Hilbert et la notion d'existence en mathématiques

Jacqueline BONIFACE
2004

éd° Vrin
coll. Mathesis

25 Créer : oublier la construction

Dedekind insiste […] sur ce point, c'est en un véritable acte de création que consiste son travail ; il ne s'agit pas simplement, chaque fois, de procéder à une *construction*, à partir d'éléments existants, par des procédés plus ou moins compliqués, ; mais une telle construction, si elle est nécessaire, doit cependant disparaître pour qu'un objet *nouveau* voit le jour.

[note de bas de page] Il est à remarquer que Poincaré voit chez Weierstrass cette même volonté que les matériaux de construction soient oubliés dans l'objet « construit ». S'il conserve le terme de « construction » pour désigner le nouvel objet, il oppose cependant une telle idée de la construction d'objet mathématique à celle qu'il attribue à Kronecker qui, selon lui, voudrait garder apparents les matériaux de la construction : « Dès qu'il [Weierstrass] a élevé une construction, il oublie de quels matériaux elle est faite et n'y veut plus voir qu'une unité nouvelle dont il fera l'un des éléments d'une construction plus grandiose ».

30 / 33-34 Créer confère une réalité intrasubjective, la pratique régule l'existence

[citant Cantor] « La mathématique est pleinement libre dans son développement et ne connaît qu'une seule obligation (et sur un point qui va de soi) : ses concepts doivent être non contradictoires en eux-mêmes, et soutenir d'autre part avec les concepts formés antérieurement, déjà présents et assurés, des relations fixes, réglées par des définitions. […] Quand on a mené ce procès [détail du processus de formation d'un concept] jusqu'à son terme, toutes les conditions sont données pour éveiller le concept A qui sommeillait en nous et il parvient à l'existence tout achevé, revêtu de la réalité intrasubjective qui seule peut être requise des concepts ; constater sa signification transcendante est alors la tâche de la métaphysique. »

[…] À ceux qui verraient un danger dans le principe de libre création énoncé par Cantor, celui-ci répond que « tout concept mathématique porte en lui-même son correctif nécessaire ; s'il est stérile ou inadéquat, il le manifeste très vite par son peu d'usage, et est alors abandonné pou manque d'efficacité ». En revanche, poursuit Cantor, « toute restriction superflue imposée à l'appétit de recherche mathématique me paraît comporter un danger bien plus grave ». Pour illustrer sa remarque, Cantor cite la théorie des fonctions […] puis la théorie des équations différentielles. Il termine par l'exemple de Ernst E. Kummer (1810-1893) : « et si Kummer n'avait pas pris la liberté si riche en conséquence d'introduire les nombre « idéaux » dans la théorie des nombres, nous ne serions pas en mesure aujourd'hui d'admirer les travaux algébriques et arithmétiques de Kronecker et Dedekind, si importants et remarquables. »

55 Trois phases : naïve, formelle, critique

Dans un article lu en son nom au Congrès international des mathématiciens tenu à Chicago en 1893, Hilbert soutenait que toute théorie mathématique se développe en trois stades, le stade naïf, le stade formel et le stade critique. Selon lui, les travaux de Cayley et Sylvester constituent le stade naïf de la théorie des invariants, ceux de Clebsch et Gordan en représentant le stade formel, et son propre travail est le seul représentant du stade critique : « Dans l'histoire d'une théorie mathématique, on peut facilement et clairement distinguer trois périodes de développement : la naïve, la formelle, et la critique. En ce qui concerne la théorie des invariants, les premiers fondateurs eux-mêmes, Cayley et Sylvester, sont ainsi à considérer comme les représentants de la période naïve : en établissant les formes invariantes les plus simples, et en les appliquant avec élégance à la résolution des équations des quatre premiers degrés, ils ont connu la joie immédiate de la première découverte. Ceux qui ont inventé et perfectionné le calcul symbolique, Clebsch et Gordan, sont les représentants de la deuxième période, alors que la période critique trouve son expression dans les propositions notées plus haut […]. »

70 Intérêt du formalisme hilbertien

« Ce qui fait le prix des démonstrations d'existence pures, c'est justement qu'elles éliminent la construction particulière isolée pour grouper ensemble une multitude de constructions sous une idée fondamentale, en sorte que seul ce qui est essentiel pour la démonstration ressort distinctement : brièveté et économie de pensée, voilà quelle est la raison d'être des démonstrations d'existence. »

