les principes des mathématiques revisités

Jaakko HINTIKKA
1996

éd° Vrin (2007), coll. Mathesis
préface & trad. Manuel Rebuschi
(*The principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press)

INTRODUCTION

24-5 la théorie des modèles fait partie des maths (non de la logique), des ensembles

pour faire de la sémantique (la théorie des modèles)[…], vous avez besoin d'une définition de la vérité pour le langage concerné. Suivant les conceptions courantes, une telle définition de la vérité ne peut pas être formulée dans le même lange mais seulement dans un métalangage plus fort. Pour les langages du premier ordre, une telle définition de la vérité doit naturellement être formulée dans la théorie des ensembles ou dans un langage du second ordre. Dans les deux cas, nous avons affaire à un langage mathématique plutôt qu'à un langage purement logique. La théorie des modèles est donc inévitablement une discipline mathématique, et pas une discipline purement logique. […]

[…]

La logique du premier ordre est incapable de gérer les concepts et les modes d''inférences les plus caractéristiques des mathématiques, comme l'induction mathématique, l'infini, l'équipotence, le bon ordre, la formation de l'ensemble des parties d'un ensemble, et ainsi de suite. Par conséquent la pensée mathématique implique essentiellement des entités d'ordre supérieur de telle ou telle sorte, qu'il s'agisse d'ensembles, de classes, de relations, de prédicats et ainsi de suite, au sens fort où elle implique la quantification sur ces entités. Pour l'exprimer formellement, on peut faire des mathématiques au niveau du premier ordre seulement si les valeurs des variables individuelles comportent des entités d'ordre supérieur, comme les ensembles. Il est ainsi théoriquement éclairant de formuler les théories mathématiques dans les termes de la théorie des ensembles. La théorie axiomatique des ensembles est par conséquent un cadre naturel pour la théorisation mathématique.

Chapitre Premier : les fonctions (déductive & descriptive) de la logique et le problème de la définition de la vérité

30 axiomatiser : vers une maîtrise et une vue globale (et non vers la certitude)

Les philosophes considèrent parfois la méthode axiomatique comme un moyen de justifier les vérités qu'un système axiomatique reproduit comme théorèmes. Si c'était le cas, les axiomes devraient être bien plus évidents que les théorèmes, et la dérivation des théorèmes à partir des axiomes devrait préserver la vérité. [...] [Les équations de Maxwell ou celles de Schrödinger] offrent toujours une vue d'ensemble sur une large classe de phénomènes. Elles constituent des outils pour la maîtrise intellectuelle de la part de réalité dont elles traitent. De façon générale, ce travail de maîtrise intellectuelle est une motivation bien plus importante en faveur de la méthode axiomatique que la quête de certitude.

31 interpréter axiomes & théorèmes

Du fait de la nature purement logique du système axiomatique de Hilbert, toutes les preuves auraient pu être représentées dans une notation explicite de logique formelle (bien sûr interprétée), sans différence significative. […] Ce caractère purement logique du passage des axiomes aux théorèmes ne signifie pas que les axiomes ou les théorèmes doivent rester non interprétés. Cela ne signifie pas non plus que les axiomes ne peuvent pas être (matériellement) vrais. En fait, Hilbert a indiqué ailleurs, tout à fait explicitement, que pour n'importe quelle application actuelle de la géométrie, la vérité des axiomes est une questions matérielle (empirique).

33 règles = ponts formel entre vérités

Il est important de réaliser que l'on ne peut pas confier l'énumération des schémas d'inférences valides aux mal nommées « règles d'inférence » d'une axiomatisation de la logique. Car la *raison d'être* de telles « règles d'inférence » est de servir de véhicule pour épeler les vérités logiques, et pas les vérités matérielles ou mathématiques. Donc la seule chose que l'on puisse attendre d'elle est qu'elles préservent la vérité *logique*.

42 Définir modèle = définir vérité

la question centrale est ici […] la question de savoir quand un modèle *M* est un modèle pour un énoncé *S*. Une réponse partielle est ici évidente. Au sens élémentaire de « modèle », *M* est un modèle de *S* si et seulement si *S* est *vrai* dans *M*. Et les conditions de vérités d'un énoncé dans un modèle sont ce que les *définitions de la vérité* codifient. Ainsi la spécification de la relation capitale d'*être un modèle pour* est essentiellement un problème de *définition de la vérité*.

45/47 Pas de modèle sans ensembles

De façon générale, le résultat de Tarski semble confirmer les pires craintes au sujet de la dépendance de la théorie des modèles à l'égard de la logique d'ordre supérieur et, par suite, vis-à-vis des ensembles et de leur existence. Il a même été avancé que cela faisait de la théorie des modèles un peu plus qu'une partie de la théorie des ensembles. **La dépendance apparente des définitions de la vérité à la Tarski vis-à-vis de la théorie des ensembles** est en effet, à mon avis, l'un des aspects les plus déconcertants de la scène actuelle en logique et fondements des mathématiques. Je suis fortement tenté d'appeler cela « la malédiction de Tarski ». Elle **inflige à la théorie des modèles tous les problèmes et incertitudes de la théories des ensembles**. Plus généralement, la malédiction de Tarski pourrait être comprise comme l'indéfinissabilité de la vérité pour un langage donné dans ce langage (étant données les présupposition de Tarski).[…]

[…]

[…] Il est généralement considéré que tout ce qui est non problématique pour la logique (au moins pour le type de logique qu'un mathématicien a l'occasion d'employer) relève de la logique du premier ordre. Tout le reste dépend de la théorie des ensemble, formulée comme une théorie axiomatique du premier ordre. Mais la théorie des ensembles n'est pas une partie de la logique, elle fait partie des mathématiques. Elle ne peut donc pas fournir de base absolue pour le reste des mathématiques, et elle est elle-même assaillie par tous les problèmes liés à l'existence des ensembles.

Chapitre II : Le jeu de la logique

52 Wittgenstein

L'idée profonde de Wittgenstein n'est pas que le langage peut être employé de manières variées, la plupart d'entre elles étant non descriptives ; elle est plutôt que la signification descriptive elle-même doit être médiatisée par des activités humaines gouvernées par des règles, c'est-à-dire par des jeux de langage. […]

[…]

[…] que *sont* les jeux de langage pertinents, alors, qui constituent la notion de vérité ? Comment vérifions-nous et falsifions-nous effectivement des énoncés ?

55 Signification & vérité

Il est […] important de réaliser que ce que l'on tient […] pour donné est la signification des symboles. La notion de signification d'un énoncé est inextricablement liée à celle de vérité. On pourrait dire qu'un énoncé signifie ce qu'il signifie en nous montrant ce à quoi ressemble le monde quand il est vrai. La notion de vérité est donc le but suprême de la signification des énoncés en général.

