L'intuition épistémique

Gerhard HEINZMANN
2013

éd° Vrin
coll. Mathesis

55 Token, type, objets quasi-concrets

Pour comprendre le « encore une fois la même chose » il faut considérer un trait non pas comme instance concrète dans l'espace et le temps (ce que l'on appelle aussi une « marque »), mais comme instance (« token ») d'un « type ». On a tous l'expérience d'une telle « perception » qui remonte au cours préparatoire. En apprenant à écrire, l'élève s'exerce à exécuter un « token » selon le « type » imposé par le maître et, inversement, la maître signale s'il reconnaît dans le « token » son « type ». Parsons appelle l'intuition du type à travers la perception du « token » une « intuition perceptive ». Or, le « type » en tant que signe n'est plus visible ; sont seulement visibles « marques » des signes qui sont des « token » du « type ». Parsons appelle « objets quasi-concrets » les objets abstraits (signes) dont les instances sont des objets concrets.

125 / 132-133 Intuition arithmétique chez Poincaré

Puisque « aucune *proposition* concernant les collections infinies ne peut être évidente par intuition », il est très important que l'on prend l'énoncé exprimant l'induction complète comme « *énoncé abrégé* de propositions sur le fini » […] [souligné par G.H.]. L'intuition pure de Poincaré consiste dans le fait de prendre conscience d'une *capacité* créatrice de répétition indéfinie qui contribue essentiellement à la compréhension de l'arithmétique élémentaire

[...]

Selon [Vuillemin (1962), 479], l'intuition ne peut prendre en mathématiques qu'un seul sens objectif : celui d'apercevoir dans la suite des entiers naturels une donnée irréductible. En prenant ainsi le terme « intuitionnisme » pour désigner la conception selon laquelle « les mathématiques doivent être fondées en dernière instance sur l'intuition irréductible de l'acte de compter, c'est-à-dire sur les nombres naturels comme une séquence potentiellement infinie », Horald [Edwards, (1988), 140] pense avoir trouvé un critère commun pour les positions de « Henri Poincaré, L.E.J. Brouwer, Hermann Weyl et Erret Bishop ». Selon cette perspective, on pourrait appeler Poincaré *semi-intuitionniste* parce qu'il n'était intuitionniste qu'en arithmétique sans vouloir y réduire toutes les mathématiques; […] il exige une intuition irréductible de l'acte de compter qui, en même temps, doit être saisi par nos esprits d'une manière non médiatisée et indépendamment de toute expérience mentale.

Or, […] pour Poincaré, l'intuition pure n'est pas à identifier avec la répétition d'un acte, mais avec la conscience de la capacité de concevoir la répétition d'un acte et elle ne peut donc pas être directement associée avec l'intuition de « la dyade pure » de Brouwer : l'intuition de Poincaré se distingue de celle de Brouwer par sa dimension sémiotique irréductible […]. En plus, l'intuition de Poincaré n'est pas complètement indépendante de toute expérience du monde extérieur. En effet, l'expérience est pour lui la *ratio cognoscendi* de notre capacité d'une répétition indéfinie qui est donc « provoquée » par l'expérience sans être empirique. En tant que telle, elle constitue même une composante structurelle de constructions empiriques. C'est aussi la raison pour laquelle la négation empirique du principe de l'induction complète n'est pas concevable : puisqu'il est lui-même forme de notre expérience, « nous ne pouvons former aucune conception d'une expérience qui en serait au mieux interprétée comme une violation »

129 Apparition terme « intuitionnisme »

[*footnote*] Dans un compte rendu de [Mannoury (1909)], [Brouwer] utiliser la première fois le mot « intuitionnisme » pour caractériser les positions de Poincaré et Borel. Ce n'est qu'un en 1912 qu'il appelle sa propre approche « intuitionnisme »

131-132 Intuitionnisme chez Poincaré

il y a des concordances dans quelques résultats isolés qui font que la position épistémologique de Poincaré a été plus ou moins assimilée à celle de Brouwer ; par contre, la réflexion de Poincaré ne peut pas être assimilée à la définition de Heyting du semi-intuitionnisme.

