Pour l'honneur de l'esprit humain
Les mathématiques aujourd'hui

Jean DIEUDONNÉ
1987

éd° Hachette
coll° Pluriel

11 Structures

il faut comprendre que, pour ces objets, l'essentiel consiste, non en leurs particularités apparentes, mais dans les relations qu'ils ont entre eux. Elles sont souvent les mêmes pour des objets qui paraissent très différents, et il faut donc les exprimer d'une façon qui ne tienne pas compte de ces apparences : si l'on veut par exemple énoncer une relation qui peut être définie aussi bien entre des nombres qu'entre des fonctions, cela ne peut se faire qu'en introduisant des objets qui ne sont ni des nombres, ni des fonctions, mais qui peuvent être *spécialisés* à volonté en nombres, ou en fonctions, ou en bien d'autres sortes d'objets mathématiques. Ce sont ces objets « abstraits » dont on fait l'étude dans ce qu'on a fini par appeler les *structures* mathématiques

29-30 Maths pures & appliquées

il semble communément admis qu'une science, ou partie de science, est « fondamentale » si elle a pour but la compréhension des phénomènes, « appliquée » si elle vise à la maîtrise de ces phénomènes par l'homme, à ses propres fins, bonnes ou mauvaises. […]

En quoi consistent alors les « applications » des mathématiques ? Il me semble qu'on peut les décrire de la façon suivante. Il s'agit de prévoir le comportement de certains objets du monde sensible dans des conditions données, compte tenu de lois générales régissant ces comportements. On fabrique un *modèle* mathématique de la situation étudiée, en attachant aux objets matériels qu'on étudie des objets mathématiques qui sont censés les « représenter », et aux lois auxquelles ils sont soumis des *relations* mathématiques entre ces derniers ; le problème initial est lors *traduit* en un problème mathématique. Si on peut le résoudre, de façon exacte ou approchée, on traduit la solution en sens inverse, et qui « résout » le problème posé.

36 Sur l'inutilité

Comme l'écrivait déjà Fontenelle en 1699 : « On appelle d'ordinaire inutiles les choses que l'on ne comprend pas. C'et une espèce de vengeance, et comme généralement les mathématiques et la physique ne sont pas comprises, elles sont déclarées inutiles. »

41 Objets et idées mathématiques

Les objets dont s'occupent les mathématiciens portent les mêmes noms que ceux qui entrent dans les calculs pratiques : nombres, figures géométriques et grandeurs. Mais, dès l'époque de Platon, les mathématiciens ont conscience que, sous ces noms, ils raisonnent sur des êtres tout à fait différents, des êtres *immatériels* obtenus « par abstraction » à partir d'objets accessibles à nos sens, mais qui n'en sont que des « images ».

44 Crues du Nil

Les grecs insistent sur le fait que, les crues Nil modifiant la forme des champs, l'appel à un homme de l'art, un scribe détenteur des formules, était nécessaire pour que chacun retrouve après la crue un lopin de terre équivalent à celui qu'il possédait auparavant.

53-4 Définitions et axiomes

On se demande aussitôt comment on peut raisonner correctement en évitant de définir les choses dont on parle, et en échappant ainsi à une régression indéfinie dans les définitions ? La réponse est très simple : il suffit de s'astreindre à ne *jamais* énoncer sur les objets de la géométrie et leurs relations aucune proposition qui ne soit conséquence logique du système d'axiomes qui les régit (eux aussi énumérés *exhaustivement*). Comme l'a écrit Poincaré, on peut dire que ces axiomes constituent des « définitions déguisées » des objets et relations qui y figurent ; ces derniers se sont en quelque sorte évanouis, remplacés par le faisceau de leurs propriétés axiomatiques.

