le continu et autres écrits

Hermann WEYL
1910-53

éd° Vrin (1994), notes & traductions par Jean LARGEAULT
coll. Mathesis

note introductive générale

14-6 Croyance vers l'infini actuel, action formaliste, liberté de l'infini potentiel

Finalement, [la position de Weyl] se résumerait en quatre thèses[…] : (1) Nous ne possédons pas la vérité ; le monde physique nous est impénétrable, et même en mathématiques ou en logique la vision directe du vrai nous échappe le plus souvent, il nous faut partir d'axiomes et manipuler des inférences : **pour connaître, nous avons besoin d'agir** (l'intuition elle-même, pour Weyl comme pour Brouwer, ressortit au moins partiellement à l'action) ; (2) l'infini est accessible à l'esprit et à l'intuition sous forme d'un champ de possibilités ouvert à l'infini ; (3) l'infini achevé ou actuel comme domaine fermé d'existence absolue nous est refusé ; (4) pourtant l'exigence de totalité et la *croyance* métaphysique en la réalité contraignent l'esprit à représenter l'infini actuel par une construction symbolique. Le “mystique” se fourvoie, car il est vain de croire que nous pouvons comprendre ce qui ne nous est pas directement connu et à quoi nous n'avons accès que par symboles (l'envers de la perception sensible, le “transcendant”).

[…] Weyl distingue différentes sortes de connaissance. La connaissance intuitive ou “phénoménale” décrit ou exprime le donné passivement ; elle est liée à la perception dont il dit qu'elle est réfractaire au changement : cela correspond aux traits immuables de l'esprit humain. La théorie au contraire « laisse derrière le donné pour saisir le transcendant »; la conscience y réussit à « sauter par dessus son ombre »[...] et à représenter ce qui n'est pas elle, le monde extérieure, mais seulement par *symboles*. […] La projection du réel donné à la perception sur le possible […] fait possible fait violence à la nature, mais le seul moyen dont nous disposons pour connaître ce qui n'est pas nous est de le reconstituer symboliquement en prenant appui sur ce que nous pouvons embrasser du regard[...]. Le possible n'est pas une potentialité inhérente aux choses ; c'est un artefact d'origine mentale. Le transcendant est la réalité en soi, dont on n'a pas l'intuition *directe*. L'intuition porte sur des objets individués ou individuellement donnés ; inversement les concepts ou les propositions qui se rapportent à des entités ou à des états de choses auxquels ne correspond pas de vision directe, sont des éléments idéaux ou des intermédiaires sans contenu propre (par exemple les schémas d'inférence transfinis, qui sont la partie “transcendantale” de la logique ; cf. V). Les théories physique s'incorporent des éléments idéaux[3]. Brouwer demandait que chaque énoncé individuel ait un sens intuitif[...]. En mainte occasion Weyl souligne que la physique théorique, forcément “holiste”, est aux antipodes de cette exigence. De là il était tenté de conclure que Brouwer a raison pour les mathématiques, et Hilbert pour la physique (IX).

footnote 3 : […] L'idée que la théorie représente de façon *symbolique* le transcendant et que les énoncés d'une théorie physique ne sont pas vérifiables individuellement, figure dans P. Duhem, *La théorie physique*, 1912, que Weyl ne cite point et qu'il ne connaissant probablement pas.

I. (1910) : *sur les définitions des concepts mathématiques fondamentaux*

21/3 Géométrie fondable sur l'équidistance

Trois points A, B, C sont alignés si et seulement s'il y a deux points distincts P, Q, doués de la propriété que P et Q sont équidistants de A, équidistants de B, équidistants de C.

[…]

Présentement je serais entraîné trop loin si je voulais montrer comment tous les concepts fondamentaux de la géométrie du “entre”, des congruences de segments et d'angles, se peuvent réduire à celui de “l'équidistance de deux points par rapport à un troisième” , concept que nous voulons prendre pour base [...]. Il me suffit de mentionner que cela peut se faire sans avoir à prendre une peine exagérée, et de renvoyer à Pieri[…], le géomètre italien de l'école de Peano qui a reconstruit la géométrique de cette manière.

28-30 Ensembles infinis

Au cours de l'évolution de l'esprit humain le concept d'ensemble et de nombre a traversé plusieurs états. Dans le *premier état* il se présente comme une *véritable représentation* d'une collection, représentation qui se forme quand les représentations de plusieurs objets individuels perçus se détachent dans notre contenu de conscience, et sont maintenus groupés par l'effet d'un intérêt unique. À ce niveau les noms de nombre les plus bas, disons 2, 3, ou 4, désignent des différences perceptibles dans l'acte psychique qui s'accomplit dans la représentation de la collection[…].

Dans le *second état*, des représentations symboliques remplacent les représentations au sens propre. En guise de produit de cette seconde période citons le procédé symbolique de compter familier aux enfants, qui permet de distinguer, sous le rapport du nombre, des collections même assez étendues. Dans sa formation, un certain sentiment de puissance joue un rôle important, concurremment à d'autres éléments, car pour satisfaire aux exigences du monde extérieur, nous ne devons pas nous sentir liés par les limitations et lacunes contingentes de nos sens et de nos facultés intellectuelles. […] La non-applicabilité d'une véritable représentation des ensembles infinis en tant que présence simultanée de leurs éléments comme contenus perceptibles devant la conscience, est aussi peu une objection contre leur sûreté logique qu'elle l'est contre celle d'ensembles finis composés d'un très grand nombre d'éléments et qui ne sont pas non plus susceptibles d'une représentation au sens propre : c'est seulement en cette acception de l'impossibilité d'une représentation véritable de multiplicités infinies qu'il est vrai de dire qu'il n'y a pas d'infini actuel.

[…] le problème du *troisième état* est de construire la théorie des ensembles finis et infinis scientifiquement et axiomatiquement, en posant des axiomes, des définitions et en en tirant des conséquences. Dans cette construction, […] on n'hésitera pas à remplacer le système de concepts qu'on a proprement en vue, par d'autres qui y sont totalement isomorphes. […] Chaque fois qu'une [relation d'équivalence] est définie entre des objets a, b, …, on tient pour possible d'associer à chacun des objets a une autre entité α, en sorte qu'à deux objets est associée la même entité exactement quand ces deux objets sont équivalents au sens de [cette] relation. […] Maintes fois on a eu recours au moyen consistant à définir l'entité α que l'on doit associer, comme étant la totalité des objets équivalents à l'objet a ; et autant que ce concept d'une totalité est logiquement recevable, il n'y avait rien à objecter là-contre, malgré l'énormité psychologique de dire que reconnaître dans ||| trois bâtons exige que je me représente la totalité de tous les ensembles biunivoquement applicables sur l'ensemble de ces trois bâtons.

36 Les mathématiques et la réalité (le double visage de l'abstrait)

A-t-on le droit d'affirmer[…] que la mathématique est la science de $\in$moyennant les principes mentionnés ? Peut-être cela détermine-t-il les mathématiques exactement *quant à leur contenu logique*. Cependant je vois la véritable valeur et la véritable portée du système de concepts d'une mathématique logicisée en ce que ses concepts s'interprètent dans l'intuition, sans que cela mette en cause la vérité des théorèmes qui se rapportent à ces concepts, et je crois que l'esprit humain n'a pas, pour s'élever jusqu'aux concepts mathématiques, d'autre moyen que de façonner et transformer les données de la réalité. **L'applicabilité de notre science apparaît** alors **comme un symptôme de son enracinement, non pas comme une mesure de sa valeur**. Les mathématiques, tel un arbre qui déploie librement sa cime dans les cieux, puisent leur force par mille racines dans une terre d'intuitions et de représentations réelles ; il serait désastreux de les tailler au nom d'un utilitarisme court de vue ou de les arracher du col d'où elle ont jailli.

II. (1918) : *le continu*

48 Sauver l'analyse (ouverture)

Dans cet écrit on n'a pas voulu, à la manière du formalisme, revêtir le « roc dur », sur quoi repose le palais de l'Analyse, de tréteaux de bois pour faire accroire au lecteur et finalement à soi-même que ce serait là le vrai fondement. On soutient plutôt que ce palais est en large part bâti sur du sable. Je crois être en mesure de remplacer ce sol mouvant par des pilotis d'une sûreté à toute épreuve ; mais ils ne supportent pas tout ce qu'on tient aujourd'hui pour assuré ; j'abandonne le restant, faute de voir d'autre possibilité.

57 Définition d'un réel

En réalité il est impossible de donner un nombre autrement que par sa position dans la suite des nombres[...], *i. e.* en indiquant la propriété qui le caractérise.

58-60 Saisir les "faits" mathématiques : inférences ou vécu ?

Les états de choses mathématiques, à part les très simples, sont tellement compliqués qu'il est en fait impossible de se les rendre présents entièrement dans la connaissance et de les saisir rien qu'avec le regard de l'esprit. […] [dans la démonstration mathématique] toute l'activité d'intelligence à déployer [se] concentre sur les inférences logiques et ne se dirige plus sur les choses ou états de choses objets des jugements[1]. Il va sans dire que pour trouver les vérités mathématiques ou pour les comprendre en les recréant, on doit procéder d'une manière beaucoup plus “positive” et beaucoup moins “formelle”. […]

[…] si un jour cette croyance [que de deux jugements opposés U et ¬ U relatifs aux objets du domaine, il y en a toujours un et un seul qui est conséquence logique des axiomes] se transforme en savoir, il est certain que, attendu que le raisonnement logique consiste en l'itération de quelques inférences logiques élémentaires, nous ne serons parvenus à ce savoir que sur la base de l'intuition de l'itération, ou de l'intuition de la progression infinie en une suite. Or c'est justement de cette intuition que nous tirons nos connaissances arithmétiques fondamentales sur les nombres naturels, tandis que c'est sur ceux-ci à leur tour que s'édifie logiquement tout l'édifice de la mathématique pure. [Et cela sape la thèse que les axiomes arithmétiques soient de simples stipulations.]

footnote 1 : […] Comme si un rapport de fondation aussi médiat que celui que nous nommons démonstration, était capable de susciter une “croyance” sans que nous nous assurions de l'exactitude de chaque pas isolé au moyen d'une intuition immédiate ! **C'est cette intuition** (non pas de la démonstration), **qui est partout la source ultime de la connaissance**, elle consiste à **avoir “l'expérience directe du vrai”**.

60/63 Deux caractéristiques de l'infini

Les ensembles finis se décrivent de deux façons, soit *individu par individu*, en indiquant chacun de leurs éléments, soit *génériquement*, par un loi, en indiquant des propriétés vérifies par les éléments de l'ensemble et par nul autre objet. Pour les ensembles infinis le premier procédé est exclu, c'est justement en cela que réside l'essence de l'infini. […]

[…]

[…] La représentation d'un ensemble infini comme une “collection” produite par une infinité de choix arbitraires isolés, ensuite visualisée comme un tout par la pensée, est une ineptie ; car la particularité d'être inépuisable est inscrite dans la nature de l'infini.

63 Le continu de Bergson ?

Force est de constater que présentement les choses ne sont pas plus avancées que [*lorsqu'on porte son regard sur les premiers principes* [de la critique tant vantée que le 19ème siècle exerça sur les fondements de l'Analyse classique]] : la grande tâche ouverte depuis la découverte de irrationnels par les pythagoriciens, saisir mathématiquement le *continu* qui nous est donné intuitivement et immédiatement (dans le flux du temps et dans le mouvement), comme une totalité de “stages” discrets, en formuler le contenu en des connaissances exactes, ce problème est aujourd'hui, malgré Dedekind, Cantor, et Weierstrass, aussi éloigné que jamais de sa solution. Des systèmes de conventions plus ou moins arbitraires ne nous sont d'aucun secours, quelle que soit “l'économie de pensée” qu'elles permettent ou quelle qu'en soit la “fécondité” ; nous devons chercher à parvenir à une solution basée sur une connaissance positive [*objective insight*].

64 Arithmétique primitive

Un traitement ensembliste des nombres naturels semblable à celui que propose Dedekind dans son livre [1888], est sans doute précieux pour la systématisation mathématique[…] ; il ne doit pas dissimuler que pour les concepts de base de la théorie des ensembles, il faut déjà s'appuyer sur l'intuition de l'itération et de la suite naturelle des nombres.

70-1 Renoncer à l'existence des bornes extremales

Soit par exemple M un ensemble [*Menge*] borné de nombres réels du premier niveau. Pour construire sa *borne supérieure*, on doit former un ensemble γ de nombres rationnels qu aura pour élément un nombre rationnel r exactement dans le cas où *il y a* un nombre réel du premier niveau appartenant à M et plus grand que r. Cet ensemble γ vérifie les propriétés [de Dedekind caractérisant un réel en terme de coupures], il est donc un nombre réel, mais *du second niveau*, puisque dans sa définition le « il y a » figure en connexion avec « un nombre réel du premier niveau » (*i. e.* avec « un ensemble du premier niveau de nombres rationnels » ou avec « une propriété primitive ou dérivée du premier niveau »). — Le *cercle vicieux* caché par le vague du concept usuel d'ensemble ou de fonction, que nous venons de révéler, n'est point une imperfection formelle aisément corrigible de l'édifice de l'Analyse. La reconnaissance de sa porté fondamentale ne peut même pas être fournie au lecteur par des mots. Seulement plus on examine avec attention la texture logique de l'Analyse, plus la pensée la traverse profondément et exhaustivement, plus il apparaît que dans les fondements qu'on lui donne aujourd'hui, chaque cellule de ce puissant organisme est infectée du poison de la contradiction : et qu'il faut prendre des mesures de contrôle draconiennes pour y remédier.

