Méthode axiomatique et formalisme

–

Essai sur le problème du fondement des mathématiques

Jean Cavaillès

1938

éd° Hermann
librairie scientifique

76-80 / 88-90 La méthode axiomatique

malgré la haute valeur pédagogique et heuristique de la méthode génétique, la méthode axiomatique est préférable pour une représentation définitive et un complet affermissement logique du contenu de notre connaissance [cité de *Über den Zahlbegriff* de Hilbert (1900)]

[…]

Ce n'est que par un préjugé réaliste que nous nous préoccupons d'objets alors que seul importe, dans la succession de nos affirmations, ce qui régit cette succession, savoir le travail intellectuel effectif.

[…]

Manifestant l'unité organique d'une théorie non d'après les objets — construits — dont elle peut s'occuper, mais par l'unité opératoire d'un certain procédé intellectuel, [la méthode axiomatique] provoque à la fois regroupement des disciplines entre elles, redistribution de l'économie intérieure d'une discipline.

[…]

De rapprochements inattendus se produisent — évitant des transpositions fastidieuses — comme entre la théorie de la mesure Lebesgue et le calcul des probabilités. Enfin sont éliminées ces reconstructions fâcheuses par lesquelles une théorie est contrainte de subir la méthode d'une autre qui complique et masque ses enchaînements propres : représentation des points d'un plan euclidien ou des nombres complexes par des couples de nombres réels.

Mais si féconde soit-elle, si intimement unie avec la pensée mathématique véritable, la méthode axiomatique peut-elle la fonder ? En tant que caractéristiques d'un procédé opératoire, les axiomes d'un système ne font que le décrire.

[…]

Pour Hilbert, l'autorité d'un système d'axiomes, relative cette fois à la théorie dont il constitue l'indispensable préface, est fondée sur trois caractères : *non contradiction*, *indépendance* des axiomes entre eux, *saturation*. Leur mode d'établissement seul leur peut donner un sens ; on voit toutefois que le premier fournit l'étoffe logique des deux autres : un axiome est indépendant des autres si le système formé de deux-ci et de sa négation est non contradictoire ; un système est saturé si l'adjonction de tout nouvel axiome, indépendant de ceux précédemment posés le rend contradictoire.

[...]

l'axiomatisation se réfère […] doublement à un donné : extérieurement, donné du système auquel elle emprunte ses concepts ; intérieurement, donné d'une unité opératoire qu'elle ne fait que caractériser.

[…]

On pourrait […] faire de chaque théorie un système hypothético-déductif, rassemblement arbitraire de propositions non contradictoires entre elles. Mais le problème du fondement des mathématiques est justement que l'on en puisse déduire quelque chose. […] Il doit y avoir un sens commun aux axiomes rassemblés qui permette le raisonnement, sans quoi l'on tombe, avec des propositions complètement indépendantes (c'est-à-dire indépendantes dans les deux acceptions), dans la difficulté de la combinatoire leibnitienne des notions simples : on ne déduit pas, on ne fait que juxtaposer, en nombre d'ailleurs déterminable à l'avance, des combinaisons.

[…]

La notion de démonstration ne peut être précisée que par un canon, un canon n'est possible que dans un formalisme. L'élément commun à logique et à mathématique, le signe, doit dominer : l'axiomatisation s'achève nécessairement en formalisation.

91-95 / 97-100 Formalisme hilbertien

la mathématique est plus que la logique, en tant qu'elle est pensée effective, et que toute pensée effective suppose application de la pensée abstraite à une intuition. La logique n'est donc que la partie commune aux diverses activités scientifiques qui la dépassent également de la même façon. « Telle est la position philosophique que j'estime nécessaire en présence de la mathématique comme, en général, de toute effort pour penser, comprendre, exprimer ; l'abandonner serait nier toute activité intellectuelle. » [cité de *Neubegründung der Mathematik* de HILBERT (1922)]

[…]

La différence avec KANT est qu'il n'y a pas de pensée logique pure, la logique n'est qu'un constituant, non isolable de toute pensé fonctionnant véritablement. […] Si la logique disparaît comme discipline autonome, on ne peut plus définir que négativement son rôle par élimination de celui des intuitions concrètes, garanties à la fois de la fécondité et de la sûreté des raisonnements. [parallèle avec la logique de GONSETH comme physique de l'objet quelconque ?]

