par récurrence : l'égalité $a_m = m$ nous mènera alors droit à la contradiction suivant les égalités et appartenance

$$\mu = f(m) = f(a_m) = a_{m'} = a_0 = o \in N.$$

L'initialisation $a_o = o$ traduit le départ choisi pour a. Soit maintenant $n \in N$ tel que $a_n = n$. Si $n = m$, on a alors $a_{n'} = a_{m'} = a_o = o = m' = n'$. Dans le cas contraire, f agit sur n comme σ, d'où $a_{n'} = f(a_n) = f(n) = \sigma(n) = n'$, ce qui conclut.

Pour montrer l'injectivité de σ, nous allons reprendre l'idée ci-dessus :

perturber l'itération suivant une boucle.

Toutefois, l'orbite que nous avions en forme de "0" (une boucle) va devenir en forme de "∂", il va pousser un "segment initial" à la boucle que nous allons perturber (dans le schéma suivant, m est un élément de la boucle qui a même image O qu'un élément μ hors de cette boucle) :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} o & \longrightarrow & o' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & \longrightarrow & O & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & \uparrow & f & & \uparrow & & \sigma & & \downarrow \\ & & & & & & & \nwarrow & \longleftarrow & m & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots \end{array}.$$

Tout va marcher à l'identique, sauf quand il faudra préciser en quel sens μ vient *avant* m, ce qui fait l'objet du **lemme de comparaison** ci-après, que nous démontrons à l'aide d'une forme *forte* de récurrence. N'ayant cependant pas défini de relation d'ordre sur N (on pourrait suivre le § 7 de Dedekind mais ce dernier utilise naturellement l'injectivité que nous souhaitons établir), nous allons construire un analogue des segments entiers $[0, n]$ et formuler une récurrence forte à l'aide de ces derniers. La récurrence forte nous servira par ailleurs dans la preuve de l'injectivité de σ.

Reprise.

N **possède une suite de segments initiaux.** Montrons l'existence d'une suite (S_n) de parties de N telle[185] que

$$S_0 = \{o\} \quad \text{et} \quad \forall n \in N,\ o n \in S_n \quad \text{et}\ \forall n \in N,\ S_{n'} = S_n \cup \{n'\}.$$

184. on peut s'inspirer du paradoxe de Russell pour affirmer que la partie $\{n \in N\ ;\ n \notin n\}$ fait sens et est un tel objet

185. La croissance d'une telle suite n'a *a priori* aucune raison d'être stricte. On comparera par ailleurs les propriété des segments S_n avec la définition des parties $Z_n := N \setminus \langle n' \rangle$ de la définition 98.

Notons f l'application[186] $\left\{\begin{array}{ccc} \mathfrak{P}(N) & \longmapsto & \mathfrak{P}(N) \\ A & \mapsto & \{o\}\cup\sigma(A) \end{array}\right.$. Le #126 nous donne une suite (S_n) de départ $\{o\}$ et de pas f. Montrons $\forall n\in N,\ S_{n'}=S_n\cup\{n'\}$ par récurrence. L'initialisation vient des égalités

$$S_{o'}=f(S_o)=\{o\}\cup\sigma(S_0)=S_0\cup\sigma(\{o\})=S_0\cup\{\sigma(o)\}=S_0\cup\{o'\}.$$

On a par ailleurs, étant donné un $n\in N$ tel que $S_{n'}=S_n\cup\{n'\}$, les égalités

$$\begin{array}{rcl} S_{n''} & = & f(S_{n'})=\{o\}\cup\sigma(S_{n'})=\{o\}\cup\sigma(S_n\cup\{n'\})=\{o\}\cup\underline{\sigma(S_n)\cup\sigma(\{n'\})} \\ & = & \underline{\{o\}\cup\sigma(S_n)}\cup\sigma(\{n'\})=f(S_n)\cup\{\sigma(n')\}=S_{n'}\cup\{n''\}, \text{ ce qui conclut la récurrence.} \end{array}$$

L'appartenance $o\in S_n$ est immédiate par récurrence vu les inclusions $S_n\subset S_{n'}$. Vu par ailleurs les appartenances $n'\in S_n\cup\{n'\}\subset S_{n'}$, tout élément a qui est un successeur vérifie $a\in S_a$, appartenance qui reste valide lorsque $a=o$ vu le choix de S_o (seul endroit où S_o intervient).