61/70 Vérité & AC

tant qu'il s'agit de logique du premier ordre, la définition *game-theoretical* de la vérité présentée plus haut dans ce chapitre est équivalente à la définition usuelle de la vérité à la Tarski, en admettant l'axiome du choix. […]

[…]

[…] Tout témoignage en faveur de GTS [théorie sémantique des jeux] est *ipso facto* un témoignage en faveur de l'axiome du choix. Une critique intéressante de l'axiome du choix doit donc se fonder sur un examen des idées de base de GTS, et en particulier sur la définition *game-theoretical* de la vérité en tant qu'existence d'une stratégie gagnante pour le vérificateur initial dans un jeu sémantique.

Chapitre III : L'erreur de Frege déjouée : logique IF, ou la logique faite pour l'indépendance

76 Quantification dépendante & fonctions

la source réelle du pouvoir expressif de la logique du premier ordre ne réside pas dans la notion de quantificateur *per se*, mais dans l'idée de *quantificateur dépendant*. Si vous voulez donner un exemple simple mais représentatif d'énoncé quantifié, ce ne sera pas une prémisse syllogistique avec un seul quantificateur universel ou existentiel, mais un énoncé où un quantificateur existentiel dépend d'un quantificateur universel, comme :

$$(\forall x)(\exists y)\mathrm{S}[x,y]$$

Sans ces quantificateurs dépendants, les langages du premier ordre auraient une faiblesse de pouvoir expressif à faire pitié. Par exemple, nous ne pourrions pas sans eux exprimer de dépendance fonctionnelle dans une langage quantificationnel pur. Le fait que l'on puisse cacher la quantification existentielle par une notation fonctionnelle ne change pas la situation. Ces prédicats cachés doivent du placard quand les symboles de fonctions sont éliminés et remplacés par des symboles de prédicats.

79 Logique independance-friendly IF

Nous devons étendre notre logique du premier ordre familière et traditionnelle en un logique plus forte qui autorise l'indépendance informationnelle là où la notation courante de Frege-Russell l'interdit. Il en résulte une logique que l'on appellera *logique du premier ordre independance-friedly* (IF). Elle est au moins aussi fondamentale que la logique du premier ordre ordinaire. Elle est notre véritable logique élémentaire. Tout ce dont vous avez besoin pour la comprendre, vous en avez déjà besoin pour comprendre la logique traditionnelle de Frege-Russell. Pour citer l'une de mes propres présentations antérieures, la logique de premier ordre IF est une véritable logique mafieuse (*Mafia logic*) : c'est une logique que vous ne pouvez pas refuser de comprendre.

83-4 Erreur de Frege & portée des quanteurs

On peut […] considérer l'erreur de Frege comme résultant du mélange de deux usages de parenthèses. Pour indiquer la priorité logique, la façon la plus naturelle de les employer est d'exiger que les portées des quantificateurs soient emboîtées. Mais en faisant cela, on exclut le chevauchement seulement partiel des portées des quantificateurs, alors qu'une telle violation de l'exigence d'emboîtement est une chose parfaitement naturelle du point de vue de la portée de liage.

90 Énoncés du 1er ordre IF & énoncés Σ_1^1 (2e ordre)

Comme pour la logique du premier ordre ordinaire, les traductions au second ordre des énoncés du premier ordre IF sont de la forme Σ_1^1. À la différence de la logique ordinaire, la logique IF autorise aussi la traduction inverse. Autrement dit, chaque énoncé Σ_1^1 a une traduction (un équivalent logique) dans un langage du premier ordre IF.

93 Similitudes et différences entre LPO ordinaires & IF

Il est indispensable de bien comprendre la relation entre la logique au premier ordre IF et sa grande sœur traditionnelle. Parmi les aspects les plus significatifs de cette relation, on trouve les suivants :

(a) La logique du premier ordre ordinaire est un cas spécial de la logique IF.
(b) Aucune idée n'est impliquée en logique IF qui ne soit pas déjà mobilisée par la compréhension de logique ordinaire.
(c) Techniquement parlant, la logique IF est une extension conservative de la logique du premier ordre ordinaire.

Les langages du premier ordre IF diffèrent cependant très nettement des langages du premier ordre ordinaire, et de plusieurs manières. Trois différences sont tellement importantes qu'elles serviront naturellement d'entrées aux trois prochains chapitres. Ces trois formes de comportement logique non familier sont les suivants :

(a) La logique IF n'admet pas d'axiomatisation complète.
(b) La logique IF n'admet pas de définition de la vérité à la Tarski.
(c) La loi du tiers exclu ne tient pas en logique IF.

98 Quanteurs & choix

Hilbert avait raison et […] Frege avait tort – c'est-à-dire que les quantificateurs sont en réalité des fonctions de choix implicites qui dépendent de certains quantificateurs universels extérieurs mais pas d'autres.

Chapitre IV : Les joies de l'indépendance – quelques usages de la logique IF

103 IF & uniformité : exemples

les mathématiques sont pleines de conceptualisations qui, en dernière analyse, doivent s'exprimer en logique IF plutôt qu'en logique ordinaire, même si cet ingrédient n'est que rarement reconnu en tant de mots. L'exemple le plus familier en est peut-être offert par la notion de dérivabilité uniforme. La fonction $f(x)$ est dérivable en chaque point d'un intervalle $x_1 < x < x_2$ si et seulement si

$$(\forall x)(\exists y)(\forall \varepsilon)(\exists \delta)(\forall z) \qquad ((x_1 < x < x_2) \ \& \ (|z|<|\delta|)) \supset (\, | f(x+z)-f(x))/z - y \, | < |\varepsilon|)$$

La fonction est uniformément dérivable sur le même intervalle si et seulement si la même condition est satisfaite en remplaçant $(\exists\delta)$ par $(\exists\delta/\forall x)$. Concernant ce cas de la dérivabilité uniforme, une confusion entre quantificateurs dépendants et indépendants s'est en fait même manifestée dans l'histoire des mathématiques[...].

De façon générale, la notion mathématique d'uniformité est étroitement reliée à l'idée d'indépendance informationnelle.

