Les ambigüités du formalisme

Jean-Louis GARDIÈS

1993

Revue de la France et de l'Étranger, T. 183, No. 3, Épicure le formalisme (Juil.-Sept. 1993), p. 551-574

556-561 FORMALISME CONTENTUEL DE DESCARTES : UNE AIDE À LA PENSÉE (PAR SUBSTITUTION)

Descartes veille à ce qu'aucune effectuation d'opération ne vienne masquer le fait qu'un segment de droite ne se donne comme somme ou différence que de segments, un produit de *n* segments, à moins bien sûr qu'il ne faille tenir compte de la présence du signe de racine carrée ou cubique derrière lequel les lettres en question apparaissent ou de celle de quelque dénominateur qui oblige à diviser. Aussi longtemps que Descartes raisonne en toute généralité et qu'il ne s'agit pas pour lui de donner un simple exemple, qui amènerait à effectuer certaines opérations, comme cela lui arrive au cours du livre II, il s'astreint à une telle discipline, que pourtant la tradition algébrique après lui ne retiendra pas ; et il le fait pour cette raison, à ses yeux fondamentale, qu'il importe de garder présents à l'attention, d'un bout à l'autre de ses démonstrations, tous les éléments initialement constitutifs de problème.

[…]

D'une manière qui peut paraître au contemporain paradoxale, la notation algébrique n'est […] nullement chez Descartes un moyen de calcul mécanique qui nous dispenserait de penser ; elle est au contraire au service de l'intuition, permettant à celle-ci de ne rien perdre des éléments précédemment introduits dans le discours et qu'on doit retrouver tels quels dans la solution. […] L'algèbre cartésienne est un discours où l'on sait toujours, c'est-à-dire *où l'on garde toujours l'intuition de*, tout ce dont on parle.

[…]

Le *formalisme*, si l'on peut employer ce mot, est ici un moyen de faire que l'intuition surmonte l'essentielle successivité du discours phonétique ; sa fonction est de **maintenir présent à la conscience ce qui sans lui**, à défaut de l'exceptionnel effort d'attention que requéraient déjà certains développements des mathématiques grecques, **finirait par s'effacer**. **Le signe**, loin de prétendre à son autonomie et de se détacher de ce qu'il signifie, **a pour fin de garantir à la démarche analytique la continuation de sa nécessaire omniscience**.

[…]

si ce qu'on appelle *formalisme* enveloppe d'abord un moyen d'étendre le pouvoir de l'intuition au-delà des limites que lui imposait le discours phonétique, il peut être aussi un moyen de réduire le champ de cette intuition, dans la mesure où il permet de substituer sous certaines conditions aux raisonnements sur les choses elles-mêmes de simples opérations sur les signes.

[…]

Le formalisme permet en effet de soulager l'attention de toute une série de raisonnements indispensables, mais dont la forme a été si clairement reconnue qu'on a su les réduire en règle d'opération sur les signes, qui nous dispensent ainsi d'en encombrer notre pensée et nous autorisent à la concentrer sur le reste. Cette **réduction de raisonnements à des opérations** a permis le développement successif des machines, depuis les machines à calculer de Schickard, Pascal ou Leibniz jusqu'aux modernes ordinateurs. Mais ceci tient simplement à ce que, si le mathématicien ou le logicien a parfaitement su analyser telle démarche intellectuelle, la porte est ouverte à la mise au point d'un équivalent technique, c'est-à-dire qu'il devient parfois, sinon facile, du moins possible, d'imaginer une procédure algorithmique, mécanique, électronique..., au terme de laquelle, nous fiant à un certain code, nous pourrons lire la conséquence inférée. La formalisation ainsi entendu ne peut libérer l'attention de la préoccupation de ce qui est déjà bien connu que parce qu'elle présuppose, non pas nécessairement chez son utilisateur, mais au moins chez son initiateur, une totale ou presque totale compréhension du cheminement rationnel auquel elle se substitue.