Hilbert, après Pasch, a indiqué un moyen d'éviter des conclusions que pourrait suggérer l'intuition géométrique, mais qui ne dérivent pas des axiomes : ce serait de changer les noms usuels des objets de la géométrie et de leurs relations. Hilbert proposait de dire « table », « chaise » et « chope » pour « point », « droite » et « plan »(**). Par exemple, les deux premiers axiomes de la liste de Hilbert :

1) « Deux points distincts appartiennent à une droite et une seule »,
2) « Il y a au moins deux points distincts appartenant à une même droite », deviendraient :
1) « Deux tables distinctes appartiennent à une chaise et une seule »,
2) « Il y a au moins deux tables distinctes appartenant à une même chaise. »

Il est clair qu'on ne risquerait pas d'erreur involontaire sur de tels énoncés dépourvus de sens dans le langage courant.

Cela peut paraître une plaisanterie ; en fait, cette dissociation du sens et du nom concrétise, pour la géométrie élémentaire, le processus fondamental qui a libéré la mathématique des chaînes qui l'attachaient trop étroitement au réel ; il a permis toutes les conquêtes inespérées réalisées depuis un siècle et ses applications surprenantes à la physique.

(**) La possibilité de choisir arbitrairement un mot pour définir un objet, c'est-à-dire abréger l'énoncé des propriétés qui le caractérisent, est déjà notée par Platon (Lettre VII, 343 b) ; la remarque est reprise par d'Alembert, qui déclare dans l'*Encyclopédie* que rien n'empêcherait d'appeler « triangle » ce qu'on appelle communément « cercle ».

67-9 Naissance des fonctions

La méthode des coordonnées est aussi à la base des deux autres grands progrès accomplis au XVII^e siècle : l'introduction de la notion de *fonction* et le calcul infinitésimal. On dit souvent que les conceptions mathématiques des Grecs étaient fondamentalement statiques et on les oppose à l'idée de variation qui domine la pensée scientifique moderne. Il est bien vrai que les *Éléments* d'Euclide sont centrés sur l'étude de figures dont la position et la grandeur sont *fixes*. Mais dès le début de la pensée grecque, les tentatives de compréhension des mouvements et des changements de forme ou de nature n'avaient pas cessé de préoccuper les philosophes, et les notions de mouvement *uniforme* – rectiligne ou circulaire – avaient été clairement dégagées dès que l'on avait su mesurer le temps. On sait que c'est par des combinaisons de ces mouvements que les systèmes astronomiques des Grecs tentaient de rendre compte des trajectoires des planètes. […]

Il semble que ce soit avant tout pour l'étude des mouvements rectilignes non nécessairement uniformes – notamment la chute des corps, sujet qui préoccupait beaucoup les écoles philosophiques du Moyen Âge – qu'Oresme, au XIV^e siècle, a sans doute pour la première fois eu l'idée de représenter la variation d'une grandeur qui change avec le temps par un *graphique*, où la mesure du temps est portée en « abscisse » sur OX, et pour chaque valeur *t* de cette grandeur, on porte en « ordonnée » la valeur à cet instant de la grandeur variable […] ; les points obtenus constituent le graphique. Oresme considère aussi qu'au lieu du temps, on peut porter en abscisse tout « qualité » qui peut se repérer par un nombre ; à notre époque le procédé est devenu omniprésent et souvent abusif. [figure]

Au XVII^e siècle, il se conjugue avec la méthode des coordonnées, pour familiariser avec l'idée d'un nombre *y* « dépendant » d'un nombre *x* qui varie dans un intervalle *I*. À la fin du siècle, on dire que *y est fonction de x* ; son graphique est donc une courbe rencontrée en un seul point par les parallèles à OY passant par un point de *I*. Mais *inversement* toute courbe ayant cette propriété définit une fonction : par exemple, le demi-cercle de centre O et de rayon 1 situé au-dessus de OX […] définit dans l'intervalle -1<x<1, la fonction y=sqrt(1-x²).

C'est cette correspondance qui au XIX^e siècle permettra de définir une notion générale de fonction comme un objet mathématique au sens platonicien.