[…]

« les signes arithmétiques sont des figures écrites, les figures géométriques des formules dessinées, et il serait aussi impossible à un mathématicien de s'en passer que d'ignorer les parenthèses en écrivant ». Cette homogénéité rétablie entre formules et figures permet de considérer comme intuitive la mathématique des algébristes et, en général, des tenants d'une abstraction qui ne saurait exister.

[…]

L'essence même de la mathématique est jeu réglé de symboles, ceux-ci n'étant pas un adjuvant pour la mémoire, mais définissant une sorte d'espace abstrait avec autant de dimensions qu'il y a de degrés de liberté dans l'opération concrète et imprévisible de la combinaison. C'est elle qui doit déterminer, non en fait mais en droit, « une irréductible de région de raisonnement intuitif », sans laquelle la mathématique ne serait pas : « dès l'abord d'un problème, en arithmétique exactement comme en géométrie, nous nous livrons à de rapides, inconscientes, d'ailleurs provisoires combinaisons, confiants dans un certain sentiment arithmétique pour la zone d'action des signes ». Si pensée abstraite implique nécessité, si le devenir mathématique est l'apparition d'un nouveau véritable, il faut que la création se situe dans ce sensible que représente l'espace combinatoire. C'est donc bien, comme l'entendait KANT, d'abord la fécondité que garantit le recours à l'intuitif, mais non pas en tant que résultat d'unification d'un divers par la pensée abstraite. La double liaison actif-intellectuel, sensible-passif, est ici brisée : **c'est dans l'intuition qu'apparaît l'acte libre**. Le rôle de l'intellectuel ou logique est aussi restreint que possible : simple fixation de résultats acquis ou convention adoptées, fidélité de l'esprit à ce qu'il a fait. Mais, ici encore, le sensible intervient : dans la configuration du signe, est inscrit le rappel à ses règles d'emploi, un raisonnement écrit ne peut tromper, car dans sont dessin apparaîtraient des figures exclues. Tel est le double rôle du signe, mixte, lui aussi intellectuel-sensible ; **s'il possède dans son essence une règle intellectuelle qui garantit contre l'erreur, il est condition de création par sa mobilité dans le sensible**. C'est à lui, non à l'application (Abbildung) de DEDEKIND, que la mathématique tout entière doit origine et développement : « **am Anfang, so heisst es hier, ist das Zeich** ».

Toutefois, son intervention dans la mathématique classique est soumise à l'arbitraire des problèmes : il apparaît au hasard des méthodes trouvées, et si chaque fois la règle de son emploi fixe avec précision le domaine corrélatif de pensée concrète où il doit se mouvoir, il n'y a pas de système de tous les signes avec, en regard, une intersection délimitée de toutes les régions intuitives. D'où les incertitudes des formalisme partiels, cet emploi ambigu où le signe est à la fois, ce que veut HILBERT, un point mobile dans une zone d'absolue liberté, et le représentant d'autre opérations concrètes, celles-là simplement supposées, mais dont le résultat importe pour l'usage actuel. Le retentissement sur d'autres plans de la combinaison réalisée entraîne un enchevêtrement de rapports dont l'esprit ne se sens plus maître. Il apparaît alors nécessaire de relier effectivement entre elles les diverseS opérations superposées, de reconstruire, par exemple, tout objet de l'analyse à partir de l'intuition simple du nombre entier. Tel était le point d départ de KRONECKER ; mais en suivant sa ligne de pensée on aboutit par un curieux renversement du formalisme à l'intuitionnisme avec toutes les restrictions de méthodes qu'il impose.

A cela, HILBERT ne veut pas se résoudre.

[…]

dans son progrès formel, la mathématique doit conserver chaque fois, comme cas particulier, l'étage inférieure plus concret qu'elle vient de quitter. Dans le cas du tiers exclu, l'opération intuitive est le raisonnement mathématique en général, le point de départ, l'arithmétique vulgaire finie où les objets sont des collections de barres verticales, les opérations, adjonction itérée d'une unité, leurs propriétés (associativité, distributivité, commutativité, $a + b = b + a$) des constations **expérimentales**. Dès que l'on va plus loin […] apparaît la référence à l'infini des entiers […] : impossibilité de l'application du tiers exclu. La solution est une **formalisation totale des raisonnements** dans la mathématique tout entière, grâce à la logique symbolique, « toute préparée à cet effet en vertu d'une harmonie préétablie » : il n'y aura **plus que jeu mécanique de signes**.