N **vérifie le théorème de récurrence forte.** Soit P un prédicat singulaire. Montrons l'implication

$$P_o\wedge[\forall n\in N,\ (\forall s\in S_n,\ P_s)\Longrightarrow P_{n'}]\Longrightarrow[\forall n\in N,\ P_n]$$

Notons $\mathfrak{P}_a$ le prédicat $\forall s\in S_a,\ P_s$ (d'argument a). Remarquer pour chaque $n\in N$ l'implication $\mathfrak{P}_n\Longrightarrow P_n$ (vu l'appartenance $n\in S_n$). Supposons la conjonction ci-dessus. Montrons $\forall n\in N,\ \mathfrak{P}_n$ par récurrence, d'où il viendra la conclusion $\forall n\in N,\ P_n$ attendue. L'initialisation $\mathfrak{P}_o$ s'écrit $\forall s\in S_o,\ P_s$, *i. e.* $\forall s\in\{o\},\ P_s$, ou encore P_o, ce qui est un conjoint de l'hypothèse. Soit maintenant $n\in N$ tel que $\mathfrak{P}_n$. Par l'autre conjoint, on obtient $P_{n'}$; comme le prédicat P est (d'après $\mathfrak{P}_n$) vérifié sur S_n, il l'est sur $S_n\cup\{n'\}=S_{n'}$, ce qui conclut à $\mathfrak{P}_{n'}$.

Un lemme de comparaison. Vu – chez les naturels – la visée $S_n=[0,n]$, on pourrait (mais on ne le fera pas) définir $a\leq b$ par $S_a\subset S_b$. Nous allons montrer l'analogue du caractère total de $\leq$, à savoir

$$\forall a,b\in N,\ [a\in S_b \text{ ou } b\in S_a].$$

Soit $a\in N$.

Montrons les implications[187] $\forall n\in N,\ S_a\subsetneq S_n\Longrightarrow S_{a'}\subset S_n$. Soit $n\in N$ tel que $S_a\subsetneq S_n$. Alors $a\neq n$ (sinon l'inclusion précédente serait une égalité), *i. e.* $a\notin\{n\}$, d'où l'appartenance $a\in S_a\setminus\{n\}\subset S_n\setminus\{n\}$. Si n était sucesseur, mettons d'un certain m, cette dernière différence se réécrirait $S_{m'}\setminus\{m'\}\subset S_m$, d'où l'appartenance $\sigma(a)\in\sigma(S_m)\subset f(S_m)=S_{m'}=S_n$, *i. e.* $\{a'\}\subset S_n$, d'où l'inclusion $S_{a'}=\{a'\}\cup S_a\subset S_n\cup S_n$ et la conclusion. Dans le cas contraire, *i. e.* quand $n=o$, la partie S_a serait alors strictement incluse dans le singleton $S_0=\{o\}$, donc serait vide – or elle contient a, d'où la contradiction.

Montrons à présent les disjonctions $\forall n\in N,\ [S_a\subset S_n \text{ ou } S_n\subset S_a]$ par récurrence sur n. L'inclusion (connue) $\{o\}\subset S_a$ est un disjoint de l'initialisation, validant cette dernière. Soit maintenant $n\in N$ tel que $S_a\subset S_n$ ou $S_n\subset S_a$. Dans le premier cas, on a immédiatement $S_a\subset S_{n'}$: sinon, le deuxième cas donne une inclusion *stricte* $S_n\subsetneq S_a$, d'où l'inclusion $S_{n'}\subset S_a$ d'après le paragraphe précédent, ce qui conclut la récurrence.

Pour conclure, il suffit de coupler les appartenances $a\in S_a$ et $b\in S_b$ à l'une des inclusions $S_a\subset S_b$ ou $S_b\subset S_a$.