113-5 Renaissance des mathématiques début XIX^e

Le XVIII^e siècle avait été une éclatante période de développement intensif des techniques introduites u XVII^e en mathématiques, surtout en analyse et dans ses applications variées, tant à d'autres disciplines mathématiques comme la géométrie et le calcul des probabilités, qu'à la mécanique et l'astronomie, avec le succès que l'on connaît pour la prévision des phénomènes naturels. Mais, curieusement, le siècle paraît aboutir à une impasse. Les grands mathématiciens du milieu du siècle disparaissent, Daniel Bernoulli en 1782, Euler et d'Alembert en 1783 ; Lagrange, qui atteint à peine la cinquantaine, estime l'ère des progrès en mathématiques pures est terminée, et après 1785, lui-même et Monge se tournent vers la physique et la chimie, tandis que Laplace est uniquement occupé de mécanique et du calcul des probabilités. Surviennent les années révolutionnaires, qui mettent les savants au service de la nation et de la guerre, si bien que la décennie 1786-1796 n'est marquée en France par aucun résultat mathématique nouveau de quelque importance. De telles périodes creuses, liées à des troubles sociaux, se sont reproduites de nos jours dans plusieurs pays ; mais à cette époque, aucun pays en dehors de la France ne compte de mathématicien actif comparable à ceux que nous venons de nommer, si bien que la stérilité est universelle.

C’est donc une véritable Renaissance qui débute avec Gauss en 1796 ; formé par la seule lecture des œuvres de ses prédécesseurs, il va en quinze ans renouveler toutes les mathématiques. À partir des premières années du XIX^e^ siècle, il n’est plus seul. Une des innovations les plus fécondes de la Révolution a été la création d’un véritable enseignement supérieur des sciences, donné par des professeurs éminents et ouvert à tous. L’École polytechnique – bien que destinée en principe à former des militaires et des ingénieurs – ne va pas cesser pendant 75 ans d’être une pépinière de mathématiciens, de physiciens et de chimistes de premier ordre ; en dehors de Gauss, les mathématiciens sortis de l’École polytechnique n’auront pas de rivaux pendant avant 1825.

Ce sont des idées exprimées au XVIII^e^ siècle et même auparavant qui vont servir de base à cette Mais presque tout de suite, le style et le contenu changent, non seulement par le fameux « retour à la rigueur » mis en œuvre par Gauss, Bolzano, Cauchy et Abel […], mais aussi par l’introduction de nouveaux objets mathématiques, qui se distinguent des objets classiques *parce qu’ils n’ont pus »images » accessibles à nos sens*.

[…]

Peu à peu se dégage une idée générale qui se précisera au XX^e^ siècle, celle de *structure* à la base d’une théorie mathématique ; elle est la conséquence de la constatation que ce qui joue le rôle primordial dans une théorie, ce sont les *relations* entre les objets mathématiques qui y figurent, plutôt que la *nature* de ces objets, et que dans deux théories très différentes, il se peut que des relations s’expriment de la *même* manière dans les deux théories ; le système de ces relations et de leurs conséquences est une même structure « sous-jacente » au deux théories.

On montrera sur plusieurs exemples accessibles au lecteur comment sont apparues, tout au long du XIX^e^ siècle, plusieurs des grandes structures qui sont à la base des mathématiques de notre temps. Il faut souligner que, dans presque tous les cas, cette apparition a répondu à un *besoin* pour attaquer avec succès des problèmes hérités des mathématiques *classiques*, et non à une fantaisie de mathématicien créant de nouvelles notions abstraites sans aucun but précis.