561 / 565-566 FORMALISME PUR DE LEIBNIZ : DÉPASSE LE CONTENTUEL DE DESCARTES

à la différence de Descartes, Leibniz […] va jusqu'à reconnaître aux imaginaires une certaine indépendance relativement à toute objet :

> Ces expressions, écrit-il, ont ceci d'admirable que dans le calcul elles n'enveloppent rien d'absurde ou de contradictoire, quoiqu'on ne puisse rien montrer de tel dans la nature, c'est-à-dire dans les réalités concrètes.

[…]

Ainsi la pratique mathématique de Leibniz l'amenait-elle à la constatation surprenant que les règles constitutives de l'algèbre cartésienne restaient efficaces au-delà des limites de l'ensemble des réels, à l'extérieur desquels l'intuition ne semblait plus pourtant pouvoir exercer son contrôle. Le calcul, conçu pour laisser l'intuition se reposer, se libérer afin de se porter au-delà, s'avérait plus puissant que l'objet mathématique au service duquel il avait été élaboré. Ceci permettait par exemple à une démonstration d'emprunter des voies dans lesquelles l'intuition ne pouvait pas la suivre. On pouvait même, par ces voies essentiellement opaques, établir certains résultats valables pour l'ensemble des réels, à la condition de réussir à éliminer dans le résultat final ces quantités imaginaires à l'évocation desquelles la démonstration elle-même avait pu recourir.

On peut voir dans cette expérience une des origines du thème leibnizien, et foncièrement anti-cartésien, des *pensées aveugles*. Elle semblait en effet montrer qu'il pouvait y avoir une utilisation, un fonctionnement légitime de pensées ou de quasi-pensées auxquelles notre intuition était incapable d'assigner un objet. Un tel usage algébrique des imaginaires ne consistait même plus à substituer aux raisonnements sur les choses des opérations sur les signes, mais apparemment à se permettre de procéder à des opérations sur les signes là où il eût été impossible de raisonner sur des choses. L'expérience qu'avait faite Leibniz était assez impressionnante, non seulement pour atteindre l'intuitionnisme de la philosophie cartésienne, mais même pour influencer la pratique des mathématiciens. […]

Longtemps les analystes, dans l'impossibilité d'écarter la présence continuelles des quantités négatives ou imaginaires dans les résultats du calcul et de se passer des services essentiels que l'usage de ces symboles pouvait leur rendre, se résignèrent à les employer, sans se rendre compte de leur nature, en les considérant comme des signes d'opérations qui n'avaient aucun sens par eux-mêmes, mais qui, soumis à certaines règles, conduisaient par une voie courte et sûre, mais obscure et mystérieuse, aux résultats que l'on n'aurait pu atteindre, par le seul emploi des quantités proprement dites, sans se condamner à de longs et pénibles détours et sans multiplier à l'infini le nombre des cas particuliers à discuter.

567-569 PENSÉES AVEUGLES

Il n'est [...] pas exclu que le formalisme puisse devancer l'intuition rationnelle et suggérer ce dont celle-ci ne s'était pas encore avisée. Encore faut-il reconnaître que cette avance ne se trouvera mathématiquement justifiée que le jour où l'intuition aura rattrapée le formalisme, où elle sera capable, dans notre premier exemple, de penser les nombres imaginaires et plus généralement les nombres complexe, où notre pensée aura à cet égard cessé d'être *aveugle*, et, dans notre second exemple, le jour où elle sera capable de justifier la distributivité par un raisonnement qui évoquera les 2^n sous-ensembles possibles résultant de la considération des n ensembles, si l'on se place dans une *algèbre des classes*, ou les 2^n lignes résultant de la considération de n propositions, si l'on se place dans le cadre d'un *calcul des propositions*.