σ **est injective.** Soient par l'absurde m et μ distincts dans N ayant même successeur. Quitte à échanger les rôles, on peut supposer d'après le lemme $\mu\in S_m$ (*i. e.* que μ vient "avant" m). Définissons une application f : $N\longrightarrow N$ qui envoie m sur μ et qui agit ailleurs comme σ :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} o & \xrightarrow{\sigma} & o' & \xrightarrow{\sigma} & \cdots & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & \xrightarrow{\sigma} & \mu'=m' & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & & & \uparrow & f & & \uparrow & & \sigma & & \downarrow \\ & & & & & & & \nwarrow & \longleftarrow & m & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots \end{array}.$$

Soit a la suite à valeurs dans N de départ o et de pas f donnée par #126. Montrons $\forall n\in N,\ a_n=n$ par récurrence forte : les deux égalités résultantes pour $n\in\{m,\mu\}$ nous mèneront alors, avec celle $m'=\mu'$, droit à la contradiction suivant les égalités

$$\left\{\begin{array}{c} a_{m'}=f(a_m)=f(m)=\mu \\ a_{\mu'}=f(a_\mu)=f(\mu)=\mu' \end{array}\right. \qquad (\mu \text{ ne pouvant être fixé par } \sigma).$$

186. pour rajouter un élément "au bout", on décale tout le monde et on rajoute le premier élément décalé à l'autre bout
187. analogue chez les naturels de l'implication $a<b\Longrightarrow a+1\leq b$

L'initialisation $a_o = o$ traduit le départ choisi pour a. Soit maintenant $n \in N$ tel que $\forall s \in S_n,\ a_s = s$. Si $n = m$, puisque $\mu \in S_m$, on peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence forte et affirmer[188] $a_\mu = \mu$, d'où l'on tire

$$a_{n'} = a_{m'} = a_{\mu'} = f(a_\mu) = f(\mu) = \mu' = m' = n'.$$

Sinon, on a directement $a_{n'} = f(a_n) = f(n) \overset{n \neq m}{=} \sigma(n) = n'$, ce qui conclut.

4.3 Conclusion

Nous espérons avoir convaincu que l'*itération* est au fondement de l'arithmétique peanienne et, partant, que les nombres ne sont au fond qu'une forme discrète de la potentialité par laquelle nous *agissons* dans notre vie.

188. C'est pour *cette seule égalité* qu'ont été développés les points précédents de cette section

5 Bibliographie

[Berg1889] Henri BERGSON *Essai sur les données immédiates de la conscience*, éd° PUF (2011), coll. Quadrige, édition critique *Le choc Bergson* sous la direction de Frédéric WORMS

[Berg1907] Henri BERGSON *L'évolution créatrice*, éd° PUF (2007), coll. Quadrige, édition critique *Le choc Bergson* sous la direction de Frédéric WORMS

[Bern1865] Claude BERNARD *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*, éd° Garnier Flammarion (1966)

[Bern1947] Claude BERNARD *Principes de la médecine expérimentale*, éd° PUF (2008), coll. Quadrige

[Biès1982] Jean BIÈS *Passeports pour des temps nouveaux*, éd° Dervy-Livres, coll. Histoire et Tradition

[Cang1943] Georges CANGUILHEM *Le normal et le pathologique*, 2de éd° augmentée (1966), éd° PUF (2010), coll. Quadrige

[Cava1938] Jean CAVAILLÈS *Méthode axiomatique et formalisme – Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, éd° Hermann, librairie scientifique

[Cave2001] Maurice CAVEING *Le problème de l'objet dans la pensée mathématique*, éd° Vrin (2004), coll. Problèmes & Controverse

[ChaCon1989] Jean-Pierre CHANGEUX, Alain CONNES *Matière à penser*, éd° Odile Jacob

[Dede1854-99] Richard DEDEKIND *la création des nombres*, éd° Vrin, 2008

[Detl1986] Michael DETLEFSEN *Hilbert's program*, **Synthese library**, vol. 182, studies in epistemology, logic, methodology, and philosophy of science

[Dieu1987] Jean DIEUDONNÉ *Pour l'honneur de l'esprit humain*, éd° Hachette, coll° Pluriel