Le fait que la même structure puisse apparaître dans des théories très différentes va faire prendre de plus en plus conscience de l’*unité* foncière de *la* mathématique, par-delà le cloisonnement traditionnel basé sur la nature des objets étudiés. Mais il faudra longtemps pour que cette vue d’ensemble se dégage

136/138-9 Unité de la mathématique

C’est aussi la théorie de Galois et le développement de la théorie des groupes qui ont permis de déterminer tous les problèmes de la géométrie que l’on peut résoudre « par la règle et le compas ». Ce qu’on doit particulièrement souligner, c’est qu’il *fallait*, pour arriver à la solution de ces problèmes, résolument *sortir* de l’algèbre classique et introduire les nouveaux objets « abstraits » que sont les groupes de substitutions, d’une nature toute différente des équations algébriques. C’est la même démarche que suivront un peu plus tard Dirichlet et Riemann en abordant l’étude des nombres premiers par l’introduction de fonctions analytiques […] ; on doit y voir les premières manifestations de l’unité de profonde des mathématiques, brisant les cloisonnements traditionnels.

[…] avant 1850, personne apparemment n’écrit que jamais que les nombres réels ou complexes forment un groupe pour l’addition, ou les nombres rationnels positifs un groupe pour la multiplication ! On touche là du doigt la difficulté qu’ont eue les mathématiciens du XIX^e^ siècle à se dégager de la conception traditionnelle de la division des mathématiques en parties caractérisées par les *objets* mathématiques étudiés : entiers pour l’arithmétique, équations pour l’algèbre, espace et figure pour la Géométrie, fonctions pour l’analyse. Il a fallu tout le XIX^e^ siècle pour briser ce cloisonnement rigide et arrive à la conception moderne où ce sont les *relations* entre objets qui comptent.

139/142 Motivation & naturel des théories

la notion de groupe s’[est] introduite d’*elle-même*, au cours d’études de problèmes d’origine très diverse, où elle se révélait sous-jacente de façon *naturelle*. De même l’introduction des nombres complexes était *inéluctable* dès qu’on voulait approfondir la résolution des équations algébriques. On peut dire que ces deux théories sont *motivées*.

Il n’en a pas été de même de la théorie des *quaternions*, découverte par Hamilton en 1843 ; c’est le premier exemple historique et le prototype d’une théorie introduisant de nouveaux objets qui, au moment où on les définit, ne répondent à aucun besoin, mais sont suscités par la seule curiosité, « pour voir ».

[…]

Ayant ainsi brillamment résolu son problème, Hamilton se demanda à quoi pourraient « servir » ses quaternions, et les 20 dernières années de sa vie furent consacrées à cette recherche, aidé par quelques disciples un peu trop enthousiastes. Il faut bien avouer que leurs résultats restèrent assez maigres, et ils ne parvinrent pas à faire partager à la communauté mathématique de l’époque que la théorie des quaternions était une panacée pour tous les problèmes. C’est beaucoup plus tard, à la fin du XIX^e^ siècle, que les quaternions apparurent de façon *naturelle* dans des théories comme la représentation linéaire des groupes ou la structure des groupes de Lie, théories qui n’existaient pas à l’époque d’Hamilton.

143 Ensembles avant l'heure

Les mathématiciens de tout temps ne peuvent […] s'empêcher de parler des ensembles formés par les objets qu'ils considèrent, et des parties de ces ensembles, sous des noms variés : « lieux géométriques » de points du plan satisfaisant à une propriété donnée, « classes » de nombres ou de formes quadratiques chez Euler et Gauss, « sous-groupes » pour Cauchy et Galois, « Mannigfaltigkeiten » (« multiplicités ») de dimension quelconque chez Riemann, « set » (« ensemble ») de symboles chez Cayley ; les auteurs allemands utilisent aussi « Gesamtheit », « Inbegriff », « System », « Gebiet » ; le mot « Menge », déjà employé par Bolzano, ne deviendra prédominant qu'avec Cantor.

