Philosophie de la logique – Conséquence, preuve et vérité

2009

éd° Vrin
coll. Textes clés de philosophie de la logique
textes réunis par Denis BONNAY et Mikaël COZIC

Introduction générale

16 Logique vs analytique

Examinons l'argument suivant :

(A10) Albert est le frère de Marie
Marie est la sœur d'Albert

Il s'agit bien d'un argument où la vérité de la prémisse entraîne de la conclusion. Pourtant, il s'agit d'un argument qui repose non pas sur la forme logique des énoncés en jeu mais sur la signification respective des mots « frère » et « sœur ». (A10) constitue typiquement le genre d'arguments valide dont la logique *ne s'occupe pas*. On considère en général que l'objet de la logique est d'étudier les propriétés des arguments qui sont imputables à leur seule forme logique. On dit également parfois que (A1) [exemple de *modus ponens*] est un argument *logiquement valide* tandis que (A10) est un argument *analytiquement valide*.

37 Primat des preuves

L'inférentialisme est la thèse selon laquelle la signification des constantes logiques réside dans les inférences élémentaires qui leur sont associées ; on vient de voir comment l'idée de sémantique [dans laquelle les significations d'une langage sont déterminées ou expliquées par le rôle que jouent ces expressions dans la pensée] conduisait à l'inférentialisme.

Du concept de conséquence logique

Alfred TARSKI 1936
trad. Anna ZIELINSKA

76 Apparition de l'ω-règle

[footnote] D'après Feferman (1986), l'ω-règle a été considérée pour la première fois par Tarski en 1927 ; elle apparaît dans Tarski (1933). La propriété fondamentale de l'ω-règle est que si on l'ajoute comme règle d'inférence à un système d'axiomes comme l'arithmétique de Peano du premier ordre, alors le système que l'on obtient, appelons-le AP+, est complet : tout énoncé du langage vrai dans la structure attendue **N** (les entiers naturels) est dérivable du système

Le pouvoir de la logique : la conséquence logique

Stephen READ 1995
trad. Mikaël COZIC

110 Le vrai est l'inutile

On peut également caractériser les vérités logiques en termes de suppression. Les vérités logiques sont, parmi les prémisses d'un argument, les propositions qui ne sont pas nécessaires ou qui peuvent être supprimées.

120/2 Second ordre

le trait caractéristique de la logique du second ordre est que, alors que le domaine de ses variables d'individu peut être arbitraire, le domaine des variables du premier ordre est constitué de toutes les propriétés des objets du domaine […]

[…]

La logique du premier ordre est complète dans le sens Pickwickien où il existe un système de règles d'inférence auxquelles, étant donné certaines prémisses, on peut construire une preuve qui dérive de ces prémisses n'importe laquelle de leurs conséquences du premier ordre. Elle est incomplète dans la mesure où toute conséquence intuitivement valide de ces prémisses n'en est pas, en réalité, une conséquence du premier ordre. La logique du second ordre est complète au sens où sa relation de conséquence correspond à nos intuitions. Elle est incomplète dans la mesure où il n'existe pas de méthodes de preuve et de règles d'inférence qui puissent dériver toutes les formules des prémisses dont elles sont les conséquences.

125/6/8 Pertinence (starring *ex falso quodlibet*)

Tous les carrés sont ronds. Donc toutes les choses rondes sont carrées.

Du point de vue du sujet, la prémisse et la conclusion semblent être aussi intiment reliées l'une à l'autre qu'un paire de propositions peut l'être. Pourtant la seule raison pour laquelle l'inférence est valide – si elle l'est – réside dans l'impossibilité logique de la prémisse. Autrement dit, l'inférence peut satisfaire les principes de pertinence et de préservation de la vérité séparément ; et pourtant du point de vue de la validité, elle semble prêter le flanc aux mêmes objections que les autres.

[…] s'il est impossible que A (ou nécessaire que B), alors il est impossible que A et que non B. Au départ, nous pensions que l'impossibilité consisterait d'une manière ou d'une autre en une relation entre A et non B – en le fait que B est une conséquence logique de A. Cette idée est alors subvertie par l'impossibilité isolée de A ou la nécessité isolée de B.