Une Analyse “à structure de niveaux” est artificielle et inutilisable. Elle de vue son sujet propre, le nombre[…]. Autrement dit la seule stratégie naturelle consiste à *suivre le procédé d'itération restreint*. […] Avec le procédé restreint un théorème comme celui mentionné plus haut, que tout ensemble borné de nombres réels a une borne supérieure, devra sans doute être abandonné, mais nous poursuivrons notre route sans nous laisser déconcerter par ces sacrifices

81-2 Fonctions

Historiquement le concept de fonction a une double racine. En *premier* lieu ce qui y a conduit ce sont les "*dépendances naturelles*" qui dominent l'univers matériel et qui consistent d'une part en ce que les états de choses et les propriétés des choses réels varient dans le temps, lequel est la variable indépendante par excellence, d'autre part en les relations *causales* entre cause et effet. En *second* lieu, une racine entièrement distincte de celle-là réside dans les opérations arithmético-algébriques. En conséquence de quoi l'Analyse traditionnelle se représentait vaguement par une *fonction* une expression formée des variables indépendantes moyennant un nombre fini d'applications des quatre opérations et de quelques relations transcendantes. […] Le point de confluence des sources du concept de fonction est le concept de loi physique ; il consiste en ceci que dans une loi physique une relation de dépendance donnée par la nature est représentée sous forme d'une fonction construite de façon purement notionnelle et arithmétique. Les lois de la chute des corps de Galilée en sont le premier exemple important. L'évolution des mathématiques à l'époque moderne a conduit à s'apercevoir que les principes de construction spécifiquement algébriques d'où partait l'Analyse traditionnelle sont beaucoup trop étroits aussi bien pour une construction logico-physique de l'Analyse que pour le rôle que doit assumer le concept de fonction dans la connaissance des lois qui gouvernent les processus matériels. Des principes de construction *logiques* généraux doivent remplacer ces principes *algébriques*. Renoncer à une construction de ce genre, comme l'Analyse moderne voudrait le faire si on prend à la lettre ses définitions (heureusement ici encore il y a un écart entre ce qu'on dit et ce qu'on fait), signifierait se perdre dans le brouillard ; en même temps l'idée générale de loi physique se dissoudrait dans le vide.

82 Imprédicativité

Le point décisif à mes yeux, l'obligation d'employer les principes de définition à délimiter rigoureusement le cercle des propriétés et des relations auxquelles seront associées des ensembles et des correspondances, manque encore de toutes parts.

83 Itération priimitive

je me convaincs fermement (en accord avec Poincaré, si peu que je partage ses opinions philosophiques sur le reste), que *la représentation de l'itération, de la suite naturelle des nombres, est un fondement ultime de la pensée mathématique*. […] s'il est exact que les concepts fondamentaux de la théorie des ensembles ne sont concevables que par l'effectuation de cette intuition "pure", il est superflu et trompeur de fonder le concept de nombre naturel sur la théorie des ensembles

90 Action du groupe $\mathbb{Q}^*$

Les fractions dans la vie quotidienne et partout où elles servent à la mesure de grandeurs additives, interviennent comme *multiplicateurs*.

111-3/124 Continu & durée bergsonienne

La philosophie bergsonienne a eu le mérite de placer l'accent sur l'hétérogénéité du monde conceptuel mathématique par rapport à la continuité immédiatement expériencée du temps phénoménal (« la durée »)[…].

[…] La conception d'un déroulement fait de points, et donc décomposable en points, se révèle inadéquate, car elle laisses perdre ce qui constitue la continuité, l'écoulement de point en point, ce qui induit constamment le présent qui dure constamment à glisser dans le passé qui s'enfonce. Comment cela a lieu en vérité, chacun l'éprouve immédiatement à chaque moment ; le décrire est impossible à cause du caractère véritablement originel du temps phénoménal. […]

[…] Certainement le continu intuitif et le continu mathématique ne coïncident pas, un profond abîme les sépare. Néanmoins des motifs raisonnables dans notre effort en vue de comprendre le monde nous le font franchir[…] ; ce sont les mêmes motifs raisonnables qui poussent l'étude de la nature à passer de la réalité où nous vivons en tant qu'être humains naturels, et qui se construit dans les actes d'expérience – à passer de cette réalité au monde physique « vraiment objectif », exact, sans qualités, qui est caché « derrière » : par exemple des qualités colorées des corps visibles, aux oscillations de l'éther ou aux parcours fonctionnels mathématiques du champ électromagnétique. […]

[…]

Dans le continu temporel un point isolé n'existe que comme "point de transition".

114 Relativité de l'existence des réels (à un Je & à un repère)

Montrer un point individuel est impossible. […] Aussi les points et les ensembles de points ne se laissent-ils jamais repérer d'une manière absolue, mais seulement dans la dépendance d'un système de coordonnées. Ce système de coordonnées est le reste inévitable de la destruction du Je dans l'univers géométrico-physique extrait du donné par la raison suivant la norme de « l'objectivité » – ultime et pauvre symbole qui, dans cette sphère objective, témoigne que l'existence est donnée et ne peut être donnée que comme contenu intentionnel des expériences de conscience d'un Je qui attribue ou crée des significations.

117 Obstruction aux *extrema*

notre domaine d'opération est homogène, c'est-à-dire que, en dehors de l'ensemble vide et de l'ensemble plein, n'existe pas d'ensemble 1-dimensionnel de segments [temporels]. En conformité de quoi il est impossible de déterminer un segment individuel absolument au moyen d'un concept, *i. e.* par une propriété qui caractériserait ce segment.

124 Conclusion

Face à l'objection, que l'intuition du continu ne contient rien des principes logiques nécessaires en vue d'une définition exacte du concept de nombre réel, nous avons expliqué que ce qui se manifeste dans le continu intuitif, et le monde des concepts mathématiques, sont tellement étrangers l'un à l'autre que demander qu'ils se recouvrent doit être rejeté comme absurde.

III. (1919) : *le cercle vicieux dans les fondements de l'analyse contemporaine*

126 Extension (OK) < intension (danger)

En s'appuyant sur l'intuition de l'itération, on se convainc que *le concept de nombre naturel est d'extension définie* […] Méconnaître le fait que le *sens intensionnel* d'un concept a une priorité logique sur *l'extension* est monnaie courante ; les fondements de la théorie des ensembles en sont eux aussi infectés.

127-8 Pourquoi l'axiome de la borne sup échoue

Un nombre réel est un ensemble de rationnels qui correspond à une propriété déterminée de nombres rationnels. Un ensemble de nombres réels correspond donc à une propriété A de propriétés de nombres rationnels. La borne supérieure de cet ensemble de nombres réels est elle-même l'ensemble des nombres rationnels x qui possèdent une certaine propriété E_A, à savoir la suivante : qu'*il y a une propriété de l'espèce* A qui revient au nombre x. Une définition de ce genre qui relie la réalisation d'une propriété E_A au fait que (en général et sans restriction) *il y a* une propriété telle que..., est évidemment incorrecte ; le concept “propriété de nombres rationnels” n'est pas d'extension définie. Il n'acquiert un contenu que si le concept général “propriété” est restreint en un concept “propriété-κ” d'extension définie ; supposons qu'il en soit ainsi, et que le concept de nombre a subi la restriction correspondante. En introduisant cette modification dans la définition de E_A, nous obtenons en E_A une propriété qui *d'après son sens intensionnel* tombe certainement à l'extérieur du champ des propriété-κ. Sans doute arrivera-t-il que cette propriété soit égale en extension à une propriété-κ, et alors, mais alors seulement, correspondra à cette propriété E_A un nombre réel, la borne supérieure. Mais d'avance il est extraordinairement invraisemblable qu'il soit possible de mettre sur pied d'une manière exacte un concept “propriété-κ” d'extension définie, tel que la propriété E_A à définir d'après le schéma ci-dessus, à partir de la *totalité* des propriétés E_A, coïncide en extension avec une propriété-κ. En tout cas *on n'a pas l'ombre d'une preuve* d'une pareille possibilité ; or c'est justement cette preuve qu'il faudrait pour que l'assertion de l'existence de la borne supérieure soit *correcte et vraie en général*.

Ainsi, tant que les définitions courantes de notions aussi fondamentales pour l'Analyse que “borne supérieure”, “continuité”, etc., manqueront d'un sens saisissable, et que le concept général de propriété (et de relation) ne sera pas restreint à un concept d'extension définie, “propriété-κ”, la question se pose de savoir comment procéder à cette restriction. L'état présent des mathématiques, tel qu'il résulte de l'évolution historique, ne laisse aucun doute sur la réponse : on devra se limiter aux propriétés et relations définissables *d'une façon purement logique* à partir du petit nombre des catégories d'objets pertinents données dans l'intuition (pour les nombres naturels, il n'y a que la relation “successeur immédiat de”).

IV. (1925-7) : *l'état présent de la connaissance en mathématiques*

135-6 Dogmes de la logique

(NdT) […]

[…]

Quand parut Brouwer, on avait depuis longtemps abandonné l'attitude des Grecs qui tenaient les principes logiques pour des *hypothèses* ; on avait fini par regarder ces principes comme des dogmes intangibles. Or la logique est d'abord une discipline critique ; depuis Frege elle a ruiné mainte certitude qu'on s'était trop hâté d'accepter. (Ceux qui en parlent comme d'un catalogue idéal de canons ou de normes devraient éveiller la méfiance : crédules ou imposteurs ?)

[…]

Dans *le Continu*, Weyl supposait légitime de considérer la *totalité* des entiers naturels, et n'envisageait pas d'exception aux lois de la logique classique (principe de compréhension à part). S'étant instruit du programme de Brouwer, il cesse de croire qu'on ait le droit de tenir le TE pour valide, car une proposition d'existence générale n'a pas forcément sa négation dans l'infini. "L'absolutisme existentiel" élude les difficultés liées à l'infini. De plus une assertion d'existence n'ayant de signification que relativement à une instance individuelle définie, le défaut d'individualisation des éléments d'un ensemble peut suffire à entraîner la non-validité du TE pour cet ensemble.

137-8 Axiome d'Eudoxe et rapport de grandeurs : un continu intuitioniste avant l'heure !

Eudoxe reconnut le mécanisme générale du phénomène [d'insoutenabilité de la théorie atomiste suite à la découverte des nombres irrationnels], indépendamment des constructions géométriques particulières qui avaient commencé par établir l'irrationalité de $\sqrt{2}$. [...] Pour remplacer la commensurabilité rendue insoutenable, il pose l'axiome suivant : a et b étant deux segments, a peut s'ajouter autant de fois à lui-même, par exemple n fois, jusqu'à ce que la somme na soit plus grande que b. Cela signifie que tous les segments sont entre eux d'ordre de grandeur comparable, et que *dans le continu il n'y a ni infiniment petit actuel ni infiniment grand actuel*. Car un segment a qui resterait petit que b, si souvent qu'ajoute à lui-même, devrait être dit infiniment petit devant b. […] Comment procéder lorsqu'il n'est pas possible en général de caractériser un segment par une fraction telle que 5/3 ? La réponse d'Eudoxe est que deux rapports de segments $a : b$, $a' : b'$ sont égaux si pour des nombres naturels quelconques m et n, qui remplissent la condition de la première ligne, la relation de la seconde ligne vaut :

(I) $na > mb$ (II) $na = mb$ (III) $na < mb$

$na' > mb'$ $na' = mb'$ $na' < mb'$

Appelons nombre-mesure ou nombre réel un rapport de segments $a : b = \alpha$. Ce nombre sera ensuite caractérisé par la *coupure* qu'il engendre dans le domaine des nombres rationnels, en partageant toutes les fractions m/n en les trois classes de celles qui sont (I) plus petites que α, (II) égales à α, (III) plus grandes que α. La classe du milieu soit est vide soit ne contient qu'une fraction. Dans Euclide la théorie des proportions s'élève sur ce fondement. Archimède bâtit là-dessus sa méthode générale d'exhaustion. Ainsi s'ébauche, insoucieuse des antinomies philosophiques, une théorie mathématique du continu subtilement conçue et agencée, qui ne montre nulle part de lacunes logiques ni de contradictions.

140 Nécessité de penser l'infini comme fini-limite

l'Analyse infinitésimale, par l'intégration, infère le comportement dans le fini à partir du comportement dans l'infiniment petit, régi par des lois élémentaires. Or si, en l'occurrence, l'infiniment petit n'est pas pris au sens du passage à la limite, l'infini perd contact avec le fini, les processus dans le fini et dans l'infiniment petit se déroulent chacun de leur côté, le lien qui les unirait est rompu. Là-dessus, Eudoxe avait vu juste.