70-71 GÉNÉRALISER POUR MIEUX PARTICULARISER

en empruntant cette voie, Hilbert ne renonce pas à une pratique complémentaire de mathématiques plus concrètes. Le mouvement ascendant vers une théorie plus générale s'accompagne d'un mouvement descendant tout aussi important. Ce dernier peut suivre ou précéder le premier. Dans le cas de la recherche de solution à un problème, le mouvement descendant, appelé alors *particularisation*, joue, selon Hilbert, un rôle plus important encore que son contraire ascendant : « La particularisation joue, dans les problèmes mathématiques, un rôle plus important que la généralisation. Quand nous cherchons en vain la réponse à une question, l'insuccès, la plupart du temps, tient peut-être à ce que nous n'avons pas encore résolu ou à ce que nous avons seulement résolu d'une manière incomplète des problèmes plus simples et à en obtenir la solution, à l'aide de moyens auxiliaires aussi complets que possible et à l'aide de concepts susceptibles de généralisation. Cette manière de procéder est un levier des plus puissants, propre à lever les difficultés mathématiques, et c'est de ce levier, ce me semble, que l'on se sert, même inconsciemment, la plupart du temps. »

94-95 CONSTRUCTION V. S. CRÉATION

Il y a […] une correspondance biunivoque entre les idéaux de Dedekind et les nombres idéaux de Kummer – les nombres existants du domaine étant considérés comme cas particuliers des nombres idéaux. Mais alors, quel avantage y a-t-il à remplacer le concept de nombre idéal par celui d'idéal ? Le gain principal est, Dedekind le dit clairement, l'évitement d'une création nouvelle : « Dans cette marche, je n'ai plus besoin d'aucune création nouvelle, comme du nombre idéal de Kummer, et la considération de ce système de nombres réellement existants, que j'appelle un idéal suffit tout à fait. » Cette remarque, venant de celui qui a vanté le pouvoir créateur de l'homme, peut étonner. Elle nous fait comprendre que les créations ne se justifient, pour Dedekind, que tant qu'elles sont inévitables.

100-101 UN ENSEMBLE D'OBJETS *DEVIENT* UN OBJET

Nous avons insisté précédemment, pour caractériser les créations dedekindienne et cantorienne de nouveaux nombres, nombres irrationnels, nombres transfinis, sur la nécessité d'une étape succédant à la construction et permettant l'émergence véritable d'un *objet* mathématique. Même si le nouveau nombre avait été déterminé à partir d'un système d'objets de type antérieur, comme le nombre irrationnel à partir d'une partition de l'ensemble des nombres rationnels, la construction disparaissait finalement pour qu'apparaisse véritablement l'objet créé. L'innovation de la théorie des idéaux de Dedekind est qu'elle conserve les entités nouvelles sous la forme de sous-ensembles du domaine considéré, introduisant ainsi dans la *théorie des nombres* des entités mathématiques qui ne sont pas des nombres, qui n'ont pas encore le statut d'*objets* véritables de la théorie, mais qui remplacent des entités fictives, qui prétendaient cependant à la dénomination de « nombres ». Les objets « idéels », ainsi que les nommera Paul Bernays, que sont les idéaux de Dedekind, s'introduisent ainsi dans la mathématique comme entités, plus complexes que les objets traditionnels, ni objets « réels » (*naturels*), comme les nombres entiers positifs, ni pures fictions, comme les nombres idéaux de Kummer.

134 PASCH EN 1882

« Si la géométrie doit se transformer en une science réellement déductive, il faut en effet que la déduction soit absolument indépendante du *sens* des concepts géométriques, comme de celui des figures ; seules doivent être considérées les relations entre les concepts géométriques établies dans les propositions et les définitions utilisées. Au cours de la déduction, il est à la fois recommandé et utile, mais *d'aucune manière essentielle*, d'avoir à l'esprit la signification des concepts géométriques utilisés […]. »

153-154 DÉFINIR : FREGE & PASCAL

« En mathématique, on appelle définition l'acte de fixer la dénotation d'un mot ou d'un signe […]. Les définitions […] sont avant tout des déterminations arbitraires, et se distinguent par là de toutes les assertions. […] Une définition n'élargit nullement nos connaissances, mais est un simple moyen de rassembler un contenu complexe dans les imites d'un mot ou d'un signe en vue de rendre ce contenu plus aisément maniable. C'est à cela et à cela seulement que doivent servir les définitions en mathématiques. »

[…]

« On ne reconnaît en géométrie que les seules définitions que les logiciens appellent définitions de nom, c'est-à-dire les seules impositions de nom aux choses qu'on a clairement désignées en termes parfaitement connus : et je ne parle que de celles-là seulement.