Toute réflexion faite, il ne semble donc pas que nous ayons à modifier notre interprétation de ce que nous avons appelé la deuxième fonction du formalisme, laquelle, rappelons-le, consiste, une fois qu'un mode de raisonnement est parfaitement reconnu, à substituer à ce raisonnement sur les choses des opérations sur les signes. S'il se trouve qu'en fait, au lieu d'une telle substitution, on ait parfois procédé à la mise en place de moyens calculatoires avant que le raisonnement correspondant ait été lui-même parfaitement constitué, compris et dominé, on peut légitimement considérer que la démarche mathématique ne sera pleinement achevée qu'un fois que, pour reprendre une formule de Dirichlet, les pensées auront rattrapé les calculs, que lorsqu'on saura, par exemple, ce qu'est un *nombre complexe* ou ce qu'est une *limite*, et qu'on sera capable de les définir. En droit, les calculs doivent procéder des pensées, ils les présupposent donc ; ainsi peuvent-il contribuer ensuite à ce repos de la pensée, qui permet à celle-ci de se porter plus loin, sans que l'*eidos* de la démonstration mathématique, et que nous l'avons hérité de la tradition grecque, se trouve substantiellement altéré.

[…]

« J'appelle, concluait Leibniz, une telle pensée *aveugle* ou encore *symbolique*, et nous nous en servons en algèbre et en arithmétique, plus encore presque partout. »

[*commentaire nôtre* : osons dire que la pense *émerge* de la pratique symbolique !]

572 CONCEPTS « FORMELS »

Quelle que soit [la catégorie sémantique] à laquelle ressortissent les concepts, c'est sur eux que le mathématicien raisonne, même si cette catégorie sémantique est parfois loin de lui être totalement transparente, même si, en outre, les signes peuvent lui servir de repères pour se retrouver dans la diversité des concepts, même si surtout, comme nous l'avons vu, il peut de temps à autre opérer sur certains signes pour reposer son attention et la reporter plus loin.

[…] enfin on ne rencontre dans la rue ni les corps, ni les anneaux, ni les groupes, ni les nombres complexes, ni les réels, ni les rationnels, ni les relatifs, ni les relatifs, ni même, un peu plus près pourtant des *substances premières*, les modestes entiers naturels. Qualifier telle de ces entités de *formelle* se réduit à constater que l'élaboration à laquelle a procédé celui qui en parle en connaissance de cause nous éloigne à ce point des substances premières, que, même si le mathématicien authentique est capable de s'y retrouver, le profane qui l'écoute ou l'élève qu'il essaie d'initier à sa science est souvent à leur endroit dans un brouillard tel qu'il est tenté de se raccrocher aux seuls symboles dont on les désigne.

573 RÉSUMÉ

1) Il y a d'abord dans ce qu'on appelle *formalisme*, comme l'a vu Descartes, un moyen d'étendre le pouvoir de l'intuition au delà des limites propres à la successivité du discours phonétique.

2) Mais le formalisme peut consister aussi en la substitution d'algorithmes opératoires aux démarches rationnelle, qui présuppose, au moins en droit, qu'on ait parfaitement reconnu et analysée celles-ci ; car, si l'histoire des mathématiques nous fournit des exemples où cette substitution s'est opérée bien avant que ne fût obtenue cette parfaite analyse, la légitimité de cette substitution présuppose l'achèvement de cette analyse.

[*commentaire nôtre* : même si l'analyse doit passer par le *symbolisme*]

3) Les objets du discours mathématique ont des types d'existence qui peuvent devenir extrêmement complexes et fort éloignés de celui de la plupart des objets du discours ordinaire ; peut-être est-ce un accroissement de la distance de leur type d'existence à celui des *substances premières* qui les fait parfois qualifier de *formels*, à moins que l'incertitude du profane sur leur statut n'incite à confondre leur mode d'existence avec celui des symboles dont on les désigne.

[…]

le retour tardif des idéogrammes […] [a permis] […] de rapprocher ou réunir ce que le flux du temps a dispersé […]. C'est sans doute pourquoi la lecture d'auteurs comme Archimède ou Apollonuis nous est devenue si difficile : aucune oasis de *formalisme* ne s'offre pour s'y reposer de la tension constante d'un raisonnement dont il faut garder présents à l'esprit tous les tenants et aboutissants.