142-3 Dogme de l'absolutisme de l'existence

quand nous désignons [l'ensemble de tous les nombres réels ≥ 0 et ≤ 1] comme l'intervalle continu 01, il n'y pas là destruction atomiste du continu qui le fragmenterait en points particuliers. Car, aux termes de la définition posée par Dedekind et Cantor, un ensemble ne se réalise pas en parcourant tous ses éléments qu'on réunirait en un tout. C'est plutôt qu'*un ensemble de nombres (*par exemple) *est donné, si en vertu de sa définition est déterminé de chaque nombre s'il y appartient ou non*. Un ensemble infini ne peut être donné qu'en indiquant une *propriété* caractéristique de ses éléments. […] La théorie des ensembles a laissé de côté tous les scrupules idéalistes de cette sorte, qui se rattachent à des réflexions sur la manière dont des ensembles peuvent être donnés ; elle comporte la croyance que la question « y a-t-il ou non ? » adressée à l'infini ou à une infinité d'éléments ou de parties, trouve en toute circonstance une réponse dans un état de choses subsistant en soi, même si notre intelligence ne parvient que par un hasard heureux de la méthode mathématique, à transformer cette réponse muette et énigmatique en une réponse articulée. « En soi » ou bien « devant Dieu », tout est déterminé jusqu'au dernier détail. Une croyance analogue domine un absolutisme de l'existence comme celui qui affirme que notre connaissance d'un processus du monde extérieur ne contient aucune imprécision, quoique l'intuition ne puisse faire émerger des points d'espace et des qualités que par approximation, sans jamais être capable de les délimiter avec des contours entièrement nets.

144 Les ensembles émergent de et assurent l'Analyse

La montée de la théorie des ensembles restera à jamais liée au nom du grand penseur G. Cantor. Que cette théorie soit née des mathématiques a signifié seulement que l'Analyse est devenue abstraitement consciente de la méthode qu'elle pratiquait depuis longtemps. Si l'on admet l'application illimitée des termes « il y a » et « tous » ainsi que des principes logiques qui s'y rapportent, le puissant édifice de l'Analyse est d'une solidité à toute épreuve : ses fondements sont sûrs, ses parties toutes justifiées, ses concepts bien dessinés, ses démonstrations sans lacune ni contradiction. Il fallait certainement une acuité mathématique considérable pour mettre en sécurité les faits les plus généraux concernant la continuité, qui semble le plus proches de l'intuition ; par exemple qu'une fonction continue prend toutes les valeurs intermédiaires, qu'une courbe plane fermée sans points doubles sépare le plan en deux parties, ou qu'il n'y a pas d'application continue biunivoque d'un domaine à deux dimensions sur un domaine à trois dimensions. Notre expérience des étudiants nous montre quel long apprentissage est nécessaire pour parvenir à l'absence de présupposés qui est la condition pour comprendre ces concepts et saisir leur portée.

145 Fusion ensembliste de mathématique-logique

Pour la théorie des ensembles il n'y a pas de borne de principe entre le finie et l'infini. L'infini lui apparaît même comme le plus simple : qu'un ensemble est infini se reconnaît à ce qu'il est biunivoquement applicable sur une vraie partie de lui-même (ainsi **Z** l'est par : $n \rightarrow n'$) ; un ensemble est fini si aucun application de genre n'est possible. Le mur de séparation entre mathématique et logique s'effondre ; dans le système de la théorie des ensembles la mathématique n'a pas de contenu propre, elle n'est qu'*une logique devenue adulte*.

146 Prétention ensembliste

Il y dans l'édifice des mathématiques deux endroits découverts où l'on rencontre possiblement de l'insondable : la continuation dans la série des nombres naturels et le continu. […] La théorie des ensembles croit, même à ces deux endroits béants, avoir recouvert d'un solide pont de glace le fleuve de l'infini, où l'esprit risque de sombrer.

147 L'en-devenir évite Russell

Du point de vue *constructif* l'antinomie [de Russell] se résout d'une manière analogue à celle de Richard ; elle enseigne *qu'il ne faut pas poser, préalablement à toute construction, une totalité déterminée et bornée de tous les ensembles possibles de nombres naturels ou de toutes les propriétés possibles de nombres naturels*.

148-9 Borne supérieure, niveaux & axiome de réductibilité

ne pas oublier que d'après Dedekind un nombre réel (E) est un ensemble de nombres rationnels qui correspond à une propriété E dans le domaine des nombres rationnels ; « que le nombre rationnel x est plus petit que (E) », signifie : x a la propriété E. La borne supérieure γ correspond alors en fait à la propriété E_A qu'un nombre rationnel possède exactement s'*il y a* une propriété de nombres rationnels de l'espèce A, qui revient à x. Ainsi le concept homogène de nombre semble se briser, car on obtiendrait des nombres réels de premier, de second, de troisième niveau, etc., en sorte que par exemple la borne supérieure d'un ensemble de nombres du premier niveau ne serait pas en général un nombre de la même espèce, mais un nombre du second niveau. Une telle Analyse à niveaux est absolument inutilisable. On échappe au dilemme si la proposition selon laquelle toute propriété E_2 du second niveau est non pas équivalente en sens, mais *égale en extension* à une propriété E_1 du premier niveau. C'est ce qu'on n'a jamais essayé de démontrer ; il n'y pas de plus léger indice que des principes de construction pour des propriétés du premier niveau soient formulables, qui assureraient la vérité de cette proposition ; elle est même si monstrueusement invraisemblable qu'on ne peut raisonnablement s'attendre que quiconque cherche à la prouver. Russell s'en est sorti par une décision abstruse, en postulant au titre d'axiome de réductibilité cette proposition entièrement inintelligible

150 Au fondement de Dedekind : l'itération

Constatant la profonde étrangeté de la construction mathématique [du continu] en comparaison de la continuité dont on a l'expérience directe, j'avais cherché à l'exprimer par une analyse épistémologique aussi contrastée que possible. Une bonne partie de ce qui passait depuis longtemps pour être en mathématique, de possession sûre, devait être abandonné. En particulier des conceptualisations et argumentations comme celles de la théorie de la chaîne de Dedekind[…] participent du cercle vicieux décrit dans mon livre. L'itération d'un processus, le « toujours un de plus », revivait, idée originelle et irréductible.

150-1 Jugement existentiels :

Soit E une certaine propriété de nombres naturels, dont la réalisation ou la non-réalisation pour chaque nombre n donné est vérifiable. […] De toute sa force répugne à cet intuitionnisme l'idée absolutiste que, parcourant la série des nombres, si je m'arrête quand je trouve un nombre de la propriété E, *cet arrêt ou bien intervient une fois, ou bien n'intervient pas* : c'est ainsi ou bien ce n'est pas ainsi, sans variation ni flottement ni tierce possibilité. Ce ne sont pas là choses à considérer de l'extérieur, mais il faut se concentrer intérieurement et se faire jour vers la « vision », l'évidence. Je crois que la solution est dans ce que je vais expliquer[…]. *Une proposition d'existence* – par exemple « il y a un nombre pair » – *n'est pas un jugement véritable, qui affirmerait un état de choses* ; les états de choses existentiels sont une invention vide des logiciens. « 2 est un nombre pair » voilà un jugement réel, qui exprime un état de choses[…] ; « il y a un nombre pair » n'est qu'un *abstrait de jugement* issu de ce jugement. Si j'appelle une connaissance un trésor précieux, l'abstrait de jugement est un papier indiquant la présence d'un trésor, sans dévoiler l'endroit. **Son unique valeur est de m'inciter à chercher le dit trésor**.

153 Indicernabilité au sein du continu

Ces deux possibilités [que deux nombres réels *coïncident*, qu'ils soient *distincts*] cessent de former, d'après Brouwer, une alternative complète, mais cela convient fort bien au caractère du continu intuitif, où deux positions séparées, en se rapprochant graduellement, glissent par dégradé dans l'indiscernabilité. Brouwer pense que dans un continu toutes les fonctions sont continues. *Le ne se laisse pas composer de parties*.

154 Clarté mathématique

Le point de départ de la mathématique est la série des nombres naturels, *i. e.* la loi ℵ qui de rien engendre le premier nombre 1, et de chaque nombre déjà engendré engendre son successeur. Ses théorèmes traitent, pour partie de l'universalité des nombres naturels, pour partie de l'universalité des suites de nombres naturels en devenir par de libres actes de choix. Ses théorèmes se rapportent donc partie à la possibilité, qui s'étend jusque dans l'infini, et donnée par le prolongement illimité du processus de développement des nombres naturels guidé par la loi ℵ, partie à la liberté infinie d'actes de choix non contraints sous-jacente à la suite numérique en devenir, actes de choix qui à chaque pas arrêtent à une place arbitraire le processus toujours recommencé de développement de la suite des entiers. La nature des choses veut que la saisie de l'essence, d'où proviennent les théorèmes généraux, soit toujours fondée sur l'induction complète, *l'intuition mathématique originelle*. Même dans les sciences de la réalité, telle la physique, la mathématique représente en fin de compte l'impossibilité où nous sommes de tracer une image théorique de *l'être* sauf sur le fond du *possible*[...], il suffit d'évoquer par exemple l'espace vide comme milieu des coïncidences spatiales possibles. La mathématique n'est pas le schéma rigide et rigidifiant que le profane croit si volontiers ; elle est plutôt ce carrefour de sujétion et de liberté où résiderait la condition même de l'homme.

Grâce à Brouwer, qui aura pensé jusqu'au bout l'idéalisme en mathématique, celle-ci atteint le plus haut degré de clarté intuitive. Mais le professionnel voit avec tristesse s'en aller en fumée la majeure partie de ses théories les plus sublimes.

155 Jeu de preuve hilbertien

[quand on *formalise* la mathématique, l]es théorèmes deviennent des figures dénuées de sens et faites de signes ; la mathématique cesse d'être connaissance, elle est un *jeu de formules* réglé par certaines conventions et entièrement comparable au jeu d'échecs. Aux pièces correspond, dans la mathématique, un stock limité de *signes*, et à une configuration quelconque des pièces sur l'échiquier correspond l'assemblage des signes en une *formule*. Une ou plusieurs formulent ont valeur d'*axiomes* ; leur contrepartie dans le jeu est la disposition prescrite des pièces en début de partie. Et de même que d'une position au jeu sort la position suivante part l'exécution d'un coup qui doit se conformer à de certaines règles de trait, de même là valent des *règles* formelles *d'inférence*, d'après lesquelles de nouvelles formules s'obtiennent de formules ou en peuvent être « déduites ». Par un position conforme aux règles du jeu d'échecs, j'entends une position apparue à partir de la configuration initiale au cours d'une partie qui s'est déroulée selon les règles. L'analogue en mathématique est la formule *démontrable* (ou mieux : *démontrée*), qui résulte des axiomes sur la base des règles d'inférence. Certaines formules d'un caractère intuitivement descriptible sont stigmatisées comme *contradictions* ; aux échecs nous entendons par contradiction toute configurations dans laquelle dix reines de même couleur figurent sur l'échiquier. Des formules d'une autre structure, comme le mat pour le joueur d'échecs, excitent le praticien du jeu mathématique à essayer de les obtenir par un habile enchaînement de coups, au titre de formes finales dans une partie de démonstration correctement conduite. Jusqu'ici tout est jeu et non pas connaissance ; mais dans la *métamathématique*, selon l'expression de Hilbert, ce jeu devient à son tour objet de connaissance : on doit reconnaître qu'une contradiction ne peut jamais apparaître *comme formule finale d'une démonstration*. D'une façon analogue il n'y a plus jeu, mais connaissance, lorsqu'on montre qu'aux échecs dis reines de la même couleur sont impossibles dans une position correctement jouée. On le voit ainsi : les règles de trait disposent qu'un coup ne peut jamais jamais augmenter la sommes des nombres des pions et des dames d'une couleur. En début de partie cette somme =9, elle ne peut donc – et là nous effectuons une inférence intuitive-finitiste par induction complète – dépasser cette valeur dans aucune position au cours d'une partie. C'est seulement pour parvenir à cette *unique* connaissance que Hilbert a besoin de la pensée à signification contentuelle ; sa démonstration de la non-contradiction se déroule en parfaite analogie avec celle qu'on a donnée pour les échecs, encore qu'elle soit bien plus compliquée.

