De la méthode

Recherches en histoire et philosophie des mathématiques

André REVUZ, Michel SERFATI (& al.)
2011

sous la direction de Michel SERFATI
éd° Presses universitaires de Franche-Comté
Autour du séminaire de l'IREM de l'Université Paris VII

VIII. Y a-t-il une méthode mathématique ? (André REVUZ)

160-161 Pourquoi ne pas tout admettre ?

démontre-t-on tout en mathématiques ? Là encore un sondage recueillerait sans doute, à la quasi-unanimité, la réponse : Oui ! J'ai eu à ce sujet une expérience intéressante, il y a une trentaine d'années, dans une classe de troisième dont le professeur m'avait invité à suivre le déroulement de la leçon. Or, à un certain moment le professeur introduisit explicitement un axiome (ce dont on n'avait pas peur à cette époque !). Immédiatement, je perçus un malaise dans la classe. Les élèves devaient penser : il introduit un axiome parce qu'il se « dégonfle » de le démontrer. Je me tournais alors vers la classe et posais la question : « À votre avis, démontre-t-on tout en mathématiques ? » La réponse immédiate, unanime et enthousiaste, fut : « Oui, Monsieur ! ». « Ah ? », répliquai-je, « quand vous démontrez un résultat, c'est à partir de quelque chose dont vous êtes sûr, qui a dut être démontré à partir d'autre chose… et ainsi de suite. Comme on ne peut pas continuer ainsi indéfiniment, c'est donc qu'au départ on a admis certains énoncés à partir desquels on en a démontré d'autres. » La stupeur fut telle que la classe resta silencieuse un long moment. J'attendis, et une élève me dit : « Mais alors, pourquoi ne pas tout admettre ? » - Et bien, justement, répondis-je, une fois admis certains énoncés, ceux que l'on démontre à partir d'eux en découlent nécessairement et ne peuvent être remplacés par des énoncés qui les contrediraient et c'est l'architecture de l'ensemble qui est certaine ?

168-170 Situation, modèle…

Je veux […] signaler tout de suite que la démarche scientifique n'est pas différente dans son essence de toutes celles que l'homme met en service quand il veut agir : elle porte seulement au plus haut point les précautions à prendre pour que l'action soit efficace. Rappelons à ce propos ce que pensait Lebesgue : le mathématicien est un homme d'action !

Que faut-il entendre par « situation » ? Face à la réalité immense et opaque, il est impossible d'agir sur tout ni de tout expliquer. On est donc amené à découper dans l'Univers une portion, à laquelle on va s'intéresser plus particulièrement. Ce découpage, souvent effectué sans qu'il en soit nettement pris conscience, n'est pas innocent : on peut farder dans la « situation » certaines parties de la réalité qui sont sans intérêt pour ce que l'on veut faire, mais on peut aussi ne négliger d'autres dont l'omission rendra plus tard le travail inefficace. On focalise donc l'attention sur une partie de l'Univers et sur certains de ses aspects : c'est la « situation » ! C'est certes indispensable, mais ce n'est pas sans danger. Émettre des jugements très généraux à partir de situations très particulières est un travers extrêmement répandu.

Les classifications des Sciences reposent sur celles des situations qu'elles étudient, et nombre d'évolutions des théories scientifiques ont pour point de départ une modification de la situation de base. […]

Instinctivement, quelle que soit la situation en face de laquelle il se trouve, l'homme en fait une description et cherche des explications – nous dirons même qu'il est toujours plus prêt à en donner qu'à en tester la validité. […] Cette description se fera par la construction d'un modèle et, si les mathématiques doivent y intervenir, ce modèle devra posséder les propriétés permettant de faire des déductions. Ce qui signifie qu'il y aura dans le modèle des éléments qui seront les images d'éléments de la situation qui paraissent importants, et que ces éléments devront avoir les propriétés que l'on a observé ou conjecturé dans la situation : il est évident que ce n'est pas un travail facile, il demande à la fois l'acuité de l'observation et la richesse de l'imagination, à quoi s'ajoute la patience pour chercher une nouvelle approche quand les précédentes se sont révélées stériles.

Y a-t-il des mathématiques là dedans ? Assurément oui ! et les propriétés que l'on attribue au modèle sont les axiomes de départ. N'y a-t-il que des mathématiques ? Assurément non ! Le bon modèle doit être cohérent et, sur ce point là, les mathématiques peuvent juger de manière définitive, mais il doit aussi présenter une « adéquation » suffisante à la situation : l'exigence d'adéquation est fondamentale, et au fond paradoxale. Si en effet l'on maîtrisait parfaitement la situation, l'adéquation devrait être parfaite, mais comme ce n'est pas le cas, comment juger ? Si le modèle permet des calculs et si la situation se prête à des mesures, la concordance des résultats des calculs et des mesures permettra de juger du degré d'adéquation.