[…]

La métamathématique, ou théorie de la démonstration, devient la science véritable : ses objets seront les assemblages de signes ou formules, leur organisation en unités de dépendance ou théories. C'est dans le groupement de celles-ci, l'adjonction d'axiomes, l'épreuve de leurs fécondités relatives que consiste **le travail réel, capable de procurer une vérité. La pensée est d'ailleurs toujours sûre d'elle-même, puisque la peine conscience accompagne chacune de ses démarches, en nombre fini** : les exigences intuitionnistes sont ici rigoureusement satisfaites. L'arithmétique élémentaire primitive est utilisée : progrès sur le mémoire de 1904 où il était encore question de formaliser, et réponse aux objections de POINCARÉ qui voyait dans l'*intuition du nombre pur* — sur laquelle se fonde l'induction complète — un irréductible logique, recours inéliminable à la suite infinie des entiers. L'induction véritable — et devant être formalisée — qui permet d'énoncer des propositions portant sur une totalité infinie, n'a rien à voir avec l'induction utilisée en métamathématique qui procède de proche en proche et ne fait que résumer les résultats acquis que l'on pouvait reprendre individuellement. Logique et mathématique subissant un sort commun sont également réparties entre les domaines du formalisme et de l'intuition, la séparation ne s'effectue plus entre elles mais porte sur le mixte où il état vain de vouloir les isoler.

[…]

HILBERT […] voit dans les formules « des images de pensées » : en édifiant son formalisme, il ne fait que pousser à bout les méthodes et les raisonnements qui engendrent effectivement les théories, s'il n'y a pas coïncidence avec la mathématique historique (qui n'emploie pas les signes logiques, etc.), c'est que celle-ci comporte inadvertances ou raccourcis relevant d'un contingent pur : en droit, il n'y a d'autre mathématique que la formelle et son corrélat métamathématique, elles ne sont « que le protocole des règles d'après lesquelles notre entendement procède effectivement ».

104 Priorité entre signes logiques

[*footnote*] Lorsque, comme il est courant, les 4 constantes figurent dans une proposition complexe on convient, pour éviter les parenthèses, que leurs puissances d'action relatives sont déterminées par l'ordre →, ∧, ∨, ¬. Par exemple on écrira

$$a \to \neg b \wedge c \vee d \qquad \text{au lieu de} \qquad a \to [\, \neg b \wedge (c \vee d)\,]$$

105 / 109-111 / 113 *Principia* de Russell. Types. Réductibilité. Fonction ι

[*footnote*] La notion de type — introduite par RUSSELL pour échapper au paradoxe qu'il avait découvert dans la théorie des ensembles — répond à ce que HUSSERL appelle la faculté thématisante des mathématiques : toute propriété d'un objet peut devenir à sont tour objet et posséder des propriétés ; en langage de théorie des ensembles : toute ensemble d'éléments peut devenir élément d'un ensemble. […] en mathématiques il arrive de définir une nombre (entier, réel) par une propriété (un ensemble) de nombres (réels, entiers) : ainsi la borne supérieure d'un ensemble. Le nombre obtenu serait d'un type supérieur ; d'où l'axiome de réductibilité

[…]

[*footnote*] définition dans chaque type n de l'individu $=_n$

$$x_{n\text{-}1} =_n y_{n\text{-}1} \rightleftarrows \prod_{x_n} [\, x_n\,(x_{n\text{-}1}) \to x_n(y_{n\text{-}1})\,]$$

[…]

axiome-schéma de *réductibilité* :

$$\sum_{x_n} \quad \prod_{x_{n\text{-}1},\, y_{n\text{-}1}\,\ldots} \; [\, x_n\;(x_{n\text{-}1}, y_{n\text{-}1}\,\ldots) \;\rightleftarrows\; A\,] \qquad (2)$$

