Un mathématicien aux prises avec le siècle

Laurent SCHWARTZ
1997

éd° Odile Jacob

64 ENSEIGNER CE QUE L'ON CONNAÎT

J'ai maintes fois constaté qu'un professeur enseignant un objet avec lequel il est peu familier inspire à ses élèves un malaise dont ils auront le plus grand mal à se défaire, son exposé fût-il parfait. Si au contraire il possède à fond son sujet, les étudiants recueilleront une part de cette maîtrise.

164 IMAGES DIRECTES ET RÉCIPROQUES

Les notions, inévitables et évidentes, d'images directe et réciproque, n'ont été introduites par l'algébriste allemand Dedekind qu'en 1932 ! Bien sûr, Bourbaki les adopta immédiatement. Je me souviens encore des difficultés que j'avais à l'École normale pour énoncer un certain nombre de propositions, en redonnant chaque fois les définitions nécessaires.

166/167 ABRÉGER, ABSTRAIRE & S'HABITUER

Si l'on convient que, pour x = $(x_1, x_2, \dots x_n)$, x_p est le scalaire $(x_1)^{p1}\ (x_1)^{p2} \dots (x_n)^{pn}$, et que p ! veut dire $p_1 !\ p_2 ! \dots (p_n) !$, la série de Maclaurin s'écrit, à n variables comme avec une seule :

$f(x) = \sum(x_p / p !)\ \partial^p f(0)$.

Cette simplification très élémentaire est en fait tout à fait géniale. Elle a bien contribué au grand développement des équations aux dérivées partielles. Je l'ai utilisée fréquemment dans mon libre sur les distributions. […]

Sans ces simplifications continuelles, les mathématiques deviendraient particulièrement embrouillées, pour ne pas dire impossibles. De telles synthèses représentent cependant une montée en abstraction. La mathématique est, parmi les sciences, la plus abstraite, c'est ce qui en fait la difficulté pour les profanes. À partir du moment où l'on a introduit la notion de distribution, on parlera de l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions, puis d'une application linéaire continue de l'espace des distributions dans lui-même (par exemple la dérivation), puis de l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D}' ; \mathcal{D}')$ de ces applications. Il y a là un degré d'abstraction considérable mais très familier aux mathématiciens. La montée en abstraction est un trait important des mathématiques auquel on s'habitue très vite. C'est difficile au début, cela devient très facile ensuite. La majeure partie des mathématiques est abstraite. Si l'on écrit par exemple l'égalité

$$\int_{-\infty<x<\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

(intégrale gaussienne, fondamentale en probabilités), elle contient une grande quantité d'idées « abstraites » : le nombre π, le nombre e (pour exposer le travail d'un mathématicien, j'avais proposé au *Monde* un texte comportant ce nombre e ; le journaliste ne comprit pas et monta jusqu'au directeur qui ne comprit pas davantage mais déclara : « Schwartz doit savoir ce qu'il dit ») ; la fonction exponentielle, inconnue avant le XVIII[e] siècle sans doute ; l'intégrale, trouvée par Riemann au XIX[e] siècle, mais ici c'est une intégrale impropre absolument convergente. Aujourd'hui, non seulement tous les mathématiciens, mais les physiciens, les chimistes, les ingénieurs, les biologistes et médecins, savent plus ou moins ce que veut dire cette formule, et savent également que le résultat de l'intégration est bien $=\sqrt{2\pi}$. Ce nombre est banal (même sans doute pour *Le Monde*), mais les anciens avaient fort à faire avec les racines carrées ou le nombre π. Si on la reprend du début, l'intégrale gaussienne est une notion extrêmement compliquée. On monte dans l'abstraction à des hauteurs vertigineuses ; cela n'est possible que parce que chaque objet abstrait est devenu concret par l'usage ; c'est une question de temps et d'énergie, mais on y parvient toujours. C'est ce qui fait en revanche l'immense difficulté de vulgariser les mathématiques. À ce propos, un professeur avait défini un objet abstrait comme un objet qu'on ne peut ni voir ni toucher, et un objet concret comme un objet qu'on peut voir le toucher. Oui, avait acquiescé un élève, mon caleçon, par exemple, est concret tandis que le vôtre est abstrait, parce que je ne peux ni le voir ni le toucher. Plus sérieusement, un objet concret est un objet abstrait auquel on a fini par s'habituer. N'importe quel physicien qui manipule des atomes, des protons, des électrons, des quarks, des gluons, la mécanique quantique ou la relativité, vit dans un univers d'abstraction extrême. De même un chimiste qui écrit une longue formule développée, ou un biologiste qui comprend la double hélice, les lois de l'immunité ou le système HLA. Mais il l'oublie et considère tout cela comme très concret.