[…]

[…] Il ne faut peut-être pas espérer trouver des exemples de structures branchantes de quantificateurs du premier ordre dans les traités de mathématiques, mais on ne devrait pas être surpris d'y trouver des résultats mathématiques qui affirment l'existence de deux fonctions à une variable dont les valeurs pour différents arguments peuvent être reliées d'une manière particulière, comme dans un énoncé tel que :

$$(\exists f)(\exists g)(\forall x)(\forall z) \ S[x, f(x), z, g(z)]$$

Et comme on l'a vu, affirmer [ce dernier] revient à affirmer l'énoncé IF :

$$(\forall x)(\forall z)(\exists y/\forall z)(\exists u/\forall x) \ S[x, y, z, u]$$

105-6 Spécificités IF & méca Q

Certains aspects à première vue énigmatiques de la situation conceptuelle en théorie quantique, en particulier l'impossibilité de mesurer des variables conjuguées en même temps, peuvent […] être compris comme des exemples du comportement caractéristique des quantificateurs en logique IF. Ce fait, joint à mes explications antérieures sur l'émergence naturelle des traits distincts de la logique IF à partir de la théorie sémantique des jeux, aide ainsi à démystifier les phénomènes d'indétermination de la théorie quantique.

Chapitre V : Les complexités de la complétude

119 Pourquoi Frege ne pouvait accepter la logique IF

supposez, comme expérience de pensée amusante, que Frege ait corrigé son erreur, qu'il ait admis l'indépendance informationnelle entre quantificateurs, et qu'il ait réalisé que la logique résultante n'est pas axiomatisable. Cela aurait privé de sens l'ensemble de son projet. Car quel serait alors l'intérêt de réduire les mathématiques à la logique, si la logique exigée pour cela ne peut pas être axiomatisée ?

120-1 Quatre sens de complétude

(a) *La complétude descriptive*. C'est une propriété d'un système T d'axiomes non logiques. Elle signifie que les modèles de T ne comprennent que les modèles visés. S'il y a seulement un modèle visé (*modulo* un isomorphisme), alors la complétude descriptive signifie la catégoricité, avec le modèle visé comme unique modèle de T.

Notez qu'il n'est fait aucune référence à une quelconque méthode de preuve logique dans cette caractérisation. Tout ce dont on a besoin, c'est de la relation d'un énoncé à ses modèles, ainsi que de l'idée d'un modèle visé.

Si, suivant la terminologie des logiciens, on dit de l'ensemble des modèles qu'il constitue une théorie, alors la complétude descriptive dit que cette théorie est axiomatisable. C'est dans ce sens précis que Euclide et Hilbert ont essayé d'axiomatiser la géométrie. C'est aussi le sens auquel nous parlons de l'axiomatisation d'une théorie physique. Dans ce cas, les modèles visés sont simplement tous les systèmes physiquement possibles du type concernés.

(b) *La complétude sémantique*. C'est une propriété de la prétendue axiomatisation de la logique (ou de l'un de ses fragments). Cela signifie que tous les énoncés valides du systèmes sous-jacent peuvent être obtenus comme théorèmes à partir des prétendus axiomes du système de logique au moyen de ses règles d'inférence. Si nous admettons les normes permissives habituelles de l'axiomatisation, il existe une axiomatisation complète pour un fragment de logique si et seulement si l'ensemble des énoncés logiquement vrais (valides) de ce fragment est récursivement énumérable.

(c) *La complétude déductive* est une propriété d'un système T d'axiomes non logiques *avec* une axiomatisation de la logique (une méthode de preuve logique formelle). Cela signifie qu'à partir de T on peut prouver au moyen de la logique sous-jacente soit C soit $\sim C$ pour tout énoncé C du langage en question.

(d) Il reste un usage du terme « complet » en relation avec les systèmes d'axiomes non logiques. On peut l'appeler *complétude hilbertienne*, car le *locus classicus* de ce terme est le soi-disant axiomes de complétude utilisé pour la première dans la seconde édition des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert (1899, seconde éd. 1902). À strictement parler, l'axiome apparaît pour la première fois dans Hilbert (1900). La difficulté à comprendre la notion de complétude est illustrée par les confusions entourant le « unglückseliges Axiom » de Hilbert (Freudenthal, 1957, p. 117). Le sens de « complétude » que cet axiome implique a d'abord été assimilé à l'autre sens de « complétude ». C'est seulement dans Baldus (1928) que nous trouvons clairement établie la différence entre la complétude hilbertienne et les autres sens de « complétude ».

L'axiome de Hilbert est en effet un principe de maximalité. Il dit que les modèles visés d'un systèmes d'axiomes sont tels qu'aucun nouvel objet géométrique ne peut leur être ajouté sans violer les (autres) axiomes du système. Les principes de maximalité de cette sorte jouent un rôle potentiellement important dans les fondements des mathématiques, mais la maximalité d'un modèle relativement aux individus qu'il contient est une idée fondamentalement différente de la maximalité du système, qui est ce dont traite la complétude aux sens descriptif et déductif.

122-30 Gödel & incomplétude déductive

aucune axiomatisation consistante T de l'arithmétique élémentaire, considérée avec une logique explicitement axiomatisée L, ne peut nous permettre de prouver (*i.e.* de prouver à partir de T avec les moyens de la logique L) soit S soit $\sim S$ pour tout énoncé S exprimable dans le langage de l'arithmétique élémentaire.

[…] si [nous avons à utiliser une logique incomplète], les résultats de Gödel n'impliquent rien concernant la possibilité de formuler des systèmes d'axiomes descriptivement complets pour l'arithmétique élémentaire, pas même au niveau du premier ordre habituel.

[…]

Dans cette optique, on doit dire que la communauté philosophique n'a pas reconnu à quel point le résultat d'incomplétude de Gödel était en fait limité. […] Les philosophes ont été impressionnés par le résultat de Gödel parce qu'ils ont surestimé l'importance des techniques déductives et computationnelles en mathématiques. […] En réalité, il est clair que l'incomplétude déductive n'est pas la plus importante des incomplétudes. Ce qui a attiré en premier lieu les mathématiciens, les scientifiques et les philosophes vers la méthode axiomatique, c'était la possibilité d'une maîtrise intellectuelle d'un domaine complet de vérités importantes, comme la maîtrise de toutes les vérités géométriques. Un système d'axiomes complet offrait un moyen d'atteindre une telle maîtrise. Mais ce type de maîtrise est en dernière analyse la maîtrise des modèles des axiomes, et pas des choses que nous (ou nos ordinateurs) pouvons prouver déductivement à leur sujet. […] C'est la quête d'une vue d'ensemble de tous les modèles d'une théorie donnée, et pas de ses conséquences déductives. […]

L'espèce de complétude pertinente […] est bien sûr la complétude *descriptive*. […]

[…] Tout ce qu[e le résultat d'incomplétude de Gödel] dit, c'est que les vérités arithmétiques ne peuvent pas êtres toutes listées, une par une, par une machine de Turing.