[Duhe1906] Pierre DUHEM *La théorie physique – Son objet, sa structure*, éd° Vrin (2007), Bibliothèque des textes philosophiques

[Duhe1912] Pierre DUHEM *La nature du raisonnement mathématique*, **Revue de Philosophie**, 21, p. 531-543 (1912)

[Fefe1990] Solomon FEFERMAN (editor–in-chief) *Kurt Gödel – collected works – volume II*, prepared under the auspices of the Association for Symbolic Logic, Oxford University Press

[Freg1882-1923] Gottlob FREGE *Écrits logiques et philosophiques*, trad. et introduction de Claude IMBERT, éd° Seuil, coll. Points Essais (1971)

[GanSma2013] *Philosophie des mathématiques – Ontologie, vérité et fondements* textes réunis par S. GANDON et I. SMADJA, éd° Vrin, 2013, coll. textes clef

[Gons1926] Ferdinand GONSETH *Les fondements des mathématiques*, éd° Albert Blanchard (1974), 1926

[Gons1936] Ferdinand GONSETH *Les mathématiques et la réalité – Essai sur la méthode axiomatique*, éd° Félix Alcan, 1936

[Gons1937] Ferdinand GONSETH *Qu'est-ce que la logique ?*, éd° Hermann, coll. actualités scientifiques et industrielles, 1937

[Gons1945-55] Ferdinand GONSETH *La géométrie et le problème de l'espace*, éd° du griffon, coll. bibliothèque scientifique, 1945-1955

[Good1953] Nelson GOODMAN *Fact, Fiction and Forecast*, Special Lectures in Philosophy delivered at the University of London, éd° Harvard University Press (1983, 4th ed°)

[Hahn1935] Hans HAHN *Logiques, mathématiques et connaissance de la réalité*, éd° Hermann (1935), coll. actualités scientifiques et industrielles, 1932

[Hein2013] Gerhard HEINZMANN *L'intuition épistémique*, éd° Vrin, coll. Mathesis, 2013

[Helm1887] Hermann von HELMHOLTZ *numbering and measuring – from an epistemological viewpoint*, **Boston studies in the philosophy of science**, vol. XXXVII, ed. Robert S. Cohen & Mark W. Wartofsky (1977), trad. Malcom F. LOWE

[Hume1748] David HUME *An enquiry concerning human understanding*, éd° Vrin bilingue (2008), Bibliothèque des textes philosophiques, trad. et introduction par Michel MALHERBE

[Laka1964] Imre LAKATOS *Preuves et réfutations – essai sur la logique de la découverte mathématique*, éd° Hermann, coll. actualités scientifiques et industrielles, trad. française (1984), original *Proofs and Refutations*, ed. Cambridge University Press (1976)

[Larg1992] (coll.) Jean LARGEAULT *intuitionisme et théorie de la démonstration*, éd° Vrin, coll. Mathesis, 1992

[Mayb2000] John P. MAYBERRY *The foundations of mathematics in the theory of sets*, Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and its Applications (ed. by G.-C. ROTA)

[Milh1898] Gaston MILHAUD *Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique*, éd° Félix Alcan (2e éd°), 1898, réimpression BnF & Hachette Livres

[PanSer2013] Marco PANZA, Andrea SERENI *Plato's problem – an introduction to mathematical platonism*, published by Palgrave Macmillan

[Patr2001] Frédéric PATRAS *La pensée mathématique contemporaine*, éd° PUF, coll° Science, histoire et société

[Poin1902] Henri POINCARÉ *La science et l'hypothèse*, éd° Flammarion (1968), coll. Champs sciences

[Poin1905] Henri POINCARÉ *La valeur de la science*,éd° Flammarion (1970), coll. Champs sciences

[Praw1977] Dag PRAWITZ *Meaning and proofs : on the conflict between classical and intuitionistic logic*, **Theoria**, vol. 43, no. 1 (1977), p. 2-40

[Quin1980] Willam Von Orman QUINE *From a logical point of view*, traduit sous la direction de Sandra LAUGIER, éd° Vrin (2003), bibliothèque des textes philosophiques