160-1 Synthèse Duhem-WEyl-Brouwer-Hilbert

La physique théorie est le grand exemple d'une connaissance d'un type tout autre que la connaissance intuitive ou phénoménale ordinaire, laquelle exprime simplement ce qui est donné à la perception. Dans celle-ci chaque jugement a son sens à lui et qui s'effectue entièrement dans la perception ; il n'en va pas du tout de même pour les énoncés individuels de la physique théorique : ici, s'agissant de confrontation avec l'expérience, c'est seulement *le système tout entier* qui entre en compte. **Dans la théorie, la conscience arrive à « sauter par dessus son ombre », à laisser de côté le substance du donné, et à représenter le transcendant** ; mais c'est, bien entendu, **d'une façon symbolique seulement**. La structuration théorique diffère de la perception intuitive et son but n'est pas moins problématique que la création artistique. Au-dessus de l'idéalisme, appelé à renverser le réalisme naïf absolutisé par la théorie de la connaissance, s'élève un troisième monde où par exemple Fichte a pénétré dans la dernière époque de sa philosophie. Mais il succombe encore à l'erreur mystique de croire que nous puissions finalement saisir ce transcendant dans la lumière de notre intelligence. Au contraire ne nous reste, dans ce domaine, que la construction symbolique. À mon avis elle ne conduit jamais à aucun résultat définitif – à la différence du savoir phénoménal, sans doute humainement soumis à l'erreur, mais intransformable pour l'essentiel. Elle est portée par le processus vivant de l'esprit qui s'accomplit en nous et doit être toujours recommencé. Elle n'est pas une reproduction du donné, **sans être non plus**, comme certaines tendances extrêmes de l'art moderne le voudraient, **un jeu arbitraire dans le vide**. Des principes de la raison qui la dominent, nous n'avons pu jusqu'à présent concevoir d'une façon claire que le principe de non-contradiction, or il n'est pas le seul décisif. C'est la tâche du mathématicien de veiller à ce que cette *conditio sine quan non* soit dûment remplie. Si je caractérise l'intelligence perceptuelle de savoir, l'intelligence théorique repose sur la croyance – croyance à la réalité de mon moi personnel, du moi d'autrui, ou à celle du monde extérieur ou de Dieu. Si l'organe de la première est le « voir » au sens le plus large, l'organe de la théorie est « le principe créateur ». Hilbert pratiquant un simple jeu de formules vise une connaissance théorique, par contraste avec Brouwer qui veut une mathématique intuitive. **Mais où est cet au-delà porté par la croyance, vers lequel s'oriente ses symboles ?** Je ne le trouve pas à moins de laisser la mathématique se fondre complètement avec la physique et d'admettre que les concepts participent à la construction théorique du monde réel de la même façon que les concepts d'énergie, de gravité, d'électron, etc. L'histoire montre que dans la physique intuition et théorie doivent marcher la main dans la main. […] [Il est] d'un grand profit que Brouwer ait fortifié, dans la mathématique, le sens de l'intuitivement donné. Son analyse exprime d'une manière pure le contenu de l'intuition mathématique originelle, et en conséquence est traversée d'une clarté sans énigme. Mais en même temps que le chemin de Brouwer il faut aussi suivre le chemin de Hilbert, car on ne saurait nier qu'**est vivant en nous un besoin théorique, incompréhensible du point du vue strictement phénoménal, dont l'élan créateur, orienté vers la représentation symbolique du transcendant, demande à être satisfait**.

V. (1929) : *la consistance en mathématiques*

162 Aucune négation n'est positive

(NdT) […]

[…]

[…] La négation finitiste ou constructive ne peut exprimer que *l'impossibilité* (la contradiction, l'absurdité) de l'existence d'un *n*. […]

163 Sphère primitive de Gonseth

« Par des conceptualisations et des affirmations finitistes, nous exprimons chaque fois que la réflexion, l'affirmation, ou la définition dont il s'agit restent dans les limites de la représentation d'objets ou de l'effectuabilité du processus, et qu'elles sont renfermées dans la sphère de l'objectivité concrète...

[cité de Hilbert-Bernays 1934, rééd°1968]

165 Pour Brouwer avec le cœur, pour Hilbert avec l'esprit

Deux circonstances évoquent formellement le danger de contradiction à l'intérieur du système des propositions mathématiques, parce qu'elles empêchent ces propositions d'être des énoncés doués de sens, en l'acception où nous savons ce que nous voulons dire quand nous demandons si elles sont vraies ou fausses. L'une de ces circonstances, que Brouwer le premier a éclaircie, est l'application illimitée des termes "tout" et "un quelconque" à un champ de pures possibilités ouvertes à l'infini ; l'autre le processus de nivellement que les mathématiques ont opéré aveuglément sur les types russelliens. C'est particulièrement sur le second point que les mathématiques ont manifesté leur entière participation à la révolte d'esclaves des sciences positives contre la philosophie, la révolte de l'esprit anti-intellectuel, avec son processus niveleur démocratique, contre l'esprit intellectuel et sa structure hiérarchique, qui a changé la question : "Quelle est votre nature intrinsèque et quels en sont les rapports ?" en cette autre : "À quoi servez-vous ? Quel profit procurez-vous quand vous jouez votre partie dans le processus de production étalonné par tels ou tels axiomes ?" La mathématique intuitioniste de Brouwer rétablit l'esprit en ses anciens droits sacrés. La mathématique formalisée de Hilbert, cependant, entreprend de montrer que le parti opposé, qui en effet tombe très au-dessous de l'esprit quand il demande que la richesse débordante de ses "résultats" soit acceptée comme vraie littéralement, a en dernière instance absolument raison malgré tout – **"en dernière instance" signifiant : devant une cour transcendantale que nous réalisons symboliquement**. En mathématiques, l'enquête sur le caractère authentique ou non du fonctionnement interne de notre culture occidentale tout entière demande une décision plus rigoureuse que celle qui peut être atteinte dans les autres champs plus vagues de la connaissance.

165-6 Tiers-exclu et négation ("chaque" chez l'infini)

il est incorrect de décrire le point de vue intuitionniste en disant que le *tertium non datur* s'applique ou ne s'applique pas dans le cas indiqué, selon que [l'ensemble d'objets M donné] est un ensemble infini ou fini. La question n'est pas dans la distinction entre fini et infini, mais dépend de ce que M est donné comme agrégat d'objets exhibés individuellement, un par un (donc est fini), ou bien non. Si j'ai devant moi plusieurs morceaux de craie l'assertion “Toutes ces craies sont blanches” n'est qu'un abréviation pour l'assertion : “Cette craie-ci est blanche, et cette craie-là est blanche, et...” (je les désigne l'une après l'autre) : de même “Il y a parmi elles une craie rouge” est une abréviation pour : “Cette craie-ci est rouge, ou celle-là est rouge, ou bien...”. Mais une pareille interprétation n'est **possible que pour des ensembles dont on exhibe les éléments**. Si par contraste avec cet exemple nous prenons la suite des nombres naturels 1, 2, 3, … et considérons une assertion comme “Tous les nombres sont pairs”, une interprétation analogue conduit à un logique infini (le “et” et le “ou” de la logique ont une analogie avec le × et le + de l'arithmétique) : 1 est pair, et 2 est pair, et 3 est pair, ... Mais il est visible que cela n'a pas de sens. Chaque fois que se présente une proposition générale de cette espèce, elle a un sens hypothétique, et assure que si on vous donne un nombre défini quelconque, par exemple 18, vous êtes certain de la correction du jugement que 18 est un nombre pair. Il est visiblement impossible de dépourvu de sens de nier une pareille proposition hypothétique. Le point dont tout dépend est l'ineffectuabilité de la négation, non pas de la non-validité du *tertium non datur*. […]

Je n'entrerai pas dans de grandes discussions afin de vous convertir à cette opinion de Brouwer. C'est entièrement une affaire de réflexion[...], qui n'a rien à voir avec des théories épistémologiques, voire métaphysiques, ni avec de quelconques axiomes arbitrairement nommés mathématiques, ni avec leurs manipulations techniques. Chacun en admettra la vérité sitôt qu'il l'aura comprise.

166-7 Liberté primitive de l'infini potentiel

En développant l'arithmétique il y aurait peut-être à y distinguer quatre étages en ce qui concerne le rôle joué par l'infini. […] Au troisième étage, les signes numériques qui figurent sont plongés dans la suite de tous les nombres *possibles*, qui tire son origine d'un processus génératif conforme au principe que d'un nombre donné, un nouveau peut être formé, son consécutif, par addition du nombre 1. Ici l'existant est projeté sur le fond du *possible*, sur le fond d'une multiplicité de possibilités qui est produite et ordonnée suivant un processus fixé mais qui est ouverte dans l'infini. À ce point de vue correspond la méthode de définition et d'inférence par induction complète. **Il n'y a pas de plus grand contre-sens que de subordonner la légitimité de cette procédure à l'existence en acte d'une infinité d'objets dans le monde réel, alors qu'elle réfère au *possible*.** Je crois que nous touchons là le **fond de la méthode mathématique en général : la construction *à priori* du *possible*, par contraste à la description *à postériori* du donné en acte**.

168 Ensemble intension-objet !

Ordinairement une propriété objectivée s'appelle en mathématiques un ensemble.

168-9 Récurrence primitive implicite !

nous pouvons nous convaincre que dans une partie d'échecs correcte une configuration de neuf pions blancs ne peut jamais se présenter. La reconnaissance de la non-contradiction du jeu mathématique s'obtient de la même manière que pour les échecs. Pour les échecs, on raisonne comme suit : la configuration initiale comporte huit pions blancs. D'après les règles, un coup peut diminuer le nombre des pions et ne l'augment jamais. Donc... Ce donc est mis pour l'inférence par induction complète qui parcourrait la partie d'échecs donnée ; coup par coup.

169 Goneseth : sphère primitive de la "métamathématique"

Il est parfaitement clair pour Hilbert que les arguments qui administrent la preuve de non contradiction en “métamathématique” sont d'un bout à l'autre doués du caractère fini demandé par Brouwer. La pensée intuitive en termes contentuels repose sur l'évidence, non pas sur des axiomes ; elle est véhiculée par le langage qui forcément est toujours un instrument de communication incertain. Par ailleurs les mathématiques elles-mêmes n'ont pas besoin d'un langage quel qu'il soit, puisque ses formules ne signifient rien et ne véhiculent rien.

Mais pourquoi aller au-delà des bornes des jugements doués de sens, puisque cet au-delà est totalement vide et que la connaissance n'a rien à en gagner ? Une réponse éventuelle semble être celle qui assigne aux jugement idéaux un rôle similaire à celui de la monnaie de papier en économie : elle n'ajoute de nouvelles valeurs à celles qui existent réellement, elle facilite seulement les transactions.

[eg de raisonnement trivialisé par induction mais humainement infaisable sans] [Bon, elle incite & guide quand même !]

169-71 Duhem & consistance

La physique théorique justifie et complète la construction de ce monde intersubjectif que nous édifions dans notre vie selon l'attitude naturelle. Les conditions qui prévalent en physique théorique ne correspondent pas du tout à l'idéal brouwerien de la science. Une assertion de physique particulière, une loi physique particulière, n'ont pas de sens réalisable par l'intuition ni vérifié par l'expérience. Seul le système théorique en tant que tout est susceptible d'être comparé à l'expérience. Ce système est corroboré s'il y a *concordance*, c'est-à-dire si, sur la base de nos théories, toutes les déterminations directes de la même grandeur physique conduisent à un résultat identique. […]

Le formaliste fidèle à ses principes doit laisser sans réponse la question pourquoi il choisit précisément tels axiomes comme point de départ de son jeu de démonstration. Son intérêt pour la non-contradiction est difficile à justifier. […] seule une théorie non contradictoire peut conduire à des résultats concordants quand elle est appliquée à l'expérience ; la non-contradiction est la partie de la concordance qui ne se rapporte qu'à la théorie elle-même, la partie qui n'a pas encore de contact avec la sphère de ce qui est donnée aux sens. La tâche du mathématicien est de voir que les théories des disciplines scientifiques satisfont la condition *sine qua non* d'être formellement définies et non contradictoires.

171 Motivation des signes formels (ou Gonseth : axiomatisation du formalisable)

Ces remarques [éclairant dans la sphère primitive le sens des signes formels de la mathématique hilbertienne], il va de soi, n'ont qu'une valeur explicative et sont destinées à rappeler la correspondance entre les formules de notre mathématique formalisée et certaines propositions de mathématique courante qui sont conçues comme des assertions réelles de quelque chose.

172 Quantification existentielle = *intégration*

Quand nous incluons l'infini, deux nouvelles espèces de signes deviennent nécessaires : des *variables*, telles x, y, et des *intégrations*. Par l'intégration Σ_x on obtient l'expression $\Sigma_x A(x)$: “Il existe un x tel que A(x)”

176 Complétude de la logique propositionnelle

les mathématiques et leurs démonstrations sont une comédie aussi longtemps que les axiomes transfinis n'interviennent pas dans la partie. […] le syllogisme est sans force à défaut des axiomes transfinis ; les résultats qu'il produit sont beaucoup plus aisément atteints par vue directe, c'est-à-dire par le calcul de la valeur de la formule finale, telle que la détermine sa construction suivant notre règle d'évaluation. Le syllogisme ne sauverait pas les mathématiques d'être une immense tautologie, tandis que le transfini est le vaisseau qui nous emporte au delà du domaine de l'immédiatement concevable.

VI. (1940) : *le fantôme de la modalité*

187 Sens géométrique de l'implication

la règle d'inférence (F) se lit :

(F) Si un point p est situé dans α et dans $\alpha \rightarrow \beta$,
alors p est situé dans β[...]

[…]

(F) donne la réponse la plus complète à la question : quelle étendu de connaissance supplémentaire me faut-il sur un point p dans α pour être sûr qu'il est dans β ? En effet $\alpha \rightarrow \beta$ est le plus ensemble γ dont la partie commune avec α est contenue dans β, *i. e.* toute région γ qui a cette propriété est contenue dans $\alpha \rightarrow \beta$.

191 Acte d'affirmer

L'assertion $\vdash$**a**, à la différence de **a** elle-même, n'est pas une formule du système, mais un énoncé doué de sens ou une communication à propos de **a**. En conséquence de cette *metabasis eis allo genos*, il n'y a pas de sens à appliquer à $\vdash$**a** les opérateurs qui sont intérieur au système, tels ~, ∪, ∩, ni à itérer le signe d'assertion $\vdash$.

191-2 Implication & prédiction

si l'on vous donne un nombre particulier n, vous pouvez être sûr sans examen plus poussé que n + 1 = 1 + n. Ce n'est pas une proposition énonçant un fait ; elle annonce quelque chose seulement si..., à savoir si on vous donne réellement un nombre. C'est un coup d'audace que de prédire quelque chose sur n avant de savoir que nombre n sera.