Leur utilité et leur usage est d'éclaircir et d'abréger le discours en exprimant par le seul nom qu'on impose, ce qui ne pourrait se dire qu'en plusieurs termes ; en sorte néanmoins que le nom imposé demeure dénué de tout autre sens, s'il en a, pour n'avoir plus que celui auquel on le destine uniquement. »

164 Axiomatique selon Weyl

The axiomatic approach has often revealed inner relations between, and has made for unification of methods within, domains that apparently lie far apart. This tendency of several branches of mathematics to coalesce is another conspicuous feature in the modern development of our science, and one that goes side by side with the apparently opposite tendency of axiomatization. It is as if you took a man out of a milieu in which he has lived not because it fitted him but from ingrained habits and prejudices, and then allowed him, after thus setting him free, to form associations in better accordance with his true inner nature. »

174 Sens sans dénotation : poésie (Frege)

Pour l'usage poétique, il suffit que tout ait un sens. Pour l'usage scientifique, il faut aussi que les références [dénotations] ne fassent pas défaut.

181 Axiomatisation hilbertienne

l'axiomatique devrait servir non seulement à organiser la théorie, mais aussi à fonder l'existence des objets qu'elle définit. De tels objets ne sont cependant jamais pour Hilbert des objets purement formels, sans aucune correspondance avec l'intuition sensible ; après avoir énoncé ce qu'il entend par ensemble des nombres réels, et donc par continu, Hilbert précisait : « Ce n'est qu'en ce sens, selon moi, que la notion du continu est rigoureusement et logiquement concevable ; et il me semble effectivement que ce concept correspond le mieux à ce que nous donnent l'expérience et l'intuition. »

201 Fonder *ensemble* logique & arithmétique

Afin d'éviter à la fois ce qu'il nomme le « dogmatisme » de Kronecker pour qui le nombre entier nous est donné, et le logicisme dont le fondement du nombre est source de paradoxes, Hilbert met en œuvre sa méthode axiomatique pour fonder l'arithmétique. Alors que Frege pensait pouvoir trouver ce fondement dans la logique, et Dedekind et Cantor dans la théorie des ensembles, considérée comme une partie de la logique, Hilbert va tenter une autre voie. Selon lui la seule logique ne peut fonder l'arithmétique ni aucun science ; Hilbert a donc l'idée originale d'une construction *simultanée* des lois de la logique et de l'arithmétique.

202 Fondements hilbertiens

Pour Hilbert, […] il n'y a pas d'objectivité logique. Vouloir cerner, en les définissant, les notions primitives, est une entreprise stérile, car dit-il, « à cet endroit, il n"y a rien, et tout se perd, devient confus et vague, dégénère en jeu de cache-cache ». L'objectivité, absente du fonds logique, selon Hilbert, est donc à chercher ailleurs. Elle sera constituée au départ même de la démarche hilbertienne, par la donnée de certains objets primitifs. Au contraire de la méthode logique qui est *analytique*, la méthode mathématique est donc *synthétique* ; partant d'éléments simples données dans l'intuition sensible, et de principes premiers, elle se développe déductivement jusqu'aux conséquence. Telle est la méthode axiomatique de Hilbert.

205 Hilbert *organise* ce qui est *déjà*

Que l'on utilise, plus ou moins explicitement, le nombre 2 dans la définition n'importe pas à Hilbert, car son but est d'organiser un savoir déjà établi, d'en déterminer les concepts fondamentaux et les relations qui les lient, non de créer de toutes pièces une science nouvelle. Il est à noter à ce propos que Hilbert a entrepris l'axiomatisation de théories, mathématiques ou physiques, déjà existantes ; il n'a jamais cherché à créer de nouvelles théories. L. Corry souligne aussi ce point ; il écrit en effet : « Hilbert's own concetpion of axiomatics did not convey or encourage the formulation of abstract axiomatic system: his work was instead directly motivated by the need to better define and understand *existing* mathematical and scientific theory. »

237 Ecthèse : invocation euclidienne

après que la *protase* a énoncé le problème ou le théorème de la manière la plus générale possible, l'ecthèse opère une *instanciation* de cet énoncé, c'est-à-dire en exhibe un cas particulier supposé ne posséder aucune particularité.