172 … & théorie

Nous venons de traiter de situation et de modèles, mais non pas encore du troisième élément : la théorie. En ce qui concerne la mécanique céleste, elle constituerait ce qu'on appelle l'étude des systèmes dynamiques, c'est-à-dire l'étude des systèmes d'équations différentielles, dont ceux de la mécanique céleste ne sont qu'un cas particulier. Plus généralement, l'établissement de ce que j'appelle une théorie est une activité purement mathématique, qui cherche ce qui fait fondamentalement fonctionner le modèle et laisse de côté les aspects contingents. Deux modèles d'apparences différentes peuvent avoir en réalité la même structure : ils relèvent alors de la même théorie. On connaît la maxime selon laquelle « le mathématicien donne le même nom à des choses différentes », et c'est bien ce qui se passe dans l'édification d'une théorie. Les choses auxquelles on donne le même nom sont apparemment différentes, mais dans leur essence, dans leur structure, elles sont identiques. La théorie est-elle ainsi un aboutissement final et une pure satisfaction intellectuelle ? Certes pas, car il faut rejeter toute vue statique des triplets : la recherche scientifique mathématisée est ainsi un perpétuel va-et-vient entre ces trois pôles. Approfondir l'étude d'un modèle conduit à la théorie, mais en retour la connaissance profonde des théories est une aide puissante pour construire des modèles adaptés à une situation. Bien entendu, il ne faudra jamais oublier non plus qu'une situation peut être rebelle à satisfaire tout modèle suggéré par les théories existantes. Il faudra alors créer du totalement nouveau : c'est le défi permanent auquel la Science doit faire face.

Le mot « théorie » n'est peut-être pas le plus heureux. Il évoque souvent l'idée d'un échafaudage intellectuel ayant vocation à donner des explications définitives et quasiment universelles. Or ce ne sont pas des explications générales que fournit une théorie mathématique, mais un arsenal d'outils ayant leur spécificité, arsenal qui en outre n'est pas constitué une fois pour toutes, mais s'enrichit sans cesse. L'articulation et la classification des théories permet d'en maîtriser la complexité et de savoir où trouver les outils adéquats aux problèmes à résoudre : on pourrait ainsi dire qu'une théorie est un concentré de guides d'action.

174 Erreur pédagogique générique

Il faut reconnaître qu'enseigner est une activité très complexe, qui est soumise à des exigences souvent contradictoires et dont les mots d'ordre apparemment simples méconnaissent les difficultés réelles. Toute prise de position unilatérale et excessive sur ce point est une erreur. Prendre le contre-pied complet d'une erreur pédagogique est un des plus sûrs moyens d'en commettre une autre, et l'on pourrait presque dire que c'est la règle !

XI. Théses d'existence et travail mathématique (Alain MICHEL)

250 Le continu, la réalité, Dedekind VS Kant

Rien de plus intuitif, au contraire [des imaginaires], que le continue réel, dont la nature physique nous procure instantanément des exemples, tel le bord d'une table. Nul besoin sans doute d'aller chercher plus loin les raisons du long délai qu'a exigé la construction arithmétique des réels. Le grand mérite de Dedekind est ici […] d'avoir su résister à la puissante attraction d'une doctrine qui avait reçu de Kant le poids de son autorité : celle de l'irréductibilité de la forme même de notre intuition de l'espace, donc du continu, à toute construction logique ou mathématique.

252 L'existence n'est pas un prédicat du premier ordre

Comme l'a expliqué le premier Frege, du moins avec autant de clarté, dire qu'un certain être (par exemple Dieu) existe, c'est moins dire qu'un objet (à savoir Dieu), qu'il existe – ici, c'est seulement le langage qui nous trombe –, que dire d'un concept, donc d'un prédicat (être Dieu), qu'il est pas vide, et qu'il est rempli par au moins un individu : qu'un individu au moins tombe sous le concept de Dieu, et donc que le nombre appartient au concept en question. Ainsi, comme le nombre, l'existence est un concept de second ordre, qui ne peut se dire d'un objet ou d'un individu, mais seulement d'un concept.

Au fond, Weierstrass a voulu faire pour la fonction ce qu'on savait déjà faire pour le nombre réel (lorsque l'on effectue un « développement décimal ») : le développer en une suite infinie.

XII. Analogie et « prolongements » (Michel SERFATI)

284 / 286 / 292 / 300 / 303-304 LE « PRINCIPE » DE PROLONGEMENT

De Morgan viendra […] fort bien le résumer : « faire comme si le canon était nécessairement vrai » (« *treating the results of algebra as necessarily true* »).

[…] *la définition nouvelle est telle que le canon soit extensivement vérifié*.

[…] tout objet, toute formule mathématique, apparemment en soit, peut le cas échéant n'être regardé que comme un instance seulement d'un objet ou d'une formule plus vaste, qui le recouvre et le prolonge sur le plan signifiant, cependant que sa forme symbolique restée inchangée

[…] Le succès tient au choix adéquat du canon électif […]. En vérité, […] c'est bien de la capacité d'invention du géomètre qu'aura directement dépendu un choix fécond des propositions électives, dont dérive le succès du prolongement.

[…] On reconnaît bien ici encore [pour le cas des distributions], dans le choix judicieux d'un canon parmi d'autres qui lui sont pourtant logiquement équivalents, un des effets de l'art du mathématicien.