infini, logique, géométrie

Paolo MANCOSU
2015

éd° Vrin, coll° *Mathesis*

106 Gonseth

L'une des caractéristiques de notre approche du monde, dans la vie de tous les jours comme dans la vie scientifique, est la tentative de déduire, par extrapolation certaines propriétés de domaines d'objets (et leurs propriétés) dont nous avons l'habitude, des propriétés similaires dans d'autres totalités qui sont liées, d'une manière ou d'une autre, à celles dont nous avons l'habitude.

137 *comment* confirme-t-on (et non *ce qu'est* la vérité)

Neurath appelait de ses vœux le remplacement d'une méthodologie de la science, qui se considère comme une méthodologie de la poursuite de la vérité, par une métathéorie scientifique devant explorer systématiquement comment la confirmation s'acquiert et se propage à la fois à travers les systèmes et à travers les communautés de chercheurs.

180-1 terminologie « modèle » & « structure »

[*footnote* : À quel moment le terme « modèle » est-il devenu monnaie courante en axiomatique ? « Modèle », en tant que terminologie remplaçant interprétation, semble être apparu dans la littérature sur les fondements des mathématiques avec von Neumann 1925, où ce dernier parle de modèles de la théorie des ensembles. Pourtant, la nouvelle terminologie est redevable, pour son influence et son succès, à l'ouvrage de Weyl « *Philosophy of Mathematics and Natural Science* » (1927). […] Une fois introduit par Weyl dans la littérature sur l'axiomatique, le mot « modèle » rencontre un écho favorable. Il apparaît dans Carnap 1927, 1928, 1930, Kaufmann 1930 et dans les articles de Gödel 1930, Zermelo 1929, 1930 et Tarski 1935b, 1936a. Cet emploi n'est cependant pas universel. Le mot « modèle » n'est pas employé dans Hilbert et Ackermann 1928 (mais on le trouve dans Bernays 1930). Fraenkel 1928 parle de réalisations ou de modèles […] tout comme Tarski […]. Ils ne suivent pas Carnap et sa distinction entre les réalisations (les interprétations concrètes, spatio-temporelles) et les modèles (les interprétations abstraites). « Réalisation » est également employé par Baldus 1924 et Gödel 1929. Parmi les quelques variations, on peut mentionner « représentations concrète » […].

[...]

Pour ce qui est du terme « structure », il n'est pas employé dans les années 1920 comme un équivalent de « système mathématique ». Ce sont plutôt les systèmes mathématiques qui ont une structure. Dans *Principia Mathematica* [1912] puis dans Russell [1919], on trouve la notion de deux relations ayant la même structure. Ce processus finira par mener à l'idée qu'une « structure » est ce qui est saisi par un système d'axiomes : « Un système d'axiomes est dit être monomorphe quand exactement une seule structure lui appartient [à isomorphisme près] Carnap [2000]. Il faut souligner ici que l'emploi du mot « structure » n'était pas encore répandu dans la littérature algébrique, bien que l'approche structurale l'ait été. Il semble que « structure » ait été introduit dans la littérature algébrique au début des années 1930 par Oystein Ore pour désigner ce qui est aujourd'hui appelé un treillis […].]

184 axiomatique

ce qui est nécessaire au développement logique d'une théorie déductive n'est pas *la connaissance empirique des propriétés des choses*, mais *la connaissance formelle des relations entre les symboles* [Padoa 1901]

244 langage noyau

Puisque je ne peux résumer ici les 80 pages de notes prises par Carnap sur ces discussions [avec Tarski de 1940-41], je vais simplement en dire quel en a été le résultat. Le point de départ était d'essayer de trouver une partie des mathématiques classiques qui pourrait être rendue intelligible selon les critères finitistes / nominalistes énoncés par Tarski. Il y a eu désaccord quant à la question de savoir quels fragments des mathématiques classiques pouvaient être considérés comme intelligibles et un accord commun n'a pu être trouvé que sur un système pour l'arithmétique élémentaire dépourvu de quantification (formulé avec des relations et non des fonctions pour éviter de s'engager sur un nombre infini d'entités). On a ensuite cherché une interprétation pour ce système à partir d'un ordre sur les individus concrets du monde. Comme les individus du monde pourraient être en nombre infini, un certain nombre de complications s'en suivent. Mais alors la discussion s'est tournée vers l'esquisse d'un langage noyau qui satisferait les réquisits nominalistes et serait assez fort pour formuler la *métathéorie* nécessaire au mathématiques dont la science a besoin. L'idée était que l'on pourrait même rendre (partiellement) intelligible un fragment des mathématiques platonistes grâce à une métathéorie nominaliste.

337-8 un théorème de Monge

considérons les trois sphères posées sur le même plan *P1*. Soit *P2* le plan tangent aux trois sphères. Chaque couple de sphères peut être inscrit dans un cône dont le sommet est le point d'intersection des tangentes aux cercles à l'origine des sphères. Un plan tangent extérieurement aux deux sphères sera aussi tangent au cône. Puisque les rayons de deux sphères sont distincts, P2 et P1 se coupent dans une droite Δ. De plus, Δ contient D (puisque D appartient à l'intersection des plans tangents au cône associé aux sphères de centre *A* et *B*, *i.e. P2* et *P1*), *E* (puisque *E* appartient à l'intersection des plans tangents au cône associé aux sphères de centre *A* et *C*, *i.e. P2* et *P1*) et *F* (puisque *F* appartient à l'intersection des plans tangents au cône associé aux sphères de centre *B* et *C*, *i.e. P2* et *P1*). Donc les trois points sont alignés.

Le théorème de Monge est intimement lié au théorème de Desargues bien que cette observation paraît avoir longtemps échappé à l'attention des mathématiciens (voir McCleary 1982).

362 réfuter le théorème de Desargues

c'est le compatriote de Pieri, Peano, qui semble avoir été le premier à trouver le modèle d'un plan dans lequel le théorème de Desargues est mis en défaut, dans Peano 1894. La priorité pour ce résultat est typiquement accordée à Hilbert.

400 indépendance de la géométrie planaire

[*footnote* : Le point de vue de Palatini […] est que la géométrie planaire est indépendante, et ne nécessite aucune aide « étrangère » ou « extérieure ». Si nous identifions le système de géométrie planaire de Palatini avec les axiomes pour la géométrie plane de Tarski dans Tarski 1959, alors nous pouvons traduire le point de vue de Palatini dans les termes de la complétude logique du système de Tarski (cf. le théorème 2 de Tarski). Il découle de cette complétude que tout théorème planaire qui peut être exprimé dans le système de Tarski possède une démonstration planaire. En ce sens, la géométrie planaire est indépendante comme Palatini le soutenait. Cependant, les axiomes de Tarski définissent une relation ternaire « entre » et une relation quaternaire d'équidistance. Ces deux définitions montrent donc avec certitude (pour la seconde) que la géométrie de Tarski est métrique. Ainsi Palatini a raison de dire que la géométrie planaire est indépendante, mais ce au prix de l'usage de considérations métriques.]