(A étant une proposition quelconque — l'expression à remplacer — où ne figurent comme variables *libres* que des variables de type inférieur ou égale à n-1 ; en revanche, peuvent y paraître des variables liées de type quelconque). L'axiome donne au formalisme son caractère général prédicatif, c'est-à-dire garantit la possibilité de ramener toute relation à une proposition-élément de type immédiatement supérieur (en théorie des ensembles, toute propriété s'exprime par l'appartenance à un ensemble). En particulier, il autorise les définitions non prédicatives indispensables en mathématique : un individu de type n peut se définir par référence à tous les individus de son type (si A apparaît comme variable liée la variable de type n). Il est complété par l'axiome-schéma d'*extension*, garantie que les définition d'individus ou caractérisations de variables sont univoques :

$$\prod_{x_n,\, y_n\,\ldots} \; [\, x_{n+1}\;(x_n, y_n\,\ldots) \;\rightleftarrows y_{n+1}\;(x_n, y_n\,\ldots)\,] \to\; x_{n+1} = y_{n+1} \qquad (3)$$

(en langage de la théorie des classes : une classe est déterminée par ses éléments). On peut, lorsqu'il s'agit d'un individu, mettre la définition sous forme explicite [*] grâce à l'artifice russellien du terme « celui qui » $\iota\, A\,(x)$, mais le nouvel axiome est une simple conséquence des axiomes obtenus à partir des schémas (2) et (3), ses « formules d'unité ». [**]

[*footnote* *] Une définition est explicite lorsque l'objet (individu) à définir, k, peut être lié à l'expression définissante au moyen d'une égalité. Si l'expression définissante est $A\,(x)$, A représentant une architecture logique quelconque où figure la variable x, l'axiome-définition s'écrit

$$k = \iota_x\, A\,(x).$$

[*footnote* **] La définition générale du terme « celui qui » s'effectue au moyen de deux propositions :

$$\sum_x A(x) \quad \text{et} \quad \prod_{x,y} [\, A(x) \wedge A(y) \to x = y\,]$$

On en tire $A(\iota_x A(x))$. Dans le cas particulier d'une définition d'individu par les schéma (2) et (3), $A(x_n)$ est représenté par $\prod_{x_{n\text{-}1}} [\, x_n\;(x_{n\text{-}1}) \rightleftarrows A\,]$.

BERNAYS a montré [p. 433-457] qu'il était toujours possible d'éliminer le terme ι d'une démonstration : son introduction ne représente donc pas d'*extension véritable* du formalisme.

[…]

Si A qui appartient à la catégorie des fonctions ou des nombres, c'est-à-dire est une expression qui, toutes variables remplacées par des individus et tous calculs effectués, devient un individu fonction ou nombre — ne contient qu'une variable libre $\xi_{n\text{-}1}$, on a :

$$\sum_{\xi_n} \prod_{\xi_{n-1}} [\, \xi_n \,(\xi_{n-1}) \rightleftarrows A \,] \qquad (2)\ bis$$

Pour l'analyse classique on peut se contenter d'appliquer le schéma (2) *bis* lorsque la variable libre dans A est de type 1 : le schéma exprime alors que toute relation, si compliquée soit-elle, peut être représentée par une fonction d'entiers et assure l'usage universel de l'axiome d'induction totale.

[…]

[Dans les *Principia Mathematica*], les conditions posées par Hilbert ne sont pas remplies. Les schémas (2) et (2) *bis* représentent une infinité d'axiomes qu'aucune loi ne permet d'engendrer (en raison de l'indétermination radicale de l'expression A) : la pensée intuitive n'est pas maîtresse de la construction métamathématique du système (il ne faut pas qu'y intervienne la considération de toutes les expressions ou de l'ensemble des fonctions : notions confuses que le formalisme a pour mission d'éliminer). En particulier, une démonstration de non contradiction est évidemment hors de portée.

114-116 Fonction ε

Le rôle de la fonction ε est […] triple : 1° elle établit la liaison entre variables et individus : les signes Π et Σ peuvent disparaître (on les réintroduit cependant, pour la commodité, au moyen de définition explicites) ; 2° lorsqu'un prédicat n'est vrai que d'un individu, elle désigne celui-ci ; elle évite donc l'artifice du terme russellien « celui qui » et permet de transformer immédiatement toutes les définitions d'individus en définitions explicites ; — 3° elle détermine le *choix* d'un individu particulier lorsque le prédicat convient à une collectivité.

[...]