[…]

Concernant […] la revendication que les mathématiques n'ont pas seulement une signification formelle, mais aussi une signification par rapport à leur contenu, on peut à la suite de [MacLary (1997), 97] avancer trois sortes d'interprétations : une interprétation *banale*, *expansive* et *restrictive*. L'interprétation banale dit simplement que les mathématiques exigent quelque chose au-delà de la rigueur formelle. L'interprétation expansive réclame que le contenue des mathématiques transcende n'importe quelle formalisation. L'interprétation restrictive rejette quelques mathématiques standard comme inaccessibles à l'intuition ou à une procédure constructive. On a déjà vu que Brouwer était à la fois un intuitionniste expansif et restrictif. […] On peut argumenter que Poincaré est, en tant que philosophe et par rapport aux questions de fondements, un intuitionniste restrictif, et qu'il est en tant que mathématicien un intuitionniste banal et expansif. Concernant le caractère restrictif de la position philosophique de Poincaré, Brouwer mentionne à juste titre son prédicativisme et son refus de l'infini actuel, les deux étant une conséquence du pragmatisme de Poincaré. Selon Brower, Poincaré « blâme dans la logistique le *petitio principii* et dans le cantorisme l'hypothèse de l'infini actuel » [Brouwer (1907), 176]. Par contre, Poincaré n'a pas rejeté la logique classique.[...] les différentes théories formelles de la logique n'expriment pas, selon lui, les structures esthétiques adéquates des preuves. En ce sens, l'intuition de Poincaré donne une compréhension au moins banale, si non expansive de la signification « contentuelle » des mathématiques.

134-135 Poincaré & Brouwer

Poincaré, Borel, Lebesgue et Baire sont tous semi-intuitionnistes en ce sens qu'ils refusent l'intuitionnisme « mental » de Brouwer, mais qu'ils acceptent, à la différence de Brouwer, le tiers exclu. En résumé, le diagnostic de Brouwer reflète bien la similitude et la différence de sa propre position avec celle de Poincaré :

(1) Poincaré et Brouwer partagent la conviction que l'intuition est un garant de la certitude inhérente aux mathématiques.

(2) Ils partagent la conviction que l'induction complète est le « raisonnement mathématique par excellence » [Brouwer (1908), 109].

(3) Contrairement à Poincaré, Brouwer considère l'intuition en son sens particulier comme *unique* base de la construction mathématique [Brouwer (1907), 176].

(4) Leurs positions diffèrent par rapport à la relation qu'y entretiennent l'intuition et la logique.

(5) L'intervention des paradoxes est attribuée par Brouwer à l'application des lois logiques à une structure linguistique « qui n'est jamais transformable en mathématiques proprement dite » [Brouwer (1907), 176]. Selon Brouwer, le formalisme est inutile, selon Poincaré, la philosophie platonicienne qui l'accompagne doit être corrigée dans le sens d'un prédicativisme constructif.

(6) Poincaré refuse l'infini actuel qui est pour lui l'expression de la transposition usurpée, à l'infini, de l'immutabilité des classifications qui caractérise le fini […] ; Brouwer l'admet « pourvu que l'on puisse le limiter à ce qui peut être intuitivement construit » [Brouwer (1907), 176].

147 Distinguer standard et non standard ?

il est clair qu'une preuve de catégoricité implique toujours un isomorphisme entre modèles par rapports au même modèle du cadre ensembliste utilisé : or, si la théorie des ensembles n'est pas catégorique – et elle ne l'est pas effectivement si elle possède un modèle –, il semble impossible d'appliquer la distinction entre standard et non standard à ses modèles. La notion de même de modèle standard est donc relative, même pour un système d'axiomes formalisé dans une logique non-élémentaire ; ainsi la catégoricité de l'arithmétique est démontrée par rapport à un modèle *relatif* – et non absolu – de la théorie des ensembles.

[cité de *The foundations of Mathematics* de Beth (1959)]

167 Nombres infinis « euclidiens »

[Mancosu (2009)] montre que des travaux mathématiques donnent des théories de grandeurs qui traduisent (*cum grano salis*) le principe d'Euclide avec la conséquence que la taille des nombres naturels est plus grande que la taille des nombres pairs.

171 Conclusion

l'intuition de la vérité d'un énoncé, même singulier, est tout au plus indirecte, c'est-à-dire médiatisée par une procédure de réduction de l'énoncé à une schème d'action