193-4 Itérations modales ?

Le clair obscur où se meuvent les modes obliques *P* et *N* [possible & nécessaire] se trahit d'une manière très remarquable par nos longues hésitations quand nous avons à formuler les axiomes qui gouvernent leur emploi. […] Les doutes commencent avec les itérations. Est-il vrai que

(8) $PP\mathbf{a} \rightarrow P\mathbf{a}$

ou même est-il seulement vrai que

(9) $P\mathbf{a} \rightarrow Np\mathbf{a}$?

Ce dernier axiome signifierait que des énoncés de possibilité ou d'impossibilité ne sont pas eux-mêmes soumis aux gradations modales, mais qu'ils sont soit impossibles, soit nécessaires. Plus on avance, plus on a l'impression de se mouvoir parmi des ombres vides.

195 Indépendance des axiomes de la logique propositionnelle

Il vaut la peine d'observer que notre calcul de probabilité [évaluer dans n'importe quelle partie du segment [0,1] clos par a $\mapsto$ 1 - a resp.

$v_{\sim a} := 1 - v_a$, $v_{a\cap b} := \min\{v_a , v_b\}$, $v_{a\cup b} := \max\{v_a , v_b\}$ et $v_{a\to b} := \min\{ 1 , 1 - v_a + v_b \}$]

satisfait [les 12 axiomes du calcul propositionnel donnés p. 185 pour ~, $\cup$ et $\cap$], sauf (I. 2) [(**a** → (**a** → **b**)) → (**a** → **b**)], en ce sens que ces formules ont la valeur 1 quelles que soient les valeurs des arguments **a**, **b**, **c**. Donc notre modèle monte que l'axiome (I. 2) est indépendant des autres. Par la même méthode d'évaluation, on établirait l'indépendance de chacun des axiomes de cette table.

199 Que voulons-nous en mathématique ?

Si nous cherchons la vérité pure et honnête en mathématiques, la thèse intuitioniste est irréfutable.

200 Concis du programme de Hilbert

Hilbert a héroïquement tenté de sauver les mathématiques classiques de l'attaque de Brouwer en formalisant complètement les mathématiques. Leurs propositions sont changées en formules dépourvues par elles-mêmes de sens, et une preuve mathématique qui consiste en formules de cette sorte se déroule d'une manière qui peut se décrire sans faire référence à leur signification. Cela met Hilbert à l'abri de la plupart des propositions mathématiques : Hilbert abandonne partout cette prétention au sens, et il essaie d'établir par le raisonnement intuitif non pas la vérité des formules mais la *consistance* de l'ensemble du système ; une partie jouée en observant fidèlement les règles ne conduira jamais à la formule ~ (0 = 0).

200-1 Modification du quanteur ∀

Afin de rendre possibles des conclusions aboutissant à un énoncé “général” (x) **A**(x), Hilbert a eu l'audace de combiner les idées de “un quelconque” et de “il y a” avec l'Axiome du Choix de Zermelo, et inventé un quanteur ρ_x appelé représentant. L'idée de cela est qu'un prédicat **A** vaudra d'un individu quelconque x s'il vaut du représentant ρ_x **A**(x) de **A**. Ou bien, traduit en un règle d'axiomes dans les mêmes notations que précédemment :

(13) A(ρ_x **A**(x)) → (x) **A**(x).

203 En dernier ressort : la sphère primitive de l'entendement

Notre structure symbolique peut comporter plusieurs strates, *e. g.* nous voudrons éventuellement appliquer à la physique des quanta les mathématiques classiques sous leur forme formalisée avec la logique existentielle d'accompagnement, plutôt que les mathématiques intuitionistes. Mais la strate supérieure sera toujours ouverte à la lueur du sens, de la vérité simple et honnête, telle que l'évidence intuitive et l'expérience la révèlent. Un symbolisme pur n'est jamais fermé sur lui-même ; en dernière instance l’œil de l'esprit doit s'y introduire. Nous pouvons enseigner à un homme, peut-être à un chien, non point à une pierre.

204-5 Itération de ⊢ pour la négation

Dans le système de Hilbert la lacune entre les formules (mathématiques) et les assertions métamathématiques de déductibilité de certaines formules ne peut pas être comblée. Il n'y a donc aucun sens à itérer l'assertion ⊢ ou à la combiner avec les symboles ~, $\cap$, $\cup$ qui figurent dans le système. Brouwer fait preuve d'une attitude plus conciliante[...]. Soit **a** l'énoncé que tous les nombres ont la propriété non-**A**. En construisant un nombre doué de la propriété **A** on démontre l'impossibilité, ou, selon les termes de Brouwer, l'absurdité de **a**, que nous indiquons par le symbole ~ **a**. En ce cas, il est correct de parler de l'absurdité de l'absurdité de **a** : ~ ~ **a**, qui serait établie en montrant que l'hypothèse d'un nombre a doué de la propriété **A** conduit à une contradiction

VII. (1940) : *le style de pensée mathématique*

210 Calcul = jeu combinatoire

(NdT) […]

[…] Henri Lebesgue ([1931-5], § 56) a très clairement exprimé cela : « **Calculer c'est agir**, et par suite le calcul plaît mieux aux enfants que le raisonnement : ils se plient volontiers à ses règles comme aux règles de tout jeu. Pour un mathématicien, calculer c'est raisonner, c'est analyser plus profondément les faits géométriques sous-jacents ; pour un jeune élève, calculer c'est laisser aux symboles le soin de raisonner à sa place, c'est oublier tout fait géométrique pour ne plus avoir que des symboles ».

211-2 Pensée mathématique

J'entends […] en second lieu la forme de raisonnement que le mathématicien, laissé à lui-même, applique dans son propre domaine. Par le processus mental de la pensée nous essayons d'établir la vérité, effort de notre esprit en vue de s'éclairer lui-même par la preuve intuitive ou évidence. Aussi, exactement comme la vérité elle-même et l'expérience et l'évidence, est-ce quelque chose de caractère assez uniforme et universel. Se référer à la lumière dans notre soi le plus intérieur n'est ni réductible à un ensemble de règles mécaniquement applicables, ni ne se divise en compartiments étanches tels que la pensée historique, philosophique, mathématique, etc.

214-5 Pouvoir des mots

Les mots sont des instruments dangereux. Créés pour les besoins de notre vie quotidienne, ils auront leur bonne signification en des circonstances familières limitées, mais Jacques et le premier venu ont tendance à les étendre à des sphères plus vastes sans se soucier s'ils gardent encore un pied dans le réel. Nous assistons aux effets désastreux du pouvoir magique des mots dans les affaires politiques où ils ont un sens beaucoup plus vague et où les passions étouffent souvent la voix de la raison. Un scientifique doit percer le brouillard des mots abstraits pour atteindre le roc concret de la réalité. J'ai l'impression que la science économique a une tâche singulièrement difficile et qu'il lui faudra de grands efforts pour se mettre au niveau de ce principe. Il est, ou devrait être commun à toutes les sciences, mais les physiciens et les mathématiciens ont dû l'appliquer aux concepts les plus fondamentaux, là où la résistance dogmatique est au plus fort, et il est ainsi devenu pour eux une second nature. Par exemple la première étape, quand on explique la relativité, doit toujours consister à renverser la croyance dogmatique en les expressions temporelles de passé, de présent, et de futur. On ne peut pas appliquer les mathématiques tant que les mots obscurcissent la réalité.

226 Le matheux *agit*

nous avons tâché de décrire comment un construit mathématique s'extrait de la matière brute de la réalité. Regardons maintenant ces produis de l'extraction avec l'œil du mathématicien pur. L'un d'eux est la suite des nombres naturels, l'autre la notion générale d'espace topologique $\{S_0\}$ en lequel un schéma topologique S_0 se développe par des dérivations successives S'_0, S''_0, S'''_0, … Dans les deux cas *l'itération* est le trait le plus décisif. Donc tout notre raisonnement doit reposer sur l'évidence concernant le processus entièrement transparent qui engendre les nombres naturels, plutôt que sur de quelconques principes de logique formelle comme le syllogisme, etc. Le travail du mathématicien qui construit *n'est pas* de tirer des conclusions logiques. Ses arguments et ses propositions sont simplement un accompagnement de ses actions, de ses actes d'effectuer des constructions.

229 Jeu formel a lieu dans sphère primitive

un système axiomatique, quoique évitant de construire les *objets* mathématiques, construit les *propositions* mathématiques par l'application combinée et itérée de règles logiques. En tirant des conclusions de prémisses données, on procède suivant des règles logiques dont on s'est efforcé, depuis Aristote, de donner une liste exhaustive. Par là, pour les propositions, la méthode axiomatique est un constructivisme sans mélange. De nos jours David Hilbert a poussé la méthode axiomatique à ses extrêmes limites, où toutes les propositions, axiomes inclus, sont transformées en formules et où le jeu de la déduction progresse à partir des axiomes par des règles qui ne prennent pas en comptes le sens des formules. Le jeu mathématique se joue sans bruit, sans mots, comme les échecs. Seules les règles ont à être communiquées verbalement, et il est naturel que **toute argumentation sur les possibilités du jeu**, par exemple sur sa consistance, **se déroule dans le médium des mots et recoure à l'évidence**.

230 Conclusion

les mathématiques, en dépit de leur ancienneté, ne sont nullement vouées par leur complexité à une sclérose progressive ; elles sont bien vivantes, et se nourrissent par leur racines profondes qu'elles plongent dans l'esprit et dans la nature.

VIII. (1946) : *mathématique et logique* – *bref survol en préface à une recension de « The philosophy of Bertrand Russell »*

233 Ensemble ou propriété ?

Quand le mathématicien adopte le terme *ensemble* de préférence à *propriété*, il indique son intention de considérer comme identiques des propriétés coextensives, deux propriétés α et β étant coextensives si tout élément qui a la propriété α a aussi la propriété β et *vice versa* (Frege : ensemble = extension de concept).

235 Ontologie du "quelconque"

En introduisant des propriétés de nombres, nous présupposons que nous savons ce que nous voulons dire par “un nombre *quelconque*” ; nous stipulons que la *catégorie* des éléments auxquels renvoie l'argument de la fonction propositionnelle considérée doit être donnée. Nous postulons que cette catégorie est un domaine fermé de choses existant en soi, ou bien, dirons-nous brièvement, qu'elle est *existentielle*, puisqu'il nous arrive de nous demander, à propos d'une propriété donné γ de ses éléments, s'il *existe* un élément qui a la propriété γ, dans l'attente que, quelle que soit γ, la question a un sens défini, et qu'il existe un tel élément ou bien que chacun des éléments de la catégorie a la propriété opposée $\sim \gamma$. En arithmétique ou en géométrie élémentaire nous postulons que les nombres, ou bien les points, lignes, et plans, constituent des catégories existentielles en cette acception.

237 Paradoxe de la borne sup – toujours et encore...

la propriété [définissant la borne inférieure $\gamma = \{x ; \exists\xi, I(\xi) \wedge x \in \xi\}$ où l'argument ξ réfère à la catégorie “propriétés (ou ensembles) de nombres”], n'est sûrement pas identique en sens avec aucune des propriétés de niveau 1, attendu qu'elle est définie *en termes de la totalité de toutes les propriétés de niveau 1*. C'est donc une propriété de niveau supérieur 2. Néanmoins elle peut être *coextensive* à une propriété de niveau 1, et voilà exactement ce qu'affirme “l'axiome de réductibilité” de Russell. Mais si les propriétés sont des objets construits, nulle place pour un axiome ; la question devrait se décider sur la base de la construction, or dans le cas présent l'affaire est sans espoir.

238-9 Dogme des *Principia*

Dans le système qui [sort des *Principia* de Russell avec axiome de réductibilité], les mathématiques ne sont plus fondées sur la logique, mais sur une façon de paradis de logicien, un univers doté d'un “ameublement dernier” de structure passablement compliquée, gouverné par un grand nombre de puissants axiomes de clôture. Les motifs sont clairs, malheureusement croire en l'existence de ce monde transcendantal demande autant d'actes de fois que les doctrines des Pères de l'Église ou celle des philosophes scolastiques médiévaux.

240 Fondement itératif des *Principia*

Si l'intention des Principia était de fonder les mathématiques sur la logique pure, le résultat, nous le voyons, est fort différent : ce qui a pris la place de la logique, c'est un système axiomatique de l'univers. Sa véritable structure, la hiérarchie des types, ne peut pas se décrire sans en appeler au concept intuitif d'itération. Développer, à la manière de Dedekind et de Frege, une théorie des nombres naturels à partir de ce système est donc une entreprise de valeur doutouse.

242 Tiers exclus & entiers en devenir

Brouwer a rendu évident, et, je pense, mis à l'abri du doute, qu'il n'y a pas de preuve confirmant la croyance au caractère existentiel de la totalité de tous les nombres naturels, et donc que le principe du tiers exclu sous la forme :“Ou bien il y a un nombre d'une propriété donné γ, ou bien tous les nombres ont la propriété $\sim \gamma$”, n'a aucun fondement. La première partie de cet énoncé est un *abstract* d'un jugement de fait de la forme suivante : Le nombre construit de telle ou telle manière a la propriété γ. La seconde partie de l'énoncé est une généralité *hypothétique*, qui affirme quelque chose seulement si..., par exemple *si* vous donnez un nombre en acte, vous pouvez être sûr qu'il a la propriété $\sim \gamma$. La suite des nombres, qui par passage de chaque nombre au suivant, croît au-delà de toute étape déjà atteinte, est une multiplicité de possibilités ouverte vers l'infini ; elle reste à jamais dans une condition de création, loin d'être un domaine clos de choses existantes en soi. Avoir aveuglément confondu l'un avec l'autre, voilà quelle est la véritable source de nos difficultés, en y incluant les antinomies – et cette source est d'un ordre plus fondamental que ne l'indique le principe du cercle vicieux russellien.