[*footnote*] Dès le mémoire *Sur l'infini* (1925), l'application du formalisme à la théorie des ensembles amène Hilbert à faire coïncider cet axiome avec l'axiome de choix ; $\tau_x A(x)$ devra alors être remplacé par $\varepsilon_x A(x)$: élément distingué de la classe des individus possédant le prédicat A. Le véritable axiome de choix de la théorie des ensembles n'est d'ailleurs pas atteint pour cela : il faut que l'élément distingué soit coordonné de façon univoque à sa classe. On doit donc rajouter l'axiome :

$$\prod_{x_n} [\, A(x_n) \rightleftarrows B(x_n) \,] \rightarrow \varepsilon_{x_n} A(x_n) = \varepsilon_{x_n} B(x_n)$$

axiome *fort* de choix

130-131 Arithmétique de Presburger

Pour un formalisme sensiblement plus restreint, celui de la théorie des nombres avec, comme seule fonction, la fonction du suivant et des variables liées introduites par l'axiome logique ordinaire (sans ε), Herbrand et Presburger ont donné une méthode qui prouve, non seulement, la non contradiction, mais aussi la saturation, et même permet de décider si une proposition est ou non démontrable. […] Presburger a étendu l'application de la méthode à une arithmétique un peu plus large, comprenant, cette fois, les axiomes définissant l'addition. […]

Mais les relations générales où intervient un produit entre variables ne peuvent être représentées dans ce formalisme, il faut ajouter les axiomes définissant la multiplication : pour ce nouveau système, la méthode est inutilisable. […] Si la réduction livre une processus de décision, c'est qu'elle exige effectivement la résolution de tous les problèmes […]. D'où les limites d'intérêt de la méthode : c'est bien, suivant le mot de Bernays, une désintégration, elle ne fait que détruire, de proche en proche, le processus de formalisation, en rétablissant les rapports intuitifs initiaux, le gain est nul.

143-144 Bilan : non contradiction & induction complète

l'axiome d'induction totale n'accroît le formalisme que dans la mesure où la proposition sur laquelle il porte est impossible à y décider : mais alors la méthode des champs est aussi impuissante à démontrer sa non contradiction.

*
* *

Il est assez remarquable que toutes ces démonstration de non contradiction, quoique portant sur des formalismes d'ampleurs différentes, échouent également devant l'axiome général d'induction complète. Là pourtant, dit Hilbert, « se trouve la véritable source du concept de variable mathématique », l'irréductible intervention de l'infini : la métamathématique n'est efficace que si elle l'atteint. […] Hilbert s'était contenté d'une **délimitation extrinsèque de la zone intuitive** : les raisonnements arithmétiques qu'il y autorisait étaient simplement signalés au passage dans l'indivisible mouvement de la pensée concrète, sans que soit envisagé pour celle-ci un essai de codification de **procédés par essence imprévisibles**. Mais les exemples précédents montrent que leur utilisation se trouve déterminée par la matière à laquelle ils s'appliquent. D'où l'essai à la fois de préciser ce rapport et, pour atteindre le formalisme complet au moins de la théorie des nombres, d'enrichir la notion de raisonnement en termes finis, borné jusque-là à des considérations de combinatoire. A la première question répond le théorème de Gödel — avec le critère négatif qu'il fournit —, à la deuxième la dernière démonstration de non contradiction tentée par Gentzen.

[…]

L'originalité de Gödel est d'avoir effectué l'opération inverse, en essayant de déterminer ce qui, des procédés de la métalangue, peut être formalisé dans la langue.

152-156 Gödel, Hilbert, Brouwer, Gentzen

Gödel se défend d'avoir porté atteinte au point du vue de Hilbert : « Qu'il soit expressément noté que le théorème [précédent] (et les résultats correspondants...) ne sont en aucune façon en contradiction avec le point de vue formaliste de Hilbert. Car celui-ci suppose seulement l'existence d'une démonstration de non contradiction conduite avec des moyens finis et il serait concevable qu'il y ait des démonstrations finies qui ne se laissent pas formaliser dans *P* [le système des *Principia* ou les systèmes analogues satisfaisant aux conditions 1 et 2] ». Le théorème ne donne qu'un critère négatif, portant à la vérité contre les méthodes (combinatoires) employées jusque-là. Mais comment élargir la notion de raisonnement fini ? Herbrand en avait donné la définition la plus précise : « on n'y considérera qu'un nombre fini déterminé d'objets et de fonctions ; les définitions de celles-ci permettant de calculer leur valeur d'une manière univoque ; on n'affirme jamais l'existence d'un objet sans donner le moyen de le construire ; on n'y considère jamais l'ensemble de tous les objets *x* d'une collection infinie ; et quand on dit qu'un raisonnement est vrai pour tout les *x*, cela signifie que chaque *x* pris en particulier, il est possible de répéter le raisonnement général en question ». L'indétermination ne subsiste plus qu'à propos de la construction : on peut la concevoir comme une progression d'étapes chacune finie au sens précisé plus haut. Il n'y a plus moyen d'embrasser du regard toutes les démarches — la conscience cesse d'être coextensive à leur succession, elle est du moins présente en chacune d'elles. On passe de la mathématique intuitive à la mathématique intuitionniste. Aussi bien Hilbert avait-il admis cette parenté entre la métamathématique et l'intuitionnisme dans la réponse qu'il faisait à celui-ci ;et Brouwer avait tenté de la préciser.