[…]

[…] le critère de préservation de vérité est en réalité correct – ce qui ne l'est pas, c'est la façon dont il était exprimé et la croyance qu'il validait des forme d'arguments comme EFQ. […]

[…]

[…] Nous savons qu'EFQ satisfait la préservation de la vérité – en réalité, c'est cela le problème. La question est de savoir si la préservation de la vérité est suffisante.

Éléments d'intuitionnisme

Michael Dummet 1977

trad. Fabrice Pataut

161 Vérité *rendue* (pas besoin d'ontologie)

Concevoir qu'un énoncé est vrai ou faux indépendamment de notre connaissance, implique la supposition d'une réalité mathématique externe, alors que le concevoir comme rendu vrai, si il doit l'être, ne l'implique nullement

166 Traduction intuitionniste des tables de vérité classiques

En règle générale, les tables de vérité pour les connecteurs sont correctes du point de vue intuitionniste au sens suivant. Nous interprétons chaque entrée comme une règle d'inférence avec deux prémisses : une prémisse A au cas où l'on assigne à A la valeur Vrai, ou bien $\neg A$ au cas où on lui assigne la valeur Faux, l'autre prémisse étant, de même, soit B, soit $\neg B$. La conclusion est soit l'énoncé complexe, soit sa négation, suivant qu'il reçoit la valeur Vrai ou la valeur Faux. À cette condition, toutes ces inférences sont correctes du point de vue intuitionnistes. (Par exemple, la table de vérité de & représente, en ce sens, les quatre règles d'inférence :

$$\frac{A \quad B}{A\&B} \qquad \frac{A \quad \neg B}{\neg(A\&B)} \qquad \frac{\neg A \quad B}{\neg(A\&B)} \qquad \frac{\neg A \quad \neg B}{\neg(A\&B)}$$

tandis que celle de → représente les règles :

$$\frac{A \quad B}{A\to B} \qquad \frac{A \quad \neg B}{\neg(A\to B)} \qquad \frac{\neg A \quad B}{A\to B} \qquad \frac{\neg A \quad \neg B}{A\to B}$$

et de même pour ∨). Bien évidemment, la supposition classique que les différentes assignations de valeurs de vérité épuisent toutes les possibilités n'est pas correcte du point de vue intuitionniste.

167 Incomparabilité des conditionnels → classique et intuitionniste

En un sens intuitif très vague, nous pourrions dire que le connecteur intuitionniste → est plus fort que le connecteur classique →. Cela ne signifie pas que l'énoncé intuitionniste $A \to B$ soit plus fort que l'énoncé classique $A \to B$, car, intuitivement, l'antécédent du conditionnel intuitionniste est également plus fort. L'antécédent classique est que A est *vrai* indépendamment du fait que nous puissions ou non le reconnaître comme tel. Cela est inintelligible du point de vue intuitionniste : l'antécédent intuitionniste est que A est *démontrable* (avec des moyens intuitionnistes), et ceci est une supposition plus forte. Nous devons montrer que nous pourrions prouver B en nous fondant sur la supposition, non pas simplement qu'il se trouve que A soit le cas (une supposition inintelligible du point de vue intuitionniste), mais que l'on nous a donné une *preuve* de A. Le $A \to B$ intuitionniste et le $A \to B$ classique sont donc en principe *incomparables* eu égard à la force.

168 Négation ¬ intuitionniste

Une preuve de $\neg A$ n'étant rien d'autre qu'une preuve que A ne sera jamais prouvé, il serait tout à fait erroné d'essayer de remplacer la dichotomie classique vrai/faux par une trichotomie démontrable/réfutable/indécidable.