242-3 Dogme logique (généralisation du fini à l'infini)

Brouwer nous a dessillé les yeux en nous révélant combien les mathématiques classiques, dans leur foi en “l'absolu” qui transcende toutes les possibilités humaines et réalisation, va au-delà des jugements capables de revendiquer une signification réelle et une vérité fondée sur une preuve intuitive. D'après lui et la lecture de l'histoire, la logique classique fut tirée par abstraction des mathématiques des ensembles finis et de leurs sous-ensembles. (Le mot fini doit être pris au sens précis que les éléments d'un tel ensemble sont exhibés explicitement un par un.) Par oubli de l'horizon borné de cette origine, on en est venu plus tard à méprendre la logique pour une discipline supérieure et antérieure aux mathématiques, et on a fini par l'appliquer, sans justification, à la mathématique des ensembles infinis. C'est la Chute et le péché originel de la théorie des ensembles, dont elle justement punie par les antinomies. La surprise n'est pas que des contradictions soient apparues, c'est qu'elles soient apparues si tard dans la partie !

245 Preuve de la consistance se joue dans la sphère primitive

Les formules n'ont pas de signification. Une démonstration mathématique est une suite concrète de formules dans laquelle une formule dérive des précédentes suivant certaines règles compréhensibles sans recours à une signification quelconque des formules – exactement comme aux échecs chaque position dérive de la précédente par un coup confirme à certaines règles. La *consistance*, le fait qu'aucune partie d'un tel jeu de déduction ne peut se terminer par la formule ~ (1 = 1), doit se démontrer par un raisonnent intuitif sur les formules, raisonnement qui repose sur l'évidence plutôt que sur les axiomes, et qui respecte toute à fait les limites sur l'évidence révélées par Brouwer.

245-6 Fondement par & dans la sphère intuitive

Les formules de Hilbert sont des structures concrètes faites de symboles concrets ; leur ordre à l'intérieur d'une formule, leur identité dans la même formule ou dans des formules distinctes, doivent être reconnaissables indépendamment des légères variations de leur tracé. En manipulant ces symboles, nous nous mouvons sur le même plan de compréhension qui guide notre vie quotidienne dans nos relations à des instruments tels que marteau, table, ou chaise. Hilbert y voit le fondement prélogique le plus important des mathématiques, et en fait de toute science. Mais en outre, ses axiomes mathématiques et l'intuition de l'itération dont use le raisonnement métamathématique non axiomatique sur les mathématiques, sont d'autre ingrédients extralogiques du système.

IX. (1953) : *sur le symbolisme des mathématiques et de la physique mathématique*

248-9 Duhem

(NdT) […] En mathématiques, nous ne devons pas aller au-delà des « vérités d'intuition où l'infini n'entre que comme domaine ouvert de possibilités » suivant la prescription de Brouwer. En science de la nature le tableau est différent, la connaissance « y devient nécessairement une mise en forme symbolique ». Là les énoncés n'ont pas individuellement de charge contentuelle, seul possède un sens le système théorique en tant que tout […]. Cela évoque Duhem ([*La théorie physique*], chap. III, § 1) qui pensait que les théories physiques n'énoncent pas de relations véritables entre les propriétés réelles des corps, et qu'elles fournissent au mieux « une coordination logique qui est comme une image de l'ordre vrai selon lequel sont organisées les réalités qui nous échappent ». Les symboles n'étant ni vrais ni faux, nos théories ne sont que des modèles ; quelques-unes sont des *classifications naturelles* qui expriment dans leur structure, non point dans le contenu de leurs hypothèses, des rapports profonds et véritables. Duhem disjoint la perception intuitive et les formations théoriques : l'objet de la première est ontologiquement plus solide et plus certain que ce qui est élaboré par les secondes. Weyl attribue l'objet de discernement intuitif au savoir, les théorisations à la croyance […]. Comment départager des théories concurrentes ? D'après Weyl, comme d'après Duhem nous ne pouvons pas démontrer que l'ordre des lois qu'une théorie organise reflète un ordre transcendant. Duhem assignait au sens commun ou au *bon sens* de juger en dernier ressort. La bonne physique se sent, elle se fait avec le cœur. Weyl eût approuvé. Comme il était au-dessus de toute mesquinerie, nous devons croire qu'il ignorait un auteur avec qui il se rencontre et qu'il ne cite pas.

252 Caractéristiques des symboles-signes

Comme signes on emploie des structures douées d'une certaine permanence (non pas des bruits ni des nuages de fumée, car ils doivent durer au moins le temps nécessaire pour exécuter les opérations à leur appliquer). Ils doivent être facilement productibles et toujours reproductibles

252-3 Signes librement créés

[La géométrie analytique de Descartes] enseigne comment (relativement à un système de coordonnées) représenter chaque point de l'espace par ses trois coordonnées, x, y, z, qui sont un triplet de nombres réels. Ce n'est plus quelque chose de donné dans la nature comme l'espace (où Newton voyait le *sensorium Dei*), c'est une libre création comme le nombre qui est désormais le matériau de construction du monde objectif. Je tiens à cette opposition entre l'espace réalité et le nombre création. Plus haut je plaçais l'accent sur la forme concrète du signe de nombre ; voici que je place l'accent sur la liberté de l'esprit qui se révèle dans la création de ces symboles ("dont la structure sensible est sans pertinence"), et dans l'interprétation du monde moyennant ces symboles. L'esprit n'emprunte plus rien, non pas même l'espace et le temps, pour élaborer sa représentation symbolique du monde du donné. Il est essentiel **que le symbole soit compris *en tant que symbole*, non pas en tant que partie constituante de la réalité à représenter**.

253-4 Définir pour abréger

des nombres a, b, c vous étant donnés, si vous trouvez que a < b et b < c, vous pouvez être sûr que a < c. Les lettres a, b, c figurent comme signes pour "*un nombre quelconque*". La-dedans je ne vois toujours rien de spécifiquement mathématique. Une règle sur un acte juridique auquel plusieurs personnes participent, se rapporte de même à des personnes "quelconques", et il serait rationnel de les distinguer par des lettres si, dans la formulation de la règle, telle ou telle personne devait être souvent mentionnée. La locution du droit britannique "le premier parti, le second parti" ne diffère de cela que par sa lourdeur. Cette lourdeur devient insupportable lorsque, comme il arrive dans une démonstration, le même nombre arbitraire revient éventuellement deux cent fois au lieu revenir quatre fois seulement ; en ce cas une lettre est vraiment plus commode.

254 Les mots parlent

Avec les jeunes étudiants de mathématiques nous faisons constamment l'expérience de la nécessité de leur graver dans l'esprit la recommandation de ne pas oublier les mots qui se rapportent au formules et qui seuls y confèrent un sens.

253-4 Croyance en l'infini actuel

Un événement résolument nouveau survient, qui équivaut à la *naissance des mathématiques*, quand, au lieu de prendre les nombres tels qu'on les rencontre d'une manière contingente dans la réalité, on les plonge dans la suite |, ||, |||, … de *tous les nombres possibles*. Cette suite résulte d'un processus génératif dans lequel la même opération, le passage d'un nombre n au suivant n', est toujours répétée. Appliquée au signe, cette opération se marque par l'adjonction d'un accent supplémentaire. La suite infinie des nombres n' n'est pas réellement produite ; on croit à la *possibilité* de continuer le processus au delà de tout point déjà atteinte. Ici *le réel est projeté sur l'arrière-plan du possible, lequel est une multiplicité librement créée par l'esprit suivant une procédure fixe et ouverte sur l'infini*.

254 Bi-unicité au fondement des entiers (et de la mathématique)

La suite des nombres naturels est l'exemple le plus primitif d'un domaine de variabilité qui sert à la construction symbolique et qui peut être dominé du regard à priori, ayant été créé par nous. Tous les autres exemples se ramènent dans le fond à celui-là, qui est le plus simple. Je crois donc tout à fait légitime de qualifier, comme le fait Brouwer, d'*intuition mathématique originelle* l'idée du "*toujours un de plus*", d'où sort la suite de nombres. Elle est la base sur quoi Brouwer construit sa mathématique de théorèmes intuitivement évidents […] ; elle est aussi ce sur quoi Hilbert s'appuie quand il décrit ce qu'est une formule de sa "mathématique formalisée", ou bien cherche à assurer la non-contradiction de son système, par des considérations "métamathématiques"

257-8 Engendrer les signes & formules

Les signes ne sont pas individuellement mis pour quelque chose de donné en acte chaque fois ; ils sont tirés de la réserve potentielle d'une multiplicité ordonnée de signes ouverte à l'infini, et produite selon un procédé fixe.

[…] La description de la formation d'une formule a nécessairement un caractère inductif : une nouvelle formule résulte d'attacher à un symbole d'opération (ou de quantification) une ou plusieurs formules déjà formées (c'est selon). En cela s'exprime l'élément systématique de la symbolisation, par quoi elle n'a pas à redouter la complexité des formules, si grande soit-elle.

259-60 Sphère primitive

La non-contradiction doit se prouver par des considérations intuitives-contentuelles, qui ont pour sujet les formules mathématiques. Pour le coup on *pense*, on ne *joue* pas, et ces considérations "métamathématiques" respectent absolument les bornes prescrites par Brouwer à la pensée contentuelle.

[…] de quelque côté que nous nous tournions, la preuve intuitive (*evidence*) demeure la source ultime de la vérité et de la connaissance. Sur elle Brouwer fonde la mathématique, et Hilbert la constatation (escomptée) de la non-contradiction. Mais la preuve intuitive jamais ne se laisse ramener à des règles ni protéger de l'erreur. Aussi les frontières jusqu'où s'étend la mathématique brouwerienne sont-elle floues, et on se demande si les considérations métamathématiques où s'engagent certains auteurs dans l'exécution du programme hilbertien ne tendent pas trop fortement l'arc de l'évidence.

261-2 Duhem, utilisation des mathématiques, limitation brouwerienne

si la mathématique formelle a dépouillé la prétention de produire des assertions vraies, quel est donc son but ? […]

la référence à l'emploi de la mathématique formelle en *science de la nature*, à son rôle dans l'édification constructive par la physique d'une théorie de l'univers réel. Car ici nous pouvons nous réclamer de la vérification de la construction théorique par l'expérience et la prédiction. Ce que nous trouvons en *physique théorique* ne correspond pas le moins du monde à l'idéal défini par Brouwer et réalisé dans sa mathématique – à savoir que chaque jugement ait un sens appartenant en propre à ce jugement et soit effectuable dans l'intuition. Les lois de la physique n'ont, chacune prise à part, aucun contenu vérifiable dans l'expérience. Seul le système ne tant que tout, se laisse comparer à l'expérience. […] Poussés par une croyance métaphysique en la réalité du monde extérieur, nous cherchons une mise en forme symbolique du transcendant, et nous éprouvons la satisfaction de la voir confirmée dans l'expérience. J'en viens donc à la thèse suivante […] : si l'on prend la mathématique à part, on se bornera avec Brouwer aux vérités d'intuition où l'infini n'entre qu'en tant que domaine ouvert de possibilités ; aucune raison n'est trouvable qui nous forcerait d'aller au-delà. Mais en science de la nature nous entrons dans une sphère qui de toute façon est impénétrable à l'évidence de la vision, et la connaissance y devient nécessairement une mise en forme symbolique. Attendu que la physique embarque avec elle la mathématique dans le processus de construction théorique du monde, il cesse d'être indispensable que la partie mathématique de ce processus soit isolable en tant que région particulière à l'intérieur de l'intuitivement certain. Contemplant les choses depuis cet observatoire supérieur d'où la science entière apparaît comme une unité, j'inclinerais à donner fondamentalement raison à Hilbert.

262 Existence

“l'existentialisme mathématique” , qui s'exprime dans le symbolisme des quanteurs, est bel et bon tant qu'il s'agit de développer des théories générales. Sitôt que dans un cas concret on a à faire une prévision numérique déterminée (même si elle n'est jamais exacte, toujours approchée seulement), on doit essayer de remplacer par une évaluation explicite l'existence symboliquement établie, ainsi que le demande la mathématique de Brouwer. […] J'estime donc opportun d'adresse au mathématicien d'aujourd'hui l'exhortation suivante : lorsque vous pouvez résoudre un problème par une construction explicite, ne vous contentez pas d'arguments d'existence pure !

X. (1953, pub. 1985) : *comparaison entre procédures axiomatiques et procédures constructives en mathématiques*

267 Bergson : action vivante *avant* réflexion

On peut, me semble-t-il, distinguer deux sphères dans la vie intellectuelle des hommes. L'une, celle de l'action, de la production de formes, de la construction ou de la création, est la sphère de l'artiste, du savant, du technicien, de l'homme d'état. L'autre, celle de la réflexion où l'on s'interroge sur le sens de toute activité, peut être considérée comme l'apanage du philosophe. L'activité créative non contrôlée par la réflexion risque de se détacher de toute signification, de perdre contact et perspective, de dégénérer en routine, tandis que le danger de la réflexion est de devenir un irresponsable “parler sur”, paralysant la puissance créatrice.