226-227 AUX ORIGINES DES DISTRIBUTIONS

non seulement une fonction qui n'a pas de dérivée usuelle en a une qui est une distribution, mais toute distribution admet une dérivée distribution. Le mathématicien Peano, ayant perçu les difficultés de la dérivation, avait écrit en 1912 : « Je suis sûr que quelque chose doit être trouvé. Il doit exister une notion de fonctions généralisées qui sont aux fonctions ce que les réels sont aux distributions. » Intuition merveilleuse et bien antérieure à 1944. […]

Il existait « un produit de composition » des fonctions nulles en dehors de la demi-droite réelle $[0,+\infty[$, noté par une étoile ou un astérisque *, introduite par Mercer (à l'époque des équations intégrales de Volterra-Fredholm, à la fin du siècle dernier) […]. Le nom de composition, trop vague, a été abandonné depuis, et remplacé par celui de convolution, comme en anglais (en allemand, on dit *Faltung*).

232 FONCTIONS HARMONIQUES & HOLOMORPHES

une fonction harmonique peut être définie par le fait qu'elle est continue dans l'espace, et que sa moyenne sur toute sphère est égale à sa valeur au centre. Ainsi l'harmonicité de la fonction, qui se traduit différentiellement par le fait que son laplacien est nul, peut se définir par une propriété qui ne fait pas intervenir l'existence de ses dérivées. On en déduit en outre qu'une telle fonction harmonique a des dérivées successives continues de tous les ordres. C'est la même chose pour les fonctions holomorphes : les théorèmes de Cauchy et Morera disent qu'une fonction continue sur le plan complexe est holomorphe si, et seulement si, son intégrale curviligne le long de toute courbe fermée rectifiable est nulle. L'holomorphie signifie la dérivabilité par rapport à la variable complexe, et on peut la caractériser sans faire intervenir de dérivation. Et, ici encore, une fonction holomorphe a des dérivées successives de tous les ordres.

247-248 / 256-258 / 262 / 263 CHERCHER & DÉCOUVRIR

Une découverte est, quasiment pour chaque théorème, un chemin en zigzag. Le résultat final est souvent très proche du point de départ. Ce n'est que lorsque j'ai ainsi obtenu un nouveau résultat que je cherche quel était en réalité le plus court chemin ; d'autres se contentent du résultat final et publient leurs zigzags, question de tempérament. […]

L'image de la découverte est donc bien différente de celle que le grand public se représente : selon lui, on progresse du début à la fin par des raisonnements rigoureux, parfaitement linéaires, dans un ordre bien déterminé et unique qui correspond à la logique parfaite. Les zigzags lui sont inconnus. C'est dommage. Cela rend les mathématiques (et toutes les sciences) trop rigides, moins humaines, plus inaccessibles, puisqu'elles ne donnent pas le droite à l'hésitation et à l'erreur. […]