Toutefois, un lecteur moderne peut être surpris de constater que les mathématiciens grecs ne parlent jamais de « l'ensemble des entiers », ni de « l'ensemble des points du plan », notions qui pourtant nous paraissent familières. C'est que ces ensembles sont « infinis », notion purement négative, difficile à concevoir et qui a fait l'objet de débats sans nombre au sein des écoles philosophiques […]. On doit voir sans doute dans ce fait une des raisons qui motivent la répugnance des mathématiciens, d'Euclide à Cauchy, à parler de cette notion, de peur de s'engager dans des controverses dont ils redoutent la futilité. […] Bolzano paraît avoir été le premier mathématicien qui ait librement parlé d'ensembles infinis ; mais il faudra attendre Dedekind pour avoir une véritable définition mathématique de ces objets

155 Géométrie à la Klein

L'importance de cette dernière structure [d'action d'un groupe G sur un ensemble E] provient de ce que, depuis Klein (1873), c'est elle qu'on désigne comme *une géométrie de groupe* G, unifiant ainsi les diverses notions géométriques (géométrie projective réelle, géométrie projective complexe, géométries non euclidiennes) qui s'étaient développées depuis le début du XIX^{e} ; la géométrie euclidienne classique à 2 ou 3 dimensions est, pour Klein, une « géométrie » où E est le plan $\mathbf{R}^2$ ou l'espace $\mathbf{R}^3$, et G le *groupe des déplacements* […]. Un « théorème de géométrie » pour Klein est une relation entre éléments ou parties de E qui est *invariante* par l'action de G, c'est-à-dire qui est encore vraie quand on remplace les éléments x, y, z, … de E qui y figurent par λ.x, λ.y, λ.z, …, pour un opérateur λ [dans] G *quelconque*, et de même pour les parties de E ; c'est évidemment ce qui se passe pour tous les théorèmes d'Euclide.

157 Les diverses structures du continu

On voit […] que sur l'ensemble des nombres réels s'entrecroisent des structures diverses : corps, ordre, topologie. Il y a aussi la notion de *mesure* sur **R**, que nous ne pouvons décrire en détail en raison de sa technicité, mais qui joue un rôle essentiel en analyse, car elle permet d'attacher un nombre positif ou nul, non seulement aux intervalles [a, b] (où c'est simplement la « longueur » b–a), mais aussi à tous les ensembles que l'on rencontre dans les principaux problèmes. C'est essentiellement à Cantor que l'on doit d'avoir su discerner cette multiplicité de points de vue sous lesquels on peut considérer l'ensemble des nombres réels ; pendant la plus grande partie du XIX^{e} siècle, on parlait du « continu » sans distinguer les diverses structures qui y étaient définies, ce qui entraînait de curieuses confusions

174-5 Évolution des mathématiques

lorsqu[e ces erreurs] deviennent si grandes que la théorie [physique] ne peut plus les expliquer, il faut la modifier, au besoin en bouleversant ses bases ; il est bien connu que cela s'est produit à plusieurs reprises depuis 80 ans.

Il n'y a rien de semblable en mathématiques. Une fois que la démonstration d'un théorème à partir d'un système d'axiomes a été reconnue correcte, le théorème n'est plus jamais remis en question ; les théorèmes d'Euclide sont toujours aussi valables aujourd'hui qu'il y a 2300ans. Est-ce à dire qu'il n'y a pas d'évolution en mathématiques ? Tout ce que nous avons décrit […] prouve le contraire. Mais cette évolution ne consiste pas uniquement en l'accumulation de nouveaux théorèmes. Ceux-ci ne se superposent pas seulement aux anciens, ils les absorbent en les transformant en « corollaires », qui finissent parfois par ne plus même être mentionnés explicitement, sinon par les historiens. La formulation même des théorèmes peut changer complètement : par exemple, la description des polyèdres réguliers, point culminant de la géométrie grecque, s'énonce maintenant comme description de sous-groupes finis du groupe de déplacements de l'espace à 3 dimensions […]