La réflexion philosophique devrait se combiner avec la réflexion historique, par laquelle nous nous approprions le passé en le transformant à la lumière des tâches d'aujourd'hui. Certes le but et l'intérêt principal du scientifique est la vérité objective, la vérité indépendante, qui se dresse au-dessus des faiblesses et des limites de l'existence humaine. Mais le savant ne peut pas nier que d'un autre côté la science qui se fait est une branche de l'entreprise humaine, comme telle inscrite dans l'histoire au même titre que la vie de l'esprit sur cette Terre d'où elle est sortie. On ne doit pas trahir l'existence souveraine de ses résultats, la stérilité serait la punition. Jour après jour nous vivons tous au milieu de cette tension entre l'historique-humain et l'éternel-objectif.

267-8 Mathématique proche de l'homme ?

Kierkegaard avait fait remarquer que la religion porte sur ce qui concerne inconditionnellement l'homme. Inversement (mais avec une égale exagération) on pourrait soutenir que les mathématiques s'occupent de choses qui ne concernent pas du tout l'homme. Elles ont la qualité inhumaine de la lumière stellaire, brillante, aigüe, mais froide. Il semble que par une ironie de la création l'homme sache s'y prendre avec les choses d'autant mieux qu'elles sont plus éloignées du centre de son existence. Ainsi sommes-nous le plus habiles là où la matière compte le moins, notamment en arithmétique.

Cela me rappelle un passage de la Métaphysique, lorsqu'Aristote examine si l'homme devrait jamais essayer de connaître au-delà des bornes de ce qui le touche immédiatement (την καθ αυτον επιστεμην). Car « si les poètes ont raison et si les dieux sont jaloux, il est probable que Dieu est particulièrement jaloux, et que tous ceux qui transgressent ces bornes sont condamné au malheur » (982b). Je ne suis pas sûr qu'au cours des dernières décennies, nous mathématiciens n'ayons pas, par nos abstractions, transgressé les bornes du règne humain. […]

[…] L'alarmant est que le progrès rapide de la connaissance scientifique ne s'est pas doublé d'une croissance analogue du sens moral et de la responsabilité, restés inchangés durant les âges historiques. Ce serait, à mon avis, de la légèreté que de revendiquer pour les mathématiques une position exceptionnelle et relativement innocente à cet égard, comme le fait Hardy. Il soutient que les mathématiques sont une science qui ne sert à rien, ce qui entraîne, à ce qu'il dit, qu'elles ne peuvent contribuer directement ni à l'exploitation ni à l'extermination de nos semblables. Cependant l'efficacité de la science repose sur le combinaison de l'expérimentation, *i. e.* de l'observation en des conditions librement choisies, et de la *construction symbolique*. Or cette dernière est ce qu'il y a de mathématique dans la science. Partant si la science est jugée coupable, les mathématiques n'échapperont pas au même verdict.

269/276 INFINI POTENTIEL

nous engendrons la suite *ouverte* de tous les nombres possibles à partir de 1 (ou de 0 qui = rien), en ajoutant à un symbole numérique quelconque n déjà atteint, un bâton de plus, ce qui change ce symbole en son successeur n'.

Ainsi *l'être* est projeté sur le fond du *possible*, plus précisément sur une variété de possibilités qui se déploie en itérant le même pas et reste ouverte à l'infini. Quel que soit le nombre n donné, nous jugeons toujours faisable de passer au suivant n'. Cette intuition du “toujours un de plus” de l'infini dénombrable ouvert, est fondamentale pour les mathématiques. […]

[…]

La suite des nombres naturels et le continu des nombres réels sont les exemples les plus importants de domaines de variabilité à priori contrôlables parce qu'ils sont de libres créations de l'esprit. Mais l'infinitude sur laquelle ils ouvrent n'est pas celle du donné, c'est celle du possible.

269-72 SUR LES AXIOMES

La méthode axiomatique fut à l'origine employée simplement vue d'élucider les fondements sur quoi on construit. Maintenant elle est devenue un outil de la recherche mathématique quotidienne. C'est peut-être en algèbre qu'elle a enregistré ses succès les plus grands. […]

[…] Dans l'ancienne axiomatique on s'occupait surtout d'axiomes qui déterminent complètement la structure du système, comme font par exemple les axiomes de la géométrie euclidienne pour l'espace euclidien ; nous rencontrons ici, en algèbre, des axiomes satisfaits par une pluralité de corps de nombres distincts et non isomorphes. Les axiomes ne servent pas, comme dans l'étude des fondements, à caractériser d'une manière unique une structure universelle ; ils servent de base commune à l'étude d'entités particulières résultant de constructions spécifiées.

[…] Euclide pris les axiomes pour des propositions évidentes portant sur les points, les droites et les plans dans l'espace réel. Il essaie de donner une définition descriptive de ces objets géométriques, mais tous les théorèmes sont obtenus par un déduction rigoureuse à partir des axiomes et ne dépendent en rien de leurs descriptions. […] La liste des axiomes d'Euclide était loin d'être complète, et les déductions comportaient des lacunes. Mais le changement d'optique est plus fondamental que cela : Hilbert n'essaie pas de décrire ce que points, lignes et plans signifient dans notre intuition de l'espace ; tout ce que nous avons de savoir d'eux et de leurs relations d'incidence, de congruence, etc., est contenu dans les axiomes, qui sont, pour ainsi dire, leurs définitions implicites (quoique nécessairement incomplètes). Dans sa biographie, Blumenthal rapporte que dès 1891, analysant un article de N. Wiener, Hilbert fit une remarque qui exprimait son point de vue d'une façon typiquement hilbertienne : « On devrait pouvoir remplacer, dans les énoncés de la géométrie, les mots point, ligne et plan, par table, chaise, chope de bière ».

[…]

Pour le débutant, si j'en puis juger d'après mon expérience quand j'étais jeune étudiant, l'axiomatique transcendantale a quelque chose de paradoxal et de choquant, parce qu'on doit essayer de faire totalement abstraction du sens intuitif des termes qui figurent dans les axiomes en qualité de concepts indéfinis. L'axiomatique qu'on emploie dans la recherche mathématique quotidienne est au fond bien plus simple. On a juste à formuler quelques-uns des faits fondamentaux qui, comme on peut le prouver, valent pour l'objet d'investigation, lequel est ordinairement un ensemble d'éléments librement construits. Les questions de la consistance, de l'indépendance et de la complétude, ne sont alors que de moindre importance.

272 DÉMONSTRATION DIGNE DE CONFIANCE

Nous ne nous contentons pas d'être convaincus, pour ainsi dire, plutôt que persuadés par la raison, d'une vérité mathématique par une longue chaîne d'inférences formelles et calculs qui conduisent aveuglément de chaînon en chaînon. Nous voudrions qu'on nous montre non seulement le point d'arrivée mais le chemin et les grandes lignes de la région à parcourir, comprendre les idées sous-jacentes de la démonstration et leurs connexions. En effet une démonstration mathématique au sens moderne, exactement comme n'importe quelle machine ou dispositif expérimental moderne, efface, par la complexité des détails techniques, les principes simples sur quoi elle repose.

272-3 INTUITION = MOTEUR

Lorsque dans ses cours d'histoire des mathématiques au dix-neuvième siècle Felix Klein veut situer Riemann, il écrit :

Il est certain que la pierre d'angle de l'édifice de toute théorie mathématique consiste dans les démonstrations. En y renonçant, les mathématiques se condamneraient elles-mêmes. Cependant ce sera toujours le secret de la productivité d'un génie que de dénicher de nouveaux problèmes et de définir des résultats et des connexions nouvelles et inattendues. À défaut de découvrir de nouveaux points de vue et de nouveaux buts, les mathématiques s'épuiseraient bientôt dans la précision du raisonnement logique et commenceraient à stagner par manque de matière. Ainsi d'une certaine façon les mathématiques ont avancé surtout grâce à ceux dont la force réside dans l'intuition plutôt que dans la rigueur logique.

Le principal organe de productivité de Klein était la perception intuitive des connexions et des rapports entre des domaines séparés. Il échouait quand il fallait une force concentrée.

273-4/5-6 Fécondité des axiomes & généralisations

Afin de comprendre une situation mathématique complexe, nous dissocions d'une manière naturelle les divers aspects du sujet, et nous rendons chacun d'eux accessible au moyen d'un groupe relativement restreint et aisément contrôlable de notions et de faits exprimés en termes de ces notions ; finalement nous retournons au tout en réunissant les résultats partiels dans leurs individualité propre. Ce dernier acte synthétique est purement mécanique. L'art intervient dans le premier acte, celui d'analyse où s'effectuent dissociation et généralisation. Nos mathématiques des dernières décennies ont nagé dans les généralisations et les formalisations. Mais on commet un contre-sens sur cette tendance si on y voit une recherche de la généralité pour elle-même. Le but véritable est la simplicité : la généralisation naturelle simplifie parce qu'elle réduit les hypothèses à prendre en compte. Il peut arriver, évidemment, que des généralisations en des directions différentes nous fassent comprendre la situation concrète sous des aspects différents.

Il est donc **dogmatique et arbitraire de parler de la vraie raison, de la vraie source du fait particulier**. Dire ce qui constitue une dissociation et une généralisation naturelles n'est pas aisé, car pour cela **il n'existe pas**, en dernière instance, **d'autre critère que la fécondité** : le succès décide. Dans cette procédure l'investigateur individuel est guidé par des analogies plus ou moins obvies et par le discernement instinctif de l'essentiel, discernement acquis par l'expérience accumulée au cours de la recherche. Systématisée, cette procédure conduit droit à la l'axiomatique. […]

[…]

J'ai dit qu'on vient à bout d'une configuration mathématique complexe en la dissociant en parties dont chacune peut être dominée par un ensemble d'axiomes relativement simple. C'est l'un des aspects de la procédure axiomatique, l'autre est l'économie par unification. On constate mainte et mainte fois que des théories qui par leur signification intrinsèque n'ont rien à voir, se révèlent gouvernées par les mêmes axiomes, une fois traduits les termes de base d'un domaine dans ceux de l'autre. Par là, ainsi que par la simplification souvent surprenant des démonstrations qu'apporte l'axiomatisation, les mathématiques sont devenues plus unitaires – malgré la diversité croissante de leurs problèmes. Sans cette unification il deviendrait humainement impossible de reculer les frontières de notre science, l'esprit de l'homme n'ayant qu'une capacité limitée. La tendance de branches distinctes des mathématiques à fusionner est un autre trait remarquable des développements contemporains.

274-5 Kleine : esprit large pas étroit

Dans l'ensemble [le style de pensée de Klein] l'empêchait de rendre justice à la méthode axiomatique. Je me souviens qu'un jour en conversation il tint le propos suivant : « Supposez que j'aie résolu un problème, eh bien j'aurai franchi une baie ou un fossé. Alors nos axiomaticiens arrivent en demandant : pouvez-vous encore le faire avec une chaise attachée à votre jambe ? »

279 conclusion

de grandes parties de la recherche mathématique reposent sur un mélange habile de procédés constructifs et de procédé axiomatiques. […] Par le cœur j'inclinerais du côté constructiviste. Il m'en coûte donc quelque effort aujourd'hui pour suivre la direction opposée, qui place l'axiomatisation avant la construction, mais l'équité l'exigeait de ma part.

XI. (1924) : *remarques marginales à des problèmes fondamentaux des mathématiques*

281 F

(NdT) […]

[…]

Transformer le corpus mathématique en un système de formules symboliques exige des moyens qui n'ont guère été assurés avant les années 1910. Utiliser ces moyens maintenant qu'ils sont disponibles est un acte de franchise : on fera au grand jour et consciemment ce qu'on faisait implicitement dans et l'obscurité (manipuler des symboles selon des règles formelles).

282-3 Hilbert : Brouwer et au-delà

autant que je vois, nous sommes d'accord sur le point le plus décisif[...]. Pour Hilbert également la force de la pensée à contenu ne s'étend pas plus loin que pour Brouwer ; pour lui aussi il va de soi qu'elle ne peut pas porter les inférences "transfinies" des mathématiques[...], et qu'il n'y a pas de garantie de tous les énoncés transfinis des mathématiques, *en tant que vérités contentuelles*. [...]