[…]

Donc, en un sens, le vrai message de Gödel était simplement l'incomplétude déductive de l'arithmétique. Comme tel, son célèbre résultat ne fait qu'affecter notre espoir d'une maîtrise déductive de l'arithmétique élémentaire, mais pas notre capacité à traiter cette branche des mathématiques d'un point de vue axiomatique ou descriptif, à moins que nos traitements axiomatiques soient contraints de n'utiliser que la logique du premier ordre ordinaire.

[…]

[…] rien n'est dit dans la caractérisation de [la complétude descriptive] au sujet de la méthode déductive éventuellement employée ; on n'a même pas besoin de soulever la question de la complétude déductive pour être capable de parler de la complétude descriptive. Celle-ci est en un certain sens une notion purement modèle-théorique.

[…]

Ces examen incomplet des problèmes de l'incomplétude conduit à un quasi renversement de l'image traditionnelle esquissée plus haut. L'incomplétude est un phénomène logique plutôt que mathématique. Il n'y a en principe aucun obstacle à ce que les mathématiciens atteignent la complétude qui est vraiment importante pour eux, à avoir la complétude descriptive. […] Mais pour l'atteindre, la logique sous-jacente doit être renforcée pour devenir sémantiquement incomplète.

À cet égard, la logique IF est faite sur mesure pour satisfaire ce besoin d'une logique forte et naturelle, qui soit en même temps sémantiquement incomplète.

129-30/132 Vers la complétude descriptive

Par exemple, on peut établir maintenant avec concision une raison pour laquelle la théorie des ensembles est inadaptée comme base des mathématiques. Le problème n'est pas que la théorie des ensembles a conduit à des paradoxes ni qu'elle menace de conduire à des paradoxes. Le problème n'est pas non plus son incomplétude déductive. C'est son incomplétude descriptive. C'est la raison pour laquelle la théorie des ensembles ne peut pas procurer d'objectifs, et encore moins d'indications, pour rechercher des postulats toujours plus forts qui fourniront de meilleurs méthodes déductives pour la théorie des ensembles elles-même.

[…]

[…] Je peux envisager un futur où le but typique d'un mathématicien ou d'un logicien sera de formuler des systèmes d'axiomes descriptivement complets qui seront déductivement incomplets. C'est le type de système axiomatique qui peut guider au mieux le mathématicien ou le logicien dans sa quête indéfinie de principes déductifs toujours plus forts pour une théorie particulière. La complétude descriptive fournit alors l'objectif qui peut aider à orienter la recherche du logicien vers des principes logiques plus forts qui pourraient procurer un plus grand pouvoir déductif.

[…]

[…] Ma caractérisation de la complétude descriptive peut provoquer des doutes, du fait qu'elle fait référence à la classes des modèles visés. Pour désigner ces modèles, on parle parfois de modèles standards. Pourtant, cet usage du terme « standard » est simplement un euphémisme pour « visé » (*intended*)

Chapitre VI : Qui a peur d'Alfred Tarski ? Les définitions de la vérité pour les langages du premier ordre IF

137-40 Sur le principe de compositionnalité de la vérité (des énoncés)

la vérité ne peut être attribuée qu'à des énoncés (ou formules closes), dont les expressions composantes sont souvent non pas des énoncés, mais des formules ouverts. Pour cette raison, on ne peut définir compositionnellement la vérité que conjointement à quelque autre concept sémantique comme la satisfaction. […]

[…]

[…] l'adhésion au principe de compositionnalité constitue sinon la réponse, du moins une bonne partie de la réponse à la question d savoir pourquoi Tarski a formulé sa définition de la vérité de la manière dont il l'a fait. De plus, je soupçonne que ce même principe a été opérant dans l'affirmation de Tarski que la vérité n'est pas définissable dans notre langage « familier » ordinaire. Tarski a fait porter la responsabilité de cette impossibilité supposée sur les irrégularités des langues naturelles. Je soupçonne que l'échec à se conformer au principe de compositionnalité a été la première « irrégularité » discernée par Tarski dans les langues naturelles.

[…]

[…] Par leur nature même, tous les cas d'indépendance entre quantificateurs (ou de tout autre sens d'indépendance informationnelle en logique) qui ne peuvent pas être traités en logique du premier ordre violent le principe de compositionnalité.

[…]

L'engagement des définitions de la vérité à la Tarski vis-à-vis de la compositionnalité est si profond que la gloire et la défaite du principe de compositionnalité sont pour une large part mesurées à l'aune des succès et des échecs de ces définitions. En montrant dans ce chapitres les limitations très importantes des définitions de la vérité à la Tarski, j'expose *ipso facto* certains graves défauts théoriques du principe de compositionnalité.

150-1/156-7/159 Avantages de la game-theoretical semantics (GTS)

ma définition de la vérité accomplit précisément ce que les définitions à la Tarski étaient accusées de ne pas faire. Elle relie directement la notion de vérité aux activités (les jeux sémantiques) au moyen desquelles, en un sens, nous vérifions et falsifions nos énoncés. Même les limitations implicitement contenues dans ce « en un sens » et qui sont expliquées au chapitre II, n'invalident pas ce point.

[…]

[…] Comme les définitions de la vérité à la Tarski suivent la ligne de la compositionnalité, elles doivent opérer de l'intérieur vers l'extérieur pour un énoncé donné. Elles ont donc besoin de points de départ pour la définition sous forme d'énoncés atomiques inanalysables. À l'opposé, les définitions *game-theoretical* de la vérité de l'espèce considérée dans ce travail opèrent de l'extérieur vers l'intérieur. Le jeu commence à partir d'un énoncé donné, et à chaque coup on le remplace par un énoncé plus simple pour le coup suivant. Maintenant, comme le sait tout théoricien des jeux, il n'y a en principe aucune obstacle à définir des stratégies gagnantes et perdantes, et ainsi de suite, même pour des langages infiniment profonds. […]

[…]

Philosophiquement, la conséquence la plus importante des résultats de ce chapitre réside indiscutablement dans la réfutation définitive du mythe suivant lequel la notion de vérité pour un langage suffisant fort serait inexprimable dans ce langage même. Appliqué à notre langage quotidien, ce mythe entraîne le mythe corrélé de l'ineffabilité de la vérité au sens ordinaire du terme. […] Dès que vous comprenez votre propre langage et sa logique, vous disposez de tout ce qu'il faut pour comprendre et même pour définir le concept de vérité.

[…]

[…] [Mon prédicat de vérité] n'est rien de plus et rien de moins que la déclaration d'indépendance de la théorie des modèles. Il montre que l'*on peut développer une théorie des modèles pour les puissants langages IF au niveau du premier ordre*, donc indépendamment de toutes les questions sur les ensembles et sur leur existence. […] La théorie des modèles de la logique du premier ordre est une partie de la logique, et pas une partie propre des mathématiques. […]

L'indépendance conceptuelle de la théorie des modèles vis-à-vis de la théorie des ensembles n'est qu'un aspect de la réévaluation, nécessaire et plus étendue, de nos idées sur les fondements des mathématiques et de la logique.