Le changement dans la conception des mathématiques, qui se produit d'une génération à la suivante, est donc une *réorganisation* tenant compte des nouvelles acquisitions et de leurs relations avec les théorèmes plus anciens. Depuis Euclide, ce changement s'est toujours concrétisé dans des ouvrages d'exposition ; depuis le début du XIX^{e} siècle, ce sont surtout des manuels destinés aux étudiants de différents niveaux. C'est en comparant ces ouvrages que les historiens des sciences peuvent se rendre compte de la façon de penser des membres de la communauté des mathématiciens à une époque déterminée, et non seulement celle des génies qui dominent cette époque ; presque invariablement, leur pensée se projette bien au-delà, et préfigure ce qui deviendra communément admis dans la génération suivante. Actuellement, les théories mathématiques sont exposées en les classant en gros comme nous l'avons fait ci-dessus, suivant les structures qui y interviennent. Mais il n'en est ainsi que depuis une cinquantaine d'années, alors qu'historiquement la conception de ces structures et leurs utilisations remontent au XIX^e siècle et au premier tiers du XX^e siècle, comme nous avons essayé de le montrer.

Si les mathématiques n'ont ainsi cessé de progresser de plus en plus rapidement depuis le XVI^e siècle, c'est avant tout grâce à l'afflux ininterrompu des problèmes qui se sont posés aux mathématiciens : « Une branche de la science », dit Hilbert, « est vivante aussi longtemps qu'elle offre une foule de problèmes. Le manque de problèmes signifie sa mort ou la fin de son développement ».

Commentaire. La première phrase mériterait nuance à la lecture de Pierre Duhem. D'une part parce qu'une théorie physique *est* une théorie mathématique, dont le pouvoir explicatif ne saurait être évoquée sans pénétrer le terrain de la *méta*physique, d'autre part parce que (citer Duhem pour ce qui reste toujours dans une théorie) ???

176-80 INTUITION

Tous les grands mathématiciens qui ont parlé de leurs travaux se sont toujours plus à insister sur le rôle qu'y joue ce qu'ils appellent généralement leur « intuition » (*Les Anglo-saxons emploient plutôt le mot « insight », qui convient peut-être mieux qu'un terme ayant une résonnance un peu « magique ».) […] La difficulté [pour renoncer à prendre le mot « intuition » au sens qu'on lui donne d'ordinaire] est que ce que le mathématicien appelle « intuition » est pour lui une expérience psychologique tout à fait personnelle, à peu près incommunicable et il y a tout lieu de croire que les « intuitions » de deux mathématiciens sont le plus souvent très différentes.

[…]

Comment le mathématicien d'aujourd'hui peut-il s'engager dans ce parcours vers la découverte […] alors que les notions qu'il manie sont entièrement dépourvues de toute « image » sensible ? Je crois qu'il se créé pour lui-même des images purement mentales et incommunicables de ces objets mathématiques. La formulation précise des axiomes qui les définissent, d'où ont été éliminées toutes les particularités superflues qu'ils peuvent présenter dans les utilisations diverses de leur structure, peuvent aider à la formation de ces image ; en d'autres termes, et bien que cela puisse paraître paradoxal, l'abstraction peut être utile à la formation de l' »intuition » plutôt qu'elle ne la paralyse.

[…] L'expérience prouve que bon nombre de résultats de la géométrie à 3 dimensions ont des généralisations « naturelles » dans ce cadre élargi : pour donner un exemple simple et assez grossier, le fait que dans l'espace usuel une droite et un plan se rencontrent « en général » en un seul point, a pour extension le fait que dans un espace à n dimensions, on doit s'attendre à ce qu'une variété à p dimensions et une variété à n-p dimensions aient une intersection formée « en général » de points isolés. Ce transfert de l'« intuition géométrique » usuelle en une nouvelle « intuition abstraite » qui se laisse guider par ces analogies verbales, se révèle d'une remarquable efficacité et il serait dommage de ne pas l'utiliser ; presque invariablement, le remplacement du langage algébrique par le langage géométrique apporte des simplifications considérables et fait apparaître des propriétés qui restent insoupçonnées lorsqu'elles sont enfouies sous un fatras de calculs.