183/5 Holisme et formalisme

Notre question est de savoir comment il est possible de critiquer des règles d'inférence généralement acceptées. […]

[…]

La conception que nous venons d'esquisser est une forme de holisme linguistique : aucune phrase du langage ne peut être entièrement comprise à moins que le langage entier le soit. La compréhension d'une phrase inclut une disposition à reconnaître chaque moyen possible par lequel elle pourrait être dérivée déductivement de phrases vraies. Puisqu'il n'existe aucun moyen d'imposer une telle restriction quant aux phrases qui *pourraient* figurer dans une telle dérivation, il n'existe aucun fragment propre du langage dont nous pouvons dire que, lorsque nous l'avons maîtrisé, une compréhension complète de la phrase a été acquise. Selon une telle conception, le langage est un jeu avec un système de règles d'une complication considérable, et nous devons connaître *toutes* les règles si nous voulons saisir ne serait-ce que le sens [*significance*] d'un seul coup dans le jeu.

Les intuitionnistes et les platonistes s'accordent pour rejeter une telle conception holiste du langage. Un holiste refuserait probablement de considérer le langage des mathématiques indépendamment du reste du langage – par exemple indépendamment du langage de la physique. Si il le faisait néanmoins, il serait tout à fait prêt à entériner une analyse de la signification (*significance*) de phrases mathématiques en termes de leur prouvabilité au moyen du raisonnement classique. La forme des arguments utilisés dans ce raisonnement ne requerrait aucune justification en terme de quoi que ce soit d'autre. **Elle déterminerait tout simplement la signification des expressions mathématiques**. En réalité, le holisme devient ainsi impossible à distinguer du formalisme, la doctrine selon laquelle les formules mathématiques ne sont pas des phrases authentiques, et ne sont donc porteuses d'aucun contenu du genre requis pour une assertion, bien que, évidemment, le jeu joué par les mathématiciens avec ces pseudo-phrases ait ses propres règles, que les mathématiciens ont le loisir de stipuler comme il leur plaît, sans aucune responsabilité vis-à-vis de quoi que ce soit d'autre. Il n'y a ici par conséquent **aucune notion de vérité pour les phrases mathématiques qui soit distincte de celle de leur dérivabilité** au moyen des règles acceptées, et eu égard à laquelle nous pouvons exiger que les règles de preuve préservent la vérité. Ce genre de formulation, qui nie que les formules mathématiques aient la signification authentique des phrases, place nécessairement la pratique mathématique acceptée au-delà de toute critique. Il est doit être rejeté aussi bien par les intuitionnistes que par les platonistes, qui partagent la doctrine selon laquelle les phrases mathématiques possèdent une signification comparable à celle des autres phrases, et pour qui les mathématiques sont par conséquent ce qu'elles ont l'air d'être : un secteur particulier dans la quête de la vérité.

192-3/5 Critique intuitionniste de la vérité *via* quantification universelle

Dans la mesure où la théorie de la signification qui sous-tend les mathématiques classiques, telle qu'un platoniste la conçoit, requiert que la compréhension d'une phrase consiste en une connaissance des conditions qui doivent être satisfaites pour qu'elle soit vraie (ou pour qu'elle soit vraie dans un modèle spécifique), autrement dit en une conscience de ce qui doit être le cas pour qu'elle soit vraie, nous devons posséder une compréhension de la quantification sur un domaine infini qui ne se rapporte pas aux moyens limités dont nous disposons pour reconnaître comme vraies des phrases formées à l'aide d'une telle quantification. Cette compréhension fournit néanmoins une conception de la vérité pour ces phrases telle qu'elles la possèdent, ou ne la possèdent pas, de manière déterminée. Le point essentiel de la critique intuitionniste des mathématiques classiques est de faire valoir que nous ne possédons pas, et ne pourrions posséder, une telle conception de la vérité mathématique. Le fait que nous nous attribuions une telle possession n'est qu'**une illusion qui repose sur une fausse analogie**.

[…]

[…] Les énoncés arithmétiques avec un unique quantificateur universel fournissent ici un exemple typique. Il n'y aura aucune garantie que nous puissions reconnaître que leurs conditions de vérité sont remplies lorsqu'ils sont vrais. Non seulement nous ne pouvons nous donner les moyens d'en être capables, mais, pour autant que nous sachions, aucun être humain ne pourra jamais reconnaître que de telles conditions sont satisfaites lorsqu'elles le sont. Pour de tels énoncés – et c'est bien là le cas de tous les énoncés mathématiques à l'exception des plus simples – la notion de connaissance des conditions de leur vérité semble avoir perdu toute substance.