Chapitre VII : Le menteur démenti : la négation en logique IF

162-3 TE & stratégies ludiques

Ce principe du *tertium non datur* devient une supposition de détermination au sens de la théorie des jeux. Autrement dit, il affirme qu'il existe toujours une stratégie gagnante pour l'un ou l'autre des deux joueurs d'un jeu sémantique. […] Point de vue inédit, il n'y a par conséquence aucune raison de penser que la loi du tiers exclu doive valoir dans mes jeux sémantiques. C'est seulement par une coïncidence heureuse, pour ainsi dire, qu'elle est valable en logique du premier ordre ordinaire. En logique IF, on voit aisément qu'elle échoue, et qu'elle échoue de façon radicale.

[…] le théorème de séparation [...] dit que deux ensembles de formules d'un langage IF, conjointement inconsistants mais séparément consistants, disons σ et τ, peuvent toujours être « séparés » par une *unique formule du premier ordre ordinaire F*, au sens où $\sigma \vDash F$ et $\tau \vDash {\sim}F$.

Supposons maintenant que la négation contradictoire d'un énoncé du premier ordre IF S_1 soit d'une manière ou d'une autre exprimable dans le même langage, disons par l'énoncé S_2. Alors, en appliquant le théorème de séparation à $\{S_1\}$ et $\{S_2\}$, on voit que tous deux doivent être des énoncés de la logique du premier ordre ordinaire. Car il y a alors une formule de séparation S_0 qui appartient à la logique du premier ordre ordinaire, telle que :

$$S_1 \vDash S_0$$
$$S_2 \vDash {\sim}S_0$$

Mais comme $\vDash (S_1 \leftrightarrow {\sim}S_2)$, il s'ensuit que S_1 est équivalent à S_0 et S_2 à ${\sim}S_0$. Ceci montre que les seules formules IF dont la négation contradictoire peut être exprimée dans le langage IF sont précisément les formules du premier ordre ordinaire. En ce sens, la loi du tiers exclu vaut seulement dans le fragment d'un langage IF qui consiste en un langage du premier ordre ordinaire.

L'effet en est que dans les langages IF, la loi du tiers exclu échoue inévitablement.

163-6 Exemples d'énoncé fini ni vrai ni faux

[L'échec que j'ai décrit] n'a rien à voir […] avec l'infini. Plus loin (voir (v)), on donne le mini-exemple fini d'un énoncé se rapportant à un univers à six individus, où on peut littéralement voir (au moins après un temps de réflexion) qu'un énoncé particulier n'est ni vrai ni faux. […]

[…]

(v) Il pourrait être instructif d'illustrer ces remarques par un exemple simple. Pour cela, considérons un mini-univers composé de six entités, trois gentlemen (Alan, Brian et Cecil) qui partagent trois hobbies à savoir le rafting, le surf et le tennis. En indiquant les hobbies par une flèche [et en abrégeant les six entités par leurs initiales], nous pouvons résumer les relations par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ll} a \rightarrow r,\ a \rightarrow s & \\ b \rightarrow r,\ b \rightarrow t & \quad (D) \\ c \rightarrow s,\ c \rightarrow t & \end{array}$$

Pour simplifier, je vais tacitement restreindre les variables x et z aux *gentlemen* et les variables y et u aux *hobbies*. Considérez alors les énoncés suivants :

$$(\forall x)\ (\forall z)\ (\exists y)\ (\exists u)\ (\mathrm{H}(x, y)\ \&\ \mathrm{H}(z, u)\ \&\ y \neq u) \qquad (7.3)$$
$$(\forall x)\ (\forall z)\ (\exists y/\forall z)\ (\exists u/\forall x)\ (\mathrm{H}(x, y)\ \&\ \mathrm{H}(z, u)\ \&\ y \neq u) \qquad (7.4)$$
$$(\exists x)\ (\exists z)\ (\forall y)\ (\forall u)\ ((\mathrm{H}(x, y)\ \&\ \mathrm{H}(z, u)) \supset y = u) \qquad (7.5)$$

Ici l'énoncé (7.3) affirme que deux gentlemen distincts [???] ont des hobbies respectifs distincts, c'est-à-dire qu'il n'y a pas deux gentlemen distincts qui ont tous leurs hobbies en commun. De plus en considérant $x = z$ nous voyons que (7.3) implique que chaque gentleman a au moins deux hobbies. On voit immédiatement que (7.3) est vrai dans le modèle (D). On voit aussi que l'énoncé (7.5) est la négation contradictoire de (7.3) et qu'il est donc faux dans (D).

Il est clair que l'énoncé (7.4) est vrai si et seulement si il y a deux fonctions f et g telles que :

$$(\forall x) \quad (\forall z) \quad (H(x, f(x)) \ \&\ H(z, g(z)) \ \&\ f(x) \neq g(z)) \qquad (7.6)$$

Peut-on définir de telles fonctions sur le modèle (D) ? Regardons. Par symétrie, il suffit de considérer le cas :

$$f(a) = r$$

Alors, en substituant a à x et à z dans (7.6) on obtient :

$$H(a, f(a)) \ \&\ H(a, g(a)) \ \&\ f(a) \neq g(a)$$

Cela est possible uniquement si :

$$g(a) = s \qquad (7.9)$$

En posant $x = a$ et $z = b$, nous obtenons :

$$H(a, f(a)) \ \&\ H(b, g(b)) \ \&\ f(a) \neq g(b)$$

Cela est possible seulement si :

$$g(b) = t \qquad (7.11)$$

De la même manière que dans (7.9), on peut montrer que :

$$f(b) = r$$

De la même manière que dans (7.11), nous pouvons montrer que :

$$f(c) = s \qquad (7.13)$$

Mais nous pouvons alors substituer c à x et a à z, et obtenir :

$$H(c, f(c)) \ \&\ H(a, g(a)) \ \&\ f(c) \neq g(a)$$

ce qui d'après (7.9) est possible uniquement si :

$$f(c) \neq s$$

Mais cela contredit (7.13) et montre que (7.4) n'est pas vrai dans (D).

En examinant plusieurs fois ce raisonnement, vous pouvez atteindre un point où vous pourrez voir que (7.4) n'est pas vrai en inspectant directement le modèle. En d'autres termes, vous pouvez littéralement vous entraîner à voir à partir du modèle (D) que n'importe quelle stratégie qui tenterait de vérifier (7.4) pourrait être défaite par une contre-stratégie adéquate.