[*footnote*] L'accord se faisait sur les points suivants : *a*) « distinction entre l'édification formelle des mathématiques et la théorie intuitive des lois de cette édification — avec reconnaissance que pour cette théorie la mathématique intuitionniste de l'ensemble des entiers est indispensable » ; *b*) « rejet de l'utilisation irréfléchie du tiers exclu... et sa limitation aux systèmes finis » ; *c*) « identification du tiers exclu avec le principe de la résolubilité de tout problème mathématique » ; *d*) « reconnaissance que la justification de la mathématique formelle par la démonstration de non contradiction contient un cercle vicieux parce que cette justification repose sur l'application intuitive du tiers exclu (que de la non contradiction d'une proposition sa validité découle) ». […] Les affirmation *c*) et *d*) n'ont pas de sens pour Hilbert : la résolubilité de tout problème mathématique est un principe régulateur de la métamathématique (préside à la constitution de nouveaux systèmes), le tiers exclu principe constitutif de la mathématique formalisée. Quant à sa *justification*, elle n'a pas de rapport avec la preuve de *validité* d'un formalisme (propriété qui ne saurait convenir qu'à une proposition *à l'intérieur* d'un formalisme).

[…]

Gödel démontre par récurrence sur la construction de la proposition (c'est-à-dire en appliquant règle de généralisation et règle de passage) que l'implication vaut pour toutes les propositions de l'arithmétique définie par les axiomes de Herbrand. Les moyens de démonstration y sont donc exactement les mêmes, que l'on prenne la logique classique ou la logique intuitionniste : les deux arithmétiques se recouvrent exactement. La raison en est simple : les individus sur lesquels portent les propositions arithmétiques sont toujours calculables effectivement […]. Dès lors la proscription intuitionniste des affirmations non constructives d'existence n'a pour effet qu'un changement d'écriture : au lieu de $\sum_x A\ (x)$ on mettra $\neg \prod_x \neg A\ (x)$; mais on aura exactement le même nombre d'affirmations, « puisqu'on a le droite d'appliquer le prédicat de l'absurdité aux propositions générales ». La séparation entre mathématique intuitionniste et mathématique classique n'apparaît qu'avec l'analyse et les définitions non prédicatives (c'est-à-dire prenant leur départ de systèmes infinis ; le tiers-exclu ne joue là encore aucun rôle).

Skolem avait d'ailleurs obtenu un résultat un peu plus étendu grâce à la considération des champs : ni le tiers exclu, ni la fonction ε (pour variables de type 1) ne peuvent apporter de contradiction dans un système d'axiomes déjà non contradictoire.

[…]

Il ne semble pas que d'autres recherches puissent procurer mieux [que la démonstration de Gentzen] : le critère de Gödel interdit qu'on opère à moindres frais : le mérite de la démonstration de Gentzen est d'avoir fixé exactement jusqu'où il fallait aller. Sans doute la représentation du segment $0...\varepsilon_0$ échappe-t-elle à l'intuition. Du moins « ne peut-on refuser une certaine évidence au procédé qui l'engendre ».

164-165 / 167-169 / 174 / 179 conclusion

Au moins pour le formalisme radical tel que le présentait von Neumann, le résultat de Gödel est décisif : si la mathématique reçoit sa validité objective de sa représentation comme système ou collection de systèmes de signes dépourvus de tout autre sens que ceux que leur confèrent règles de structure et règles de déduction, avec l'impossibilité d'une preuve de non contradiction, l'édifice s'écroule ; c'est la notion de démonstration formelle qui donnait son unique signification au système et qui n'est plus précisable (puisqu'on ne peut prouver que tout n'est pas démontrable dans un système formel). Il ne saurait d'ailleurs être ici question d'une extension de la zone finie métamathématique, la zone préalable ne doit comporter que des démarches intuitives expérimentales — c'est-à-dire rigoureusement finies — comme celles dont usait von NEUMANN. L'induction transfinie même réduite de GENTZEN n'est en aucune façon expérimentale : elle appartient déjà aux mathématiques.