243-245 Algèbre kantienne & finitisme hilbertien

l'arithmétique nommé par Hilbert indifféremment *intuitive*, *naïve*, *contentuelle*, correspond exactement à ce que Kant nomme *algèbre*, et […] la méthode propre à cette discipline est décrite par Hilbert de façon exactement conforme à la conception kantienne, dont nous avons dit trouver le paradigme dans la méthode euclidienne, et notamment dans l'ecthèse.

[…]

Ainsi aux signes formels et concrets de l'arithmétique, correspondent en algèbre les formules algébriques; ces objets tout aussi formels et concrets que les précédents permettent une même *attitude finitiste* en algèbre qu'en arithmétique. C'est dire que ces derniers sont manipulés dans les démonstrations algébriques exactement comme les signes de l'arithmétique : de chaque formule, considérée en elle-même, c'est-à-dire hors de toute dénotation, sont déduites d'autre formules suivant certaines règles. Ainsi l'algèbre peut être comprise comme une *extension* de l'arithmétique élémentaire. Aux objets *réels* de celle-ci, les signes 1 (et +), s'ajoutent des objets *idéaux*, les formules algébriques considérés d'un point de vue formel, sans dénotation. Tous ces objets, qu'ils soient réels ou idéaux, sont considérés comme *formels et concrets* ; c'est cette considération qui constitue l'attitude finitiste, et qui est conforme à l'esprit kantien. Les objets algébriques, comme ceux de l'arithmétique ou de la géométrie, sont données dans l'intuition sensible. Loin de considérer l'algèbre comme une discipline purement discursive, Hilbert la présente comme un calcul réglé de signes, c'est-à-dire, d'une certaine manière, comme une discipline aussi intuitive que l'arithmétique ou la géométrie.

De point de vue algébrique cependant, la lettre devient une « véritable variable arithmétique », elle ne *désigne* plus *un* nombre particulier, mais serait plutôt une case vide pouvant être remplie par n'importe quel nombre. La conséquence est d'importance, la formule algébrique $1+a=a+1$, par exemple, n'étant plus communication d'un contenu, ne peut plus être démontrée par des procédés de composition-décomposition, comme précédemment, mais requiert pour sa démonstration le principe d'induction. De ce principe Hilbert dit qu'il est « un principe de portée très vaste, qui appartient à un plan supérieur, qui demande une démonstration et peut en recevoir une ». Nous allons voir que cette démonstration, ainsi que les démonstrations nécessitant le recours à ce principe, seront justifiées d'un point de vue finitiste par extension de la logique classique. Par ailleurs, à partir des objets algébriques, on peut toujours, par un processus démonstratif, en substituant des nombres aux variables, retrouver les formules contentuelles de l'arithmétique, appelées par Hilbert, *propositions finitistes*.

248/249 Fondement hilbertien de la connaissance

Ce qui pour Hilbert, remplace l'espace et le temps, en tant que conditions de possibilité de la connaissance, est le « finitisme », c'est-à-dire la considération d'entités dont « la production, le caractère distinct, la succession, […] soient immédiatement sensibles pour nous » […] C'est donc la possibilité de simples signes « dont nous savons toujours et à coup sûr identifier la forme indépendamment du lieu, du moment, et des circonstances particulières de leur production ainsi que des différences minimes dans leur tracé », c'est-à-dire de signes concrets mais cependant formels et purs (vides de sens et sans particularités graphiques) qui, pour Hilbert, fonde la connaissance. « Je tiens cette attitude philosophique ferme pour indispensable au fondement de la mathématique pure, comme de toute pensée, intelligibilité, et communication scientifiques en général. *Au commencement est le signe*, tel est la loi ici. »

[…]

Ce sont […] le caractère distinct et la succession de purs signes qui sont, selon Hilbert, dans la *reprise* qu'il effectue de la théorie kantienne, les conditions *a priori* de la connaissance arithmétique, et de toute connaissance en général. Le finitisme apparaît ainsi comme la version hilbertienne des formes aprioriques de l'intuition kantienne.

251 *Formel* ou abstrait ?

Plus encore qu'il n'établit une répartition nouvelle des objets en objets concrets et objets abstraits, selon une « différence dans le degré d'évidence », Hilbert nous paraît donner aux oppositions classiques concret/abstrait, intuitif/formel, etc., un sens nouveau. *Formel* est utilisé pour *sans considération du sens*, et ne s'oppose donc qu'à *contentuel* ; *concret* est utilisé au sens *physique* de la trace sur le papier, du *gramma* ; Hilbert précise souvent que ce qui est concret est *visible*. Formel et concret ne s'opposent donc pas, mais sont au contraire le plus souvent associés : un signe, une figure, un dessin, sont des objets à la fois formels et concrets. Plus encore, être formel et concret caractérise complètement les objets mathématiques.