[…]

Nous avons insisté sur ce « transfert » des idées tirées de l'entraînement au raisonnement géométrique acquis dans l'enseignement élémentaire, parce ce qu'il est sans doute le plus frappant et le plus étendu. Mais il y a beaucoup de transferts analogues d'idées provenant de l'algèbre, ou de l'analyser, ou de la théorie des nombres. Ils illustrent le caractère dominant de la mathématique actuelle, sur lequel on ne saurait trop insister, son *unité*.

225-6 CONTRE-EXEMPLES & INTUITION

Banach a pu montrer qu'en un sens très raisonnable, il y a « beaucoup plus » de [fonctions continues nulle part dérivables] que de fonctions dérivables […].

Ce n'était là que le début, et les « contre-exemples » de ce genre sont devenus si nombreux qu'on a pu en faire des volumes entiers. Bornons-nous à citer, parmi les plus biscornus : une fonction *dérivable*, non constante dans aucun intervalle, qui n'en a pas moins une infinité de maxima et de minima dans tout intervalle ; dans l'espace, une « surface » telle qu'elle est « mur mitoyen » de *trois* chambres à la fois, ce qui est assez difficile à imaginer ! Mais le plus étrange est sans doute la « courbe » inventée par Peano : elle est définie par deux fonctions *continues* […] et *remplit le carré* […].

Que montrent ces exemples ? Simplement, à mon avis, qu'il n'y a que des rapports tout à fait superficiels entre notre prétendue « intuition » de l'espace et les axiomes définissant les objets mathématiques de la géométrie, contrairement à ce que pensaient les mathématiciens des XVII^e et XVIII^e siècles. Parler de « vérité » de ces axiomes, au sens où l'on entend communément ce mot, paraît donc absurde.

249 RIGUEUR EN MATHÉMATIQUE

Dans les cas précédents [I) « faute de calcul » banale ou II) négligence de vérifier toutes les inférences], il est assez rare qu'il faille attendre longtemps pour que la démonstration soit rectifiée. La situation est toute différente lorsqu'il s'agit de prétendues démonstrations, viciées dès le début parce qu'elles sont relatives à des objets *non définis* de façon précise. C'est ce qui s'est passé en analyse aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, puisqu'on raisonnait sur des « infiniment petits » ou sur la « somme » d'une série, sans jamais être en état de dire ce que cela signifiait. Bien entendu, dans la plupart des cas, les meilleurs mathématiciens de l'époque avaient une idée juste de ce qu'ils pouvaient faire avec ces notions vagues, et leurs remarquables découvertes les encourageaient à aller de l'avant ; mais ils ne pouvaient exprimer leurs preuves dans un langage proprement mathématique ; et s'il n'a pas été difficile, au XIX^{e} siècle, de donner des démonstrations entièrement correctes de leurs résultats, cela n'est devenu possible qu'après avoir clairement dégagé la notion de limite comme concept de base, et en avoir entièrement codifié les propriétés […]

Il est facile de conclure. Il ne peut y avoir de démonstration « rigoureuse » qu'au sein d'une théorie axiomatique, où objets et relations « primitives » ont été spécifiés, et les axiomes qui les relient énumérés de façon exhaustive ; et si on ne tient pas compte des inadvertances ou négligences mentionnés en I) et II), cette condition nécessaire est aussi suffisante ; « manque de rigueur » signifie exactement « manque de précision ».

L'histoire corrobore cette affirmation dans tous les cas. Il n'y a *jamais* eu de controverse sur ce qu'est une démonstration « rigoureuse » en arithmétique ; pas davantage en analyse après Weierstrass ; pas davantage en topologie algébrique depuis 1930, ni en géométrie algébrique depuis 1950. Bien entendu, il n'est pas exclu que dans l'avenir, des mathématiciens veulent développer une théorie sans la mettre sous forme axiomatique ; jusqu'à ce qu'eux-mêmes ou d'autres arrivent à le faire, la théorie risquera d'être considérée comme « non rigoureuse » par la communauté mathématique.