[…]

[citant CARNAP] « Il n'y a pas de propositions particulières de la logique de la science. Les propositions de la syntaxe sont, partie, des propositions de l'arithmétique, partie, des propositions de la physique [dans la mesure où la syntaxe est descriptive c'est-à-dire étudie des discours effectivement donnés dans l'espace et le temps] qui ne sont appelées propositions syntaxiques que parce qu'elles sont rapportes à des configurations linguistiques ou à leur structure formelle ». « La syntaxe pure [ou logique] est... une partie de l'arithmétique ». Sur ce point le hilbertisme triomphe : d'une part la formalisation des mathématiques ne peut s'effectuer par traduction dans la logique mais par reconstruction simultanée des deux disciplines. D'autre part cette reconstruction doit être rigoureusement formelle, au sens hilbertien, « c'est-à-dire sans rapport avec le sens des signes.. il suffit de fixer la validité de certaines propositions et les relations de consécution, on n'a pas à poser... de question qui dépasse la structure formelle du système ».

Le formalisme strict n'est pourtant pas adopté par là ; contre lui le logicisme transformé garde une objection décisive : il est incapable de rendre compte de l'application des mathématiques à la physique. Qu'ont à faire les jeux non contradictoires de symboles avec les phénomènes du monde ? « On ne voit absolument pas la raison, écrivait FRAENKEL en 1928, pourquoi les lois de l'arithmétique formelle correspondent exactement aux expériences de l'enfant devant son boulier ».

[…]

Du logicisme [de CARNAP] ainsi compris — et guidé par le même réalisme caché qui pour FREGE et RUSSELL posait un en soi de l'univers — aucune solution au problème du fondement ne peut être attendue.

[…]

On a vu le triomphe du formalisme sur le logicisme ancien de ce point de vue : cette insertion forcée [des énoncés syntaxiques dans un système formel] oblige à ne donner au signe d'autre sens que ses modes d'emploi. […] Ce fut l'erreur commune au logicisme et au formalisme de vouloir transformer en liaison nécessaire un rapport qui appartient — si modifié soit-il — au phénomène général du langage.

[…]

le discours en tant que mouvement n'est qu'un aspect particulier du devenir général de la conscience : l'accompagnement symbolique, comme tout jalonnement par la conscience des étapes de son action sur les choses, ne doit pas en être isolé, il participe dans les meilleurs cas (langage systématisé) à l'extension corrélative de l'expérience.

Telle est semble-t-il la double réponse d'un formalisme modifié au logicisme et à l'intuitionnisme. En premier lieu séparation entre expérience véritable qui est connaissance, donc ne peut être que celle qui régit les mathématiques et l'expérience au sens courant ou expérience physique, superposition d'éléments hétérogènes.

[…]

En second lieu, abandon de tout *à priori*. La signification véritable de la logique semble avoir été définitivement précisée par Brouwer : c'est la traduction, dans la syntaxe du langage, d'expériences générales sur des systèmes finis ; son autorité est celle d'une première étape par laquelle il faut toujours passer, autorité identique à celle de l'arithmétique et de l'analyse pour les théories postérieures. […] La contradiction n'est que l'expérience d'un échec (impossibilité d'accomplissement d'un geste prévu par la conscience inadéquate).

[…]

Avec les axiomatisations formalisantes de FRAENKEL et de VON NEUMANN la théorie abstraite retrouve une signification sensible : les opérations effectues sur les symboles. Qu'elles ne correspondent pas au sens initial n'a rien d'étonnant, la non catégoricité fondamentale de ces systèmes conçus comme traduction d'une autre réalité (impossible à atteindre concrètement) et non comme systèmes formels indépendants, en est la preuve. Ils ne sont mathématiques qu'en tant que formels, quelles que soient par ailleurs les possibilités de coordination avec d'autres systèmes pour certaines opérations effectuées celles-là sur des ensembles construits dans d'autres théories (le passage d'un ensemble à l'ensemble de ses parties).