[RivRou1990] (dir.) François RIVENC, Philippe DE ROUILHAN *Logique et fondements des mathématiques*, Anthologie (1850 - 1914), éd° Payot (Bibliohtèque scientifique)

[Russ1917] Bertand RUSSELL *Mysticism and Logic*, éd° double day anchor, 1917

[Russ1940] Bertrand RUSSELL *An Inquiry into Meaning and Truth*, éd° Spokesman (2007)

[Schr1956] Erwin SCHRÖDINGER *L'esprit et la matière*, trad. et notes par Michel BITBOL, éd° du Seuil (1990), coll. Points Sciences (*Tarner Lectures*, Cambridge, oct. 1956)

[Schr1948] Erwin SCHRÖDINGER *La nature et les Grecs*, cours donnés à University College (Londres) les 24, 26, 28 et 31 mai 1948, trad. de l'anglais et notes par Michel BITBOL et Annie BITBOL-HERSPÉRIÈS, éd° Les Belles Lettres (2014), coll. L'Âne d'Or

[Schw1997] Laurent SCHWARTZ *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, éd° Odile Jacob

[Thur1994] William THURSTON *On proof and progress in mathematics*, arXiv :amth/9404236v1 (**Bulletin of the American Mathematical Society**, Volume 30, Number 2, April 1994, Pages 161-17)

[Tsud1973] Itsuo TSUDA *Le Non-faire*, éd° Le Courrier du Livre (1973)

[Tsud1975] Itsuo TSUDA *La Voie du dépouillement*, éd° Le Courrier du Livre (1975)

[Tsud1979] Itsuo TSUDA *Le dialogue du silence*, éd° Le Courrier du Livre (1979)

[Tsud1983] Itsuo TSUDA *Face à la Science*, éd° Le Courrier du Livre (1983)

[Weyl1926] Hermann WEYL *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, trad. de l'allemand par Olaf HELMER, introd. Franck WILCZEK, éd° Princeton University Press (1949, 2009)

[Witt1922] Ludwig WITTGENSTEIN *Tractacus logico-philosophicus*, trad. Gilles-Gaston GRANGER, éd° Gallimard (1993), coll. TEL

[Witt1930] Ludwig WITTGENSTEIN *Remarques philosophiques*, éd° posthume par Rush RHEES (Basil Blackwell, Oxford, 1964), trad. Jacques FAUVE, éd° Gallimard (1975), coll. tel

[Witt1939] Ludwig WITTGENSTEIN *Cours sur les fondements des mathématiques*, établis par Cora DIAMOND (1975, 1976), éd° TER (1995), coll. bilingue

[Witt1937-44] Ludwig WITTGENSTEIN *Remarques sur les fondements des mathématiques*, éd° posthume par G. E. M. ANSCOBE, Rush RHEES et G. H. WRIGHT, trad. Marie-Anne LESCOURRET, éd° Gallimard (2006), bibliothèque de philosophie, éd° originale Basil Blackwell Oxfrod (1956)

[Witt1949-51] Ludwig WITTGENSTEIN *De la certitude*, trad. Danièle MOYAL-SHARROCK, éd° Gallimard (2006), bibliothèque de philosophie, éd° originale Blackwell Publishers Ltd. (1969)

Références mentionnées mais non directement citées :

[Cang1952] Georges CANGUILHEM *La connaissance de la vie*, éd° Vrin (2009), Bibliothèque des textes philosophiques

[Detl1992] Michael DETLEFSEN (éd.) *Proof and knowledge in mathematics*, éd° Routledge, 1992

[Duhe1908] Pierre Duhem *Sauver les apparences : Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée*, éd° Vrin (2003), Bibliothèque des textes philosophiques

[PanPon1992] Marco Panza, Jean-Claude Pont (dir.) *Espace et horizon de réalité, Philosophie mathématique de Ferdinand Gonseth*, éd° Masson, Paris, 1992

[Soul1999] Tarik Belhaj Soulami *Les olympiades de mathématiques – Réflexes et stratégies*, éd° ellipses

[Wasz2013] David Waszek *Le « pourquoi » en mathématiques*, **mémoire de M2**, université Paris I, 2013