Maintenant, on peut facilement voir que (7.4) ne peut pas non plus être faux, en d'autres termes que mon opposant ne peut pas avoir de stratégie gagnante. Il n'y pas de moyen pour mon opposant de choisir x et z de telle sorte que je ne puisse pas, par un choix adéquat adéquat de y et u (c'est-à-dire par une stratégie ou une autre) établir que :

$$H(x, y) \ \&\ H(z, u) \ \&\ y \neq u$$

Par conséquent, ni (7.4) ni sa négation n'est vraie, ce qui veut dire que la loi du tiers exclu échoue pour (7.4).

[…] Dans le cas qui nous concerne, le fait combinatoire pertinent est fini. Cela montre que l'on ne peut d'aucune manière tenir l'infini pour responsable de l'échec du *tertium non datur*, même si dans d'autres cas la combinatoire (*combinatorics*) impliquée est infinitaire.

171/173 Négation revisited

Pour les conditions du théorème de Lindström, l'attention a surtout été portée sur la supposition que la logique en question est compacte et qu'elle valide le théorème de Löwenheim-Skolem. Comme la logique IF satisfait ces conditions et qu'elle est pourtant plus forte que la logique ordinaire au sens qu'on a donné à ce terme, ces deux suppositions ne peuvent pas être les plus importantes. En fait, le joker dans le paquet s'avère être la supposition de Lindström que la négation se comporte comme la négation contradictoire. Cette supposition n'est pas satisfaite par la logique du premier ordre IF, et pour cette raison elle peut être plus forte que la logique du premier ordre ordinaire, malgré le théorème de Lindström. La négation joue donc une nouvelle fois un rôle crucial dans les fondements de la logique. […]

[…]

[…] En un sens, le paradoxe du menteur a plus à voir avec notre concept de négation qu'avec notre concept de vérité.

174-5 Vérité formulable intrinsèquement

[…] la définissabilité de la vérité pour les langages IF a des conséquences énormes. Elle démolit une fois pour toutes le mythe selon lequel les concepts sémantiques comme la vérité ne peuvent pas s'exprimer dans le langage (suffisamment riche) auquel ils s'appliquent, tout autant que le mythe selon lequel une hiérarchie de métalangages à la Tarski est inévitable si nous voulons échapper aux paradoxes sémantiques, comme on l'a prétendu[…].

[…]

[…] l'existence d'une procédure complète de réfutation ne débouche pas sur des paradoxes, mais sur un résultat positif remarquable. Elle montre que si une assertion (par exemple, une théorie finiment axiomatisable) *T*, exprimable dans un langage du premier ordre IF, est consistante (au sens faible où elle n'est pas logiquement fausse), alors on peut prouver sa consistance (dans ce sens) en établissant la vérité d'un énoncé particulier dans le même langage.

180 Deux équivalences logiques IF

Nous devons simplement être attentifs quand nous utilisons la notion d'équivalence en logique IF. En fait, il pourrait être approprié de distinguer l'*équivalence forte* de S_1 et S_2, qui préserve la vérité et la fausseté, de leur *équivalence faible*, qui est le sens de l'équivalence logique employé jusqu'ici et qui signifie seulement que S_1 et S_2 sont *vrais* dans les mêmes modèles.

Une conséquence de cela, c'est que l'équivalence logique des traductions au second ordre de S_1 et S_2 garantissent uniquement leur équivalence faible, mais pas leur équivalence forte.

183 PA_2 descriptivement axiomatisable au premier ordre IF

[l'axiome d'induction au second ordre] est un énoncé Π_1^1, donc la négation contradictoire d'un énoncé Σ_1^1. Comme cet énoncé Σ_1^1 a une traduction équivalente en premier ordre IF, [l'axiome d'induction au second ordre] a une traduction équivalente dans le langage IF étendu correspondant. Et cela implique que la théorie élémentaire des nombres admet une axiomatisation descriptivement complète au moyen de la logique du premier ordre IF.

Chapitre VIII : La théorie axiomatique des ensembles – le monstre de Fraenkelstein ?

197-8/200 Pas d'univers ensembliste primitif univoque

La raison à première vue la plus respectable que je puisse trouver à entretenir une théorie axiomatique des ensembles incomplète, c'est de la penser comme une approximation de la chose réelle, une approximation qui peut être rendue toujours plus proche par l'ajout de nouveaux axiomes. Ce raisonnement comporte cependant une grave erreur. Parler d'approximations suppose qu'il y ait quelque chose à approcher. Et l'absence de modèle standard en théorie axiomatique des ensembles signifie qu'il n'y a apparemment rien à approcher. Nous n'avons aucune idée claire et non problématique de ce que peuvent être les modèles visés de la théorie des ensembles. Il n'y a donc aucun sens à parler d'axiomes additionnels qui puissent s'approcher au plus près de la structure du modèle visé de la théorie des ensembles.

[…] Comment les gens qui défendent cette idée [que les axiomes ensemblistes devraient être comparés les uns aux autres suivant le caractère plus ou moins « naturel » de leurs conséquences] savent-ils si ledit caractère naturel n'est pas dans l'œil du théoricien des ensembles, et par là indépendant des réalités modèles-théoriques de la situation ? Au lieu de nous appuyer sur de telles intuitions, nous devons réaliser qu'avoir une idée de ce que les axiomes sont supposés tenir dans la théorie des ensembles, c'est savoir quelque chose à propos de ce à quoi ressemblent les modèles visés de la théorie des ensembles. Et ce savoir est précisément ce que les philosophes n'ont pas, du moins pas avec suffisamment de clarté.

[…]

Même sans argument très détaillé, il est […] clair que le modèle itératif n'est pas ce que les pères fondateurs de la théorie des ensembles avaient en tête, et que ce modèle de la théorie des ensembles n'est pas particulièrement bien adapté pour servir de cadre aux mathématiques, notamment pour la recherche de nouveaux axiomes. Cette recherche est bien mieux guidée par une caractérisation suffisamment explicite du modèle visé, c'est-à-dire justement par ce qui n'a pas été fourni par les théoriciens des ensembles.

201 WHY SET THEORY?

pourquoi devrions-nous cultiver la théorie des ensembles ? La raison pour laquelle nous avons tout d'abord considéré la théorie des ensembles dans l'esprit présenté dans ce livre était que cette théorie (ou son équivalent) paraissait nécessaire pour la théorie des modèles de notre logique de base, c'est-à-dire pour la logique du premier ordre ordinaire. Cette motivation pour adopter la théorie des ensembles était très répandue parmi les logiciens d'orientation philosophique, et elle l'est probablement toujours.