[…]

La solution est d'abandonner le principe de bivalence, et de supposer que nos énoncés sont vrais seulement au cas où nous avons établis qu'ils le sont ; autrement dit, si nous prenons en compte les énoncés mathématiques, lorsque nous les avons démontrés, ou lorsque nous avons, au minimum, une méthode effective qui permet d'une obtenir une preuve. Nous pouvons maintenant considérer que la compréhension d'une phrase consiste dans la connaissance des conditions auxquelles elle a été établie comme vraie de manière concluante. Aucune difficulté ne pourra désormais apparaître concernant le contenu d'une telle connaissance, puisqu'il est nécessaire que nous puissions reconnaître les conditions en cause.

Commentaire GONSETH : ce qui marche pour le $\forall$ primitif ne passe pas le saut ontologique
Commentaire WITTGENSTEIN : ce que dit la preuve, rien de plus

198-9 Signification & usage

l'acceptation du raisonnement classique en mathématiques ne *constitue* pas la saisie d'une notion de vérité pour les énoncés mathématiques qui soit soumise au principe de bivalence, comme c'était le cas avec la première réponse platoniste possible que nous avons prise en compte. C'est plutôt qu'une telle acceptation *justifie* (*warrants*) l'attribution de la saisie d'une notion de vérité à l'individu en question. […]

[…] le platonisme peut adopter une manière plus naïve de rejeter le principe selon lequel la signification est l'usage. Il peut soutenir que, bien que nous dérivions notre saisie de la signification des expressions d'un langage pour le seul apprentissage de son emploi, il reste que ce qui est requis pour une telle saisie n'est pas une simple aptitude à obéir aux règles qui gouvernent leur usage, mais la formation de la bonne conception mentale des principes sous-jacents à ces règles. L'usage ne constitue donc pas la signification, comme si nous étions des ordinateurs programmés d'une certaine manière plutôt que d'une autre. L'usage nous *guide*, en tant que créatures rationnelles, à sélectionner la représentation mentale visée parmi les différentes candidats possibles. Nous apprenons effectivement les parties les plus primitives du langages en rapportant leur usage à nos propres capacités. En ce qui concerne les phrases les plus simples, notre connaissance de leurs conditions de vérité consiste effectivement dans notre capacité à reconnaître qu'elles sont satisfaites, lorsque nous sommes en mesure de le faire : par l'observation dans le cas des énoncés empiriques, par le calcul dans le cas des énoncés mathématiques. Une fois que nous avons maitrisé ce niveau le plus élémentaire du langage, nous avançons aux niveaux plus élevés **par analogie**. Nous en venons à comprendre les conditions de vérité d'une phrase appartenant à l'une de ces strates linguistiques plus élevées, en termes de ce en quoi consisterait la reconnaissance effective de sa vérité ou de sa fausseté de manière directe, une capacité que nous ne possédons pas, mais dont nous pouvons former une conception **par analogie avec les capacités que nous possédons réellement**.

La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique

Alfred TARSKI 1944
trad. G.-G. GRANGER (dir.), modifiée par les éditeurs

275 Unicité de la vérité !

La définition [de la vérité qui vient d'être esquissée à grands traits] s'avère non seulement formellement correcte mais encore matériellement adéquate [...]. En d'autres termes, elle implique toutes les équivalences de la forme [l'énoncé « *p* » est vrai ssi *p*]. Il importe de noter, en rapport avec ce qui vient d'être dit, que les conditions de l'adéquation matérielle de la définition **déterminent uniquement** l'extension du terme « vrai ». C'est pourquoi chaque définition de la vérité matériellement adéquate serait nécessairement équivalente à la nôtre. La conception sémantique de la vérité ne nous donne, pour ainsi dire, aucune possibilité de choix parmi diverse définitions non équivalentes de cette notion.