265 Non-contradiction & existence

Exposant le point de vue intuitionniste, Frankel observe : « Le manque de contradiction garantirait aussi peu l'existence que le manque de preuve l'innocence d'un accusé. »

268-270 Hilbert fonde l'objet mathématique d'aujourd'hui

Nous avions précédemment remarqué que la différenciation qu'Hilbert fait, et maintient, entre objets réels et objets idéaux, pouvait paraître aujourd'hui moins « moderne » que le statut d'objet réels accordé par Dedekind et Cantor à tous les objets mathématiques. Cette première impression est démentie lorsqu'on comprend quel usage Hilbert entend réserver à ces objets idéaux et à ces propositions idéales. […] Ce sont des énoncés et des objets liés à un système axiomatique, et qui donc ne peuvent être utilisés qu'à l'intérieur de ce système, et non dans le monde phénoménal. Loin donc d'être moins « moderne » que Dedekind ou Cantor par la place qu'il sonne à l'idéalité, Hilbert nous paraît au contraire fonder la conception moderne des objets mathématiques. Car c'est bien ainsi qu'aujourd'hui nous considérons les objets et les assertions mathématiques, comme dépendants strictement de la théorie axiomatique dont ils découlent ; et aucun mathématicien ne penserait à les considérer comme « réels ». Ainsi considérés, tous les objets mathématiques (à l'exception peut-être des objets primitifs du système, qu'Hilbert lui-même considère comme objets réels) sont des objets idéaux au sens de Hilbert. Simplement, nous n'avons plus besoin aujourd'hui de les qualifier d'idéaux, alors que cette précision était nécessaire à Hilbert qui avait à dégager l'objet mathématique de toute confusion réaliste, qu'elle soi un réalisme empirique à la Kronecker ou Brouwer, ou un réalisme du concept à la Frege ou Dedekind. Ce qui ressort pourtant de la construction hilbertienne, est que les objets de la mathématique actuelle, qui sont donc les objets idéaux de Hilbert, ont un fondement (aujourd'hui oublié, refoulé ?) dans un réel concret.

272 Intuitif/formel hilbertien & sensibilité/entendement kantien

Sans une base intuitive, les mathématiques se réduisent à un jeu vide et gratuit, sans la forme (symbole ou formule), elles seraient calculs inextricables et intuitions aveugles. […] ce rapport entre l'intuitif et le formel reprend […] le rapport entre la sensibilité et l'entendement tel que Kant le formule : « Sans la sensibilité, nul objet ne nous serait donné, sans l'entendement, nul ne serait pensé. Des pensées sans contenu sont vides ; des intuitions sans concepts sont aveugles. Aussi est-il tout autant nécessaire de rendre sensibles ces concepts (c'est-à-dire de leur joindre l'objet dans l'intuition), que de rendre intelligibles ces intuitions (c'est-à-dire de les soumettre à ces concepts). Ces deux pouvoirs ou capacités en sauraient non plus échanger leur fonctions. L'entendement ne peut rien intuitionner, ni les sens rien penser. C'est seulement de ce qu'ils s'unissent que peut résulter la connaissance. »

273 Non-ontologie hilbertienne

L'originalité de la conception hilbertienne est qu'*il n'existe*, à proprement parler, *aucun objet mathématique*; il n'existe pas, par exemple de point mathématique, mais seulement des points de géométrie euclidienne, des points de géométrie non euclidienne, etc. Il n'y a pas d'existence mathématique *absolue*, l'existence est toujours au contraire *relative* à un système axiomatique. On sort ainsi du réalisme mathématique, mais sans verser dans le nominalisme, ni même dans un formalisme strict. Pour dire les choses autrement, le point de vue hilbertien permet de sortir d'une conception *ontologique* de l'existence mathématique, et propose une conception purement logique, qui s'appuie toujours cependant sur une base concrète. L'existence comme non-contradiction est en effet à comprendre comme une sorte de *programme*, un algorithme à vérifier, un simple *critère* d'existence, pour reprendre les termes de Hilbert, qui s'applique à un donné concret, et qui n'a plus rien à voir avec une création divine, ou de nature divine.