205 ENSEMBLES & TARSKI-INCOMPLÉTUDE

[Le fait que le prédicat de vérité *game-theoretical* que je considère ne peut pas remplir sa fonction pour tous les énoncés de la théorie des ensembles] détruit la motivation principale en faveur de la théorie des ensembles, à savoir son rôle présumé de cadre canonique pour la théorie des modèles. L'échec de tout prédicat de vérité ensembliste auto-appliqué signifie que la théorie des ensembles ne peut pas constituer sa propre théorie des modèles plus adéquatement que ne le peut la logique du premier ordre ordinaire.

[…] L'échec du schéma-T de Tarski pour l'énoncé S (construit au moyen du lemme diagonal) signifie qu'il existe inévitablement dans tout modèle de la théorie des ensembles un énoncé ensembliste qui est vrai au sens ordinaire du mot, mais dont les conditions de vérité, quand elles sont exprimées en termes ensemblistes, sont fausses. […] un tel échec signifie qu'en théorie axiomatique des ensembles, un énoncé n'est pas toujours équivalent à la contrepartie ensembliste de sa traduction au second ordre.

206-7 AC ET ZF_2

Qu'a-t-il de si spécial dans l'échec de l'équivalence entre S_n et ses conditions de vérité T[**n**] ? Un premier élément est que […] l'équivalence entre un énoncé du premier ordre et ses conditions de vérité de second ordre n'est rien d'autre qu'une instance de l'axiome du choix ou de l'une de ses généralisations. […] dans les équivalence d'énoncés comme mon S_n avec leurs conditions de vérité, nous nous occupons simplement d'instances de traductions de généralisations de l'axiome du choix dans un langage ensembliste. Et pourtant on a vu que quelques-unes d'entre elles échouent inévitablement. Par conséquent l'échec de ces généralisations dans la théorie axiomatique des ensembles montre que l'axiome du choix devrait être réellement rejeté par les théoriciens des ensembles, puisqu'en effet ils en rejettent la motivation. […]

[…]

[…] Gödel défendait la formation de notre « intuition mathématique » de telle manière qu'elle nous indique la validité de nouveaux axiomes en théorie des ensembles. L'un des ensembles d'intuitions les plus fermement enracinées que nous paraissions avoir est l'ensemble des intuitions qui conduisent à l'axiome du choix. J'ai montré plus haut dans un esprit gödelien que ces mêmes intuitions justifiaient aussi bien des suppositions ensemblistes plus fortes, à savoir les contreparties ensemblistes des équivalences entre un énoncé ensembliste du premier ordre et ses conditions de vérité au second ordre. Pourtant ces hypothèses ensemblistes fortes s'avèrent contredire les axiomes admis de la théorie des ensembles. Cela signifie qu'une implémentation des plus naturelles de l'idée de Gödel ne conduit pas à une théorie des ensembles améliorée, mais au rejet de la théorie axiomatique des ensembles de premier ordre.

[…]

Nous sommes donc parvenus à un grave cas d'accusation contre la théorie axiomatique des ensembles. Pour chacun de ses modèles, on peut trouver un énoncé *S* dans le langage de la théorie des ensembles qui est vrai du point de vue de l'interprétation, mais qui est faux dans ce modèle. En résumé, **la théorie axiomatique des ensembles ne peut être vraie dans sa propre interprétation visée**. Quand nous essayons de construire le paradoxe du menteur pour la théorie axiomatique des ensembles, le menteur s'avère être la théorie axiomatique des ensembles elle-même.

207-9/210-2 ZFC VERSION IF ?

Plus généralement, les paradoxes antérieurs de la théorie des ensembles sont tous causés par la présence pour ainsi dire de trop d'ensembles censés exister d'après telle ou telle hypothèse ensembliste. L'accusation que je porte contre les formulations usuelles de la théorie des ensembles est qu'elles n'autorisent pas l'existence de fonctions (ou d'ensembles) qui devraient exister, et en ce sens qu'elles présupposent de trop peu d'ensembles qu'ils existent.

[…]

[…] Pourquoi ne pas unir nos forces et simplement mettre la logique IF au service de la théorie axiomatique des ensembles ? Hélas cette stratégie échouera à moins que les fondements de la théorie axiomatique des ensembles ne soient eux-mêmes radicalement révisés. […]

[…]

[…] quand un ensemble α est capturé au moyen d'une formule du premier ordre ordinaire F[x], cela peut s'exprimer par l'équivalence générale :

$(\forall x)\,(\,x \in \alpha \leftrightarrow \mathrm{F}[x]\,)$ (8.8)

Cette équivalence peut être utilisée comme une prémisse dans le raisonnement ensembliste. Mais si F[x] est une formule IF irréductible, alors (8.8) échoue à être vraie. La raison est qu'elle implique que F[x] obéisse à la loi du tiers exclu pour toutes les valeurs de x, ce qu'une formule irréductiblement IF ne fait pas, comme on l'a expliqué au chapitre VII.

[…]

L'existence (ou l'admissibilité) de définitions comme [$(\forall x)$ (P(x) $\Leftrightarrow S[x]$) où "$\Leftrightarrow$" dénote l'équivalence faible] est ce que l'axiome de réductibilité de Russell est supposé garantir[...]. Ce que l'on a prouvé, c'est qu'en logique IF aucun principe vaguement semblable à l'axiome de réductibilité de Russell ne tient.

[…]

[…] la tactique des théoriciens des ensembles qui consiste à essayer d'accéder aux ensembles via les prédicats dont ils sont censés être les extensions, ne fonctionne pas toujours une fois reconnue la possibilité de l'indépendance informationnelle.

Chapitre XI : La logique IF comme cadre de théorisation mathématique

216-22 Expressivités LPO ordinaire VS LPO IF

Il y a des concepts et des modes d'inférence cruciaux en mathématiques qui ne peuvent pas être capturés au moyen de la logique du premier ordre ordinaire. Cela inclut le principe d'induction mathématique et les notions de finitude, d'infinité, de bon ordre, de cardinalité, d'ensembles des parties, et ainsi de suite. Et la raison pour laquelle ces notions ne sont pas capturées par la logique du premier ordre ordinaire est beaucoup plus profonde que la simple incapacité à établir un système d'axiomes complet incorporant ces notions. L'impossibilité est modèle-théorique. Avec des énoncés du premier ordre ordinaire on ne peut simplement pas capturer la bonne classe de structures comme étant leurs modèles. […]

[…]

[…] L'équipotence peut être définie en logique du *premier ordre* IF, pour l'extension de deux prédicats du premier ordinaire, simples ou complexes, disons $\mathrm{F}_1[x]$ et $\mathrm{F}_2[x]$. La formule suivante suffit :

$$(\forall x)(\forall z)(\exists y/\forall z)(\exists u/\forall x)\;(\;\mathrm{F}_1[x] \supset \mathrm{F}_2[y] \;\;\&\;\; \mathrm{F}_2[z] \supset \mathrm{F}_1[u] \;\;\&\;\; (\,y = z \;\leftrightarrow\; u = \mathrm{x}\,)\,)$$

[…]

[…] en logique IF on peut exprimer l'infinité de l'univers du discours en utilisant = comme unique prédicat. La formule qui suit en est un bon exemple :

$$(\exists w)(\forall x)(\forall z)(\exists y/\forall z)(\exists u/\forall x)\;(\;y \neq w \;\;\&\;\; (\,x = z \;\leftrightarrow\; y = u\,)\,) \qquad (9.4)$$

On peut facilement voir que c'est équivalent à :

$$(\exists w)(\exists f)(\forall x)(\forall z)\;(\,f(x) \neq w \;\&\; (\,x = z \;\leftrightarrow\; f(x) = f(z)\,)\,) \qquad (9.4)$$

Si (9.4) ou (9.5) est vraie, alors l'univers doit être soit vide, soit infini.