La « sèche » est intrinsèque à toute recherche. Elle peut bien sûr devenir pénible si elle se prolonge trop. Mais, dans une certaine mesure, j'aime « sécher ». En effet, quand les choses marchent toutes seules, on a tendance à ne pas faire assez d'efforts. Au contraire, dès qu'on sèche, on désire à tout prix vaincre la difficulté, on tend toutes les forces de son organisme et, au bout d'une journée, on finit par trouver quelque chose. Par forcément, certes, ce que l'on cherchait, mais sûrement quelque chose d'intéressant. Je suis heureux dès que j'arrive à une « sèche », et malheureux si elle est longue et pénible. Après l'enthousiasme de la découverte subite, viennent forcément certains butoirs. […] C'est cette alternance de joies et de souffrances qui est au cœur de la recherche. Il faut y habituer les jeunes. Les lycées ont trop souvent l'idée qu'il est anormal de réfléchir plus d'une heure à un problème, alors que, pour trouver quelque chose de significatif, des jours et jours sont parfois nécessaires – quand ce ne sont pas des années. […] Le lecteur qui lit un livre bien écrit ne voit plus quelles ont été les joies et les souffrances de l'auteur. Il peut être instructif de leur dévoiler. […] Il faut aussi [que les élèves de lycée] sachent que, si une théorie est bien faite mais que certains de ses aspects restent boiteux, ce sont probablement ceux-là même qui sont les plus intéressants pour des recherches à venir. Le but d'une science n'est pas d'ingurgiter des idées toutes faites et bien achevées, mais d'imaginer des conceptions nouvelles. Et celles-ci sont généralement engendrées par le dépassement d'obstacles internes.

[…]

Je l'ai déjà dit, les mathématiciens se contentent parfois des démonstrations en zigzags et exposent leurs théories sous cette forme. On pourrait penser qu'elles sont plus didactiques pour le lecteur qu'un exposé bien fait par le chemin le plus court. Ce n'est pas si sûr. Car, pour un autre mathématicien, les zigzags nécessaires à ses découvertes ne sont pas les mêmes que pour celui qui a fait la découverte !

[…]

Comme on le voit, les mathématiques, contrairement à ce que tout le monde pense, ne sont pas une science de la rigueur, opposée aux sciences expérimentales qui seraient des sciences de l'intuition. Il y a autant d'intuition et de rigueur en mathématiques qu'en physique ; Mais cette rigueur n'est pas la même. En mathématiques, la rigueur est la démonstration formelle par les règles du raisonnement, alors que la rigueur pour un physicien est la vérification par l'expérience. Un physicien qui veut vérifier une théorie ne la démontre pas, il vérifie expérimentalement. Nous aussi d'ailleurs faisons des expériences, car, pour trouver une propriété, on fait de nombreux efforts sur des modèles approchés jusqu'à découvrir finalement le bon résultat. Ainsi, en classe de terminale, pour trouver la courbe décrite par un point, on cherche une situation particulière et les points particuliers de la courbe, ce qui aide beaucoup expérimentalement à trouver le résultat final. L'intuition est chez nous fondamentale. On contrôle par la rigueur, mais on trouve par l'intuition. C'est intuition qui me pousse en avant, et j'ai tendance à aller très vite et de plus en plus loin, sans beaucoup assurer mes arrières. À un moment donné, je m'embrouille ; l'intuition n'est plus suffisante. Je reviens alors en arrière, utilise la démonstration rigoureuse, et l'écris même. À partir de ce moment-là, tout est bien établi ; les conséquences décrites un peu vite à l'origine n'étaient pas forcément vraies, mais je sais maintenant que je peux continuer, me reposant sur des bases solides.

255 Décomposition spectrale

Prendre la décomposition spectrale d'un opérateur, c'est décomposer l'espace en somme (ou intégrale) de sous-espaces sus chacun desquels l'opérateur est la multiplication par un scalaire. La série et l'intégrale de Fourier donnent la décomposition spectrale de l'opérateur de dérivation, puisque la dérivée de $e^{i\alpha x}$ est $i\alpha\, e^{i\alpha x}$