[…]

En outre, on peut définir une profusion d'autres concepts mathématiques en logique du premier ordre IF ou dans sa version étendue. Cela inclut les concepts suivants :

(i) La notion de bon ordre. […]

(ii) De même, on peut formuler le principe d'induction mathématique en logique IF étendue[…]

(iii) La notion d'ensemble des parties peut être en un sens caractérisé en logique IF étendue […]. Le sens en question est que pour deux prédicats simples, A(x) et B(x), nous pouvons exprimer au moyen de la logique IF étendue que la cardinalité de B(x) est 2^{α}, où α est le cardinal de A(x).
Ce résultat montre incidemment que le théorème de Löwenheim-Skolem ne tient pas en logique IF étendue.

(iv) Le théorème de Bolzano-Weierstrass est exprimable en logique IF étendue. […]

(v) En topologie, on peut caractériser la notion d'ensemble ouvert au moyen de la logique du premier ordre IF. […]

(vi) Dans la même direction, la notion topologique de continuité peut être caractérisée en logique IF étendue. […]

(vii) Un certain nombre de vérités apparemment mathématiques (ensemblistes) s'avèrent également être des vérités de la logique IF. Un bon exemple en est fourni par le principe d'induction transfinie. […]

[…]

[…] ce que l'on a trouvé nous oblige à réviser radicalement nos idées sur la frontière entre logique et mathématiques. Plusieurs des concepts et modes d'inférence cruciaux des mathématiques, que l'on croyait inatteignables par les pouvoirs de la logique, se sont avérés être exprimables en logique du premier ordre IF.

230-3 Logique IF & combinatoire

Un énoncé du premier ordre IF est valide si et seulement si une certaine structure relationnelle est obligatoirement instanciée dans tout modèle. Le problème de savoir si un énoncé IF est valide ou non est donc un problème combinatoire dans un sens suffisamment large du terme. Ce sens n'est en fait pas aussi lâche qu'on pourrait le croire à première vue. La réduction par Hao Wang[...] du problème de la décision pour la logique de premier ordre ordinaire à des problèmes de dominos montre à quel point il est naturel de concevoir ce qui se produit en logique du premier ordre ordinaire comme étant fondamentalement combinatoire. Et à cet égard, la logique du premier ordre IF ne diffère pas en principe du cas ordinaire. […]

[…]

[…] La principale différence entre nous et Hilbert, c'est que Hilbert pensait que la combinatoire *finie* est tout ce dont nous avons besoin. Ce n'est pas le cas, et les aspects les plus intéressants la logique du premier ordre IF incarnent des problèmes de combinatoire *infinie*. Tant que nous pouvons ignorer cette différence, notre approche peut toutefois être conçue comme une justification de celle de Hilbert.

[…]

[…] Le lien entre ce que j'appelle ici raisonnement combinatoire et logique du premier ordre s'accorde avec le fait que l'une des étapes cruciales dans la cristallisation de la logique du premier ordre a été réalisé par Hilbert et Ackermann[...]. Mais Hilbert n'était pas satisfait par cette systématisation. Il a essayé de rendre plus explicite la nature des quantificateurs comme incarnations de certaines fonctions de choix à l'aide de son calcul-epsilon. Comme on l'a noté plus haut, Hilbert espérait de cette manière justifier l'axiome du choix apparemment ensembliste. On peut concevoir cette tentative comme une autre manière d'essayer d'implémenter les idées qui sont systématisées en théorie sémantique des jeux. En outre, Hilbert n'était pas complètement satisfait non plus par le traitement de la négation tel qu'il est codifié dans les systèmes habituels de logique de premier ordre. Pour ces raisons, il pourrait être tromper de parler de ses préférences logiques comme étant du premier ordre.

235 Skolem

Le paradoxe de Skolem est moins un paradoxe qu'un aperçu sur les limitations de la logique du premier ordre ordinaire. Il s'appuie sur le théorème de Löwenheim-Skolem qui dit que si un énoncé du premier ordre est satisfaisable dans un modèle infini, alors il est satisfait (ou vrai) dans un modèle *dénombrable*. Il découle de ce métathéorème que les langages du premier ordre n'offrent pas un véhicule satisfaisant pour discuter des ensembles indénombrables, car aucune formule ni aucun système d'axiomes du premier ordre ne peuvent distinguer un ensemble indénombrable parmi des ensembles dénombrables.

239 Un refuge primitif ?

le bastion des défenseurs de la notion de vérité en contexte mathématique a toujours été la structure des nombres naturels. Elle nous est si merveilleusement familières que l'on pense spontanément que l'arithmétique élémentaire s'occupe de la vérité et de la fausseté dans cette structure (ou dans ce modèle visé).

Chapitre XI : L'épistémologie des objets mathématiques

267-8 Intuitionnistes & constructivistes

aucun lecteur des écrits de Brouwer (1975) ne peut manquer d'être impressionné par le rôle des idées épistémiques dans son argumentation. Un exemple particulièrement révélateur est fourni par sa technique caractéristique et cruciale des « contre-exemples faibles »[...]. Un tel contre-exemple à un principe logique ou mathématique ne montre pas que ce principe est faux dans un quelconque sens habituel. Il montre le caractère inacceptable de ce principe en montrant que son acceptation implique que « nous devrions avoir une certaine connaissance (…) qu'en fait nous ne possédons pas »[...]. Ceci paraît donc être la ligne de démarcation entre constructivistes et véritables intuitionnistes : les intuitionnistes mettent l'accent sur le rôle de la connaissance en mathématique tandis que les constructivistes font primer l'effectivité des constructions et autres opérations. Les constructivistes sont des mathématiciens fais-le-toi-même, les intuitionnistes des connais-le-toi-même.