Le tournant nouveau, propre à Hilbert, consiste à laisser tomber le sens contentuel des propositions mathématiques, ce qui les change en un jeu de formules vides. [...] La mathématique de Hilbert, quand on prend ses explications littéralement, n'est en fait qu'un *jeu de formules*. On explicite l'analogie avec le jeu d'échecs dans un petit tableau :

Échecs	Mathématique hilbertienne
Pièces	Signes
Position des pièces sur l'échiquier	Formules
Configurations initiales	Systèmes des axiomes
Règles de traits	Règles de déduction des formules
Configuration correcte (résultant de la configuration initiale moyennant les règles de traits)	Formules "démontrables" résultant des axiomes moyennant les règles opératoires
Configuration où interviennent 10 dames de la même couleur	Formule de la contradiction

Par l'induction complète dans le cadre de la pensée contentuelle on peut, en ce qui concerne les échecs, constater qu'il est impossible à une configuration correctement obtenue de réunir sur l'échiquier dix dames de la mêmes couleur, exactement de même Hilbert démontre (ou entreprend de démontrer) que la formule de la contradiction n'est pas démontrable. (Bien entendu on est parti de l'observation que lors d'un coup correct la somme d nombre des dames et du nombres des pions ne peut jamais augmenter.) Mais cela, c'est un savoir et non plus du jeu ; et **Hilbert n'emploie la pensée à contenu que pour arriver à ce savoir**. Du point de point formaliste on n'a pas à chercher de raison plus profonde des axiomes et des règles d'opération qu'on admet ; on n'a pas non plus à s'inquiéter pourquoi on tient pour important que le jeu de formules soit sans contradiction, ni pourquoi la pensée à contenu ne s'occupe pas d'autres questions encore, que soulève le jeu. Tant qu'on s'en tient à ce point de vue, on est dispensé de philosopher, et tout ce qu'on a à "objecter" est le refus d'entrer dans le jeu.

285 – But how could it be otherwise? –

Je ne vois qu'*un* moyen d'attribuer aux formules, leurs parties transfinies incluses, une signification intellectuelle indépendante. En physique théorique nous avons devant nous le grand exemple d'une connaissance de tout autre caractère que la connaissance intuitive ou phénoménale, qui exprime ce qui est donné dans l'intuition (l'intuition n'étant pas bornée au sensible ; le mot désigne plutôt tout acte donateur). Dans la connaissance commune, chaque jugement possède son sens à lui, complètement effectuable dans l'intuition ; il n'en est nullement ainsi en physique théorique, où , dans la comparaison avec l'expérience, seul entre en compte le système en tant que tout. Dans la *théorie*, la conscience réussit à "sauter par dessus son ombre", à laisser en arrière la matière du donné et à représenter le transcendant, mais, cela va de soi, seulement par *symboles*. La relation de la construction symbolique à ce qui est objet d'immédiate expérience doit, quand elle n'est pas explicitement descriptible, se comprendre de l'intérieur, sans que l'interprétation théorique puisse jamais la justifier. Ici règnent des principes de la raison, dont nous ne saisissons clairement en premier que celui de non-contradiction ; or il n'est sûrement pas l'unique fil directeur de la formation de la physique théorique (le sens de la création *théorique* est aussi obscur que celui de la création *artistique*). Si la connaissance phénoménale s'appelle un *savoir*, la connaissance théorique repose sur la croyance[...] – la croyance à la réalité du moi propre ou de celui d'autrui, ou à la réalité du monde extérieur ou de Dieu. Si l'organe de la connaissance commune est le "voir" au sens le plus large, celui de la théorie est "la créativité". Si Hilbert ne pratique pas un simple jeu de formules, il vise une mathématique théorique, en contraste avec la mathématique intuitive de Brouwer. Mais où est cet au-delà porté par la croyance, auquel leurs symboles réfèrent ? Je ne le trouve point si je ne fais pas fusionner la mathématique avec la physique et si je n'admets pas que les concepts mathématiques de nombre, de fonction, etc. (ou les symboles de Hilbert) participent à la construction théorique du monde réelle de la même façon que les concepts d'énergie, de gravitation, d'électron, etc. Cela étant, le système est à peine assez justifié par sa non-contradiction, et il faut s'attendre qu'il partage le sort de toutes les autres connaissances théoriques : en contraste avec le savoir phénoménal, sans doute humainement soumis à l'erreur, mais immuable par nature, les connaissances théoriques restent , à mon avis, portées par le processus vital de l'esprit qui s'accomplit en nous, et ne sont jamais laissées par lui comme un dépôt de résultats morts et "définitifs". Peut-être en est-il, comme Hilbert semble le penser, que, pour la partie mathématique de la construction théorique du monde, le principe de non-contradiction, joint à l'exigence de justifier symboliquement, le plus loin possible, les assertions sur l'infini, que l'absolutisme existentiel naïf fonde sur les analogies avec le fini, constitue l'unique fil conducteur suffisant. L'histoire de la physique montre qu'intuition et théorie y marchent constamment la main dans la main. D'une part il est incontestable que le phénoménalisme de Mach perdu la partie contre la théorie atomique ; d'autre part la théorie de la relativité a montré l'importance de ramener la construction théorique à son sens intuitif et d'éliminer les éléments trop arbitraires (géométrie, espace absolu). Aussi est-il d'un grand profit que Brouwer ait renforcé à nouveau le sens du donné intuitif en mathématique. Son analyse exprime le contenu de l'intuition mathématique originelle en sa pureté, aussi est-elle illuminée d'une clarté sans énigme. Mais en concurrence avec le chemin de Brouwer, nous devons suivre aussi celui de Hilbert, car il n'est pas niable que nous avons en nous un besoin théorique, incompréhensible du simple point de vue phénoménal, dont l'élan créateur, orienté vers la représentation symbolique du transcendant, demande à être satisfait. Là commence le mystère, et ces réflexions terminales ne sont que timide tâtonnement dans la nuit.

X. (1931) : *les degrés de l'infini*

289 Limite intuition & critique formalisme

(NdT) […]

[…]

L'intuition ne peut pas tout. Un problème permanent pour les mathématiques, qui reçoit des solutions différentes selon les conjonctures historiques, est de délimiter la par de la logique et celle de l'intuition. Deux stratégies sont ouvertes : soit laisser tomber ce que l'intuition n'atteint pas, soit trouver un moyen de conserver et de justifier ce qui manque d'intuitivité. Brouwer adopte la première stratégie. Hilbert eut une idée ingénieuse : que ce qui n'a pas de sens pour l'intuition serait justifié si on en pouvait prouver la non-contradiction par des moyens intuitifs. En effet pour ce que notre imagination a engendré et qui est sans contrepartie réelle ou concrète à quoi le comparer, le seul critère est celui de la cohérence interne. Ainsi le non-contradictoire est-il appelé à devenir un substitut du vrai. – Weyl se demandait si la sûreté vaut la peine de se lancer dans un programme qui exige en préliminaire la transformation du corpus mathématique en un “jeu de formules” suivant des règles mécaniques. « Si au nom de leur sécurité, les mathématiques se retiraient sérieusement sur cette ligne de défense du simple jeu, elles se couperaient totalement de l'histoire universelle de l'esprit ». Un demi-siècle s'est écoulé depuis ces lignes écrites. Des critiques consonnantes se sont récemment fait entendre à l'encontre des excès de l'idéologie formaliste[1].

footnote 1 : […] tout mathématicien cherche à démontrer des théorèmes véritables, c'est-à-dire correspondant à une représentation forgée par deux mille ans de culture mathématique... Ce qui fait que la mathématique est une culture, c'est qu'elle parle de choses qu'on se représente mentalement, même si elles sont abstraites ou idéales.

291 Sur l'indicible

(NdT) […]

[…]

En une série de textes postérieurs aux années 1925, Weyl explicite le rôle du symbolique dans les théories de science de la nature[…]. Il pensait que nous sommes environnés sinon de mystères, du moins de faits ou de processus auxquels la raison n'est pas à même de trouver un sens. Cette opinion surprend car la norme est la confiance dans notre faculté illimité de déchiffrer la nature, et quiconque n'y souscrit pas s'acquiert une fâcheuse réputation de perversité sceptique. « Il y a dans la nature ce qui est accessible et ce qui est inaccessible. Voilà ce qu'il importe de distinguer, de connaître et de respecter »[…]. Weyl partageait ce sentiment.

294 Mathématique et liberté

Le déploiement de la construction mathématique appliquée à la réalité repose en fin de compte sur la double nature, subjective et objective, de la réalité : elle n'est pas un être en soi, mais un apparaître pour un Je-esprit. […] La mathématique n'est pas schéma pétrifié et pétrifiant que le profane se représente ; elle nous met plutôt exactement au croisement de la contrainte et de la liberté, lequel est toute l'essence de l'homme.

294-5 Quatre degrés d'infinitude

Dans le développement de l'arithmétique on distingue, touchant le rôle de l'infini, quatre degrés. Au *premier* appartient un jugement concret individuel comme 2 < 3[…]. Au *second* degré appartiennent […] l'inclusion entre chiffres quelconques, et le jugement de *généralité hypothétique* […]. En l'occurrence on ne sort pas du domaine du donné en acte parce que ce jugement ne dit quelque chose que *si* des nombres déterminés **a** ou **b** sont donnés. Du tout nouveau arrive cependant avec le *troisième* degré, lorsque je plonge les chiffres qui se présentent en acte, dans la suite de *tous les nombres possibles*, suite qui naît par un processus génératif conforme au principe que d'un nombre présent n peut toujours être engendré un nouveau nombre, le successeur immédiat n' de n. *Là l'étant est projeté sur l'arrière-plan du possible, d'une multiplicité de possibles, ordonnée d'après un procédé fixe et ouverte dans l'infini*. […]

[…] [Dans le] quatrième degré de l'arithmétique, […] selon le paradigme de la théorie platonicienne des Idées, le *possible* est erronément transformé en un *être* transcendant et absolu, dont la totalité est naturellement soustraite à notre vision intuitive

300 Danger ontologique

Dans notre milieu culturel, la volonté passionné de réalité est plus forte que la claire vision de la *ratio* grecque.

300 Rupture infiniment petit & fini

Par l'intégration l'Analyse infinitésimale infère du comportement dans l'infiniment petit, régi par des lois élémentaires, le comportement dans le fini, par exemple de la loi d'attraction universelle d'éléments de volume remplis par une masse, elle infère la grandeur de l'attraction de corps étendus de forme arbitraire, de masse homogène ou non. Mais faute d'interpréter l'infiniment petit potentiellement au sens du processus de la limite, l'un n'a rien à voir avec l'autre, les processus dans le fini et dans l'infiniment petit deviennent mutuellement indépendants, la liaison entre eux est rompue. Là-dessus Eudoxe avait eu indubitablement la vue juste.

301-2 Négation problématique des énoncés universels

On doit comprendre d'une façon *hypothétique* l'énoncé général qui porte sur “chaque nombre”, comme l'énoncé qui exprime quelque chose seulement sous la condition qu'un nombre est donné réellement ; et en conséquence il n'est pas susceptible d'être nié. L'assertion d'existence n'acquiert de contenu que par l'exhibition d'un exemple : ce nombre déterminé, construit de telle manière a la propriété P. L'absolutisme existentiel saute par-dessus ce genre de scrupules fondés sur la nature de l'infini ; il prend ces énoncés comme des énoncés ordinaires susceptibles de négations et qui peuvent être opposés dans le “tertium non datur”.

302 Danger d'actualiser le potentiel

c'est G. Cantor lui-même qui a coupé toutes les entraves en opérant librement avec le concept d'ensemble, notamment en permettant de former l'ensemble des sous-ensembles de tout ensemble. Là seulement, aux confins extrêmes de la théorie, on buta la première fois sur des contradictions réelles. À leur racine on peut découvrir le coup d'audace commis dès le commencement des mathématiques : **on a traité un champ de possibilités constructives comme une collection fermée d'objets existant en soi**.

303 Capter transfiniment le fini via les ensembles

Dedekind appelle *chaîne* un ensemble K de nombres si *n'* appartient à K chaque fois que *n* y appartient. La propriété d'un nombre d'être ≥ 5 se rédige alors ainsi : ce nombre est contenu dans toute chaîne qui contient 5. Le critère fini (parcourir les nombres de 1 à *n* fait passer par 5) est remplacer par un critère transfini qui, à la lettre des mots, exige qu'on domine du regard *tous les sous-ensembles possibles* de **Z**. Au lieu donc de quelque chose de spécifiquement arithmétique, le “toujours un de plus” de l'itération *in infinitum*, interviennent des concepts généraux de logique. […]

[…] La critique de H. Poincaré, B. Russell, Brouwer, Skolem, et d'autres, nous a progressivement ouvert les yeux sur le caractère intenable des positions logiques d'où est partie la méthode ensembliste. À mon opinion aucun doute ne subsiste que cette troisième tentative – telle qu'elle était planifiée – a échoué. Sauver les mathématiques sans diminution de leur patrimoine classique, Hilbert l'a montré devant tous, n'est possible que par un changement drastique d'interprétation – par la formalisation qui transforme un système de connaissances intuitives en un jeu avec des signes et des formules suivant des règles fixes.

306 Consistance et concordance

C'est une question philosophique profonde que de savoir ce qu'est la “vérité” ou l'objectivité qui revient à cette construction théorique du monde, qui va si loin au-delà du donné. Une exigence indispensable est en tout cas la *concordance* qui s'exprime assez grossièrement comme suit : toutes les déterminations indirectes d'une grandeur possibles dans la théorie doivent mener au même résultat. Cette exigence exclut la contradiction de la théorie, en sorte que nous obtenons là une réponse raisonnable à la question pourquoi nous tenons à la non-contradiction formelle : celle-ci est le garant de la concordance en ce qui concerne la théorie toute seule, la partie où la théorie n'est pas encore confrontée à l'expérience. Au mathématicien à veiller que les théories des sciences concrètes satisfassent cette condition d'être définie formellement et exemptes de contradiction.

306 Hilbert en éclaireur de l'hors-mathématique

Si l'on prend les mathématiques à part, on se limitera avec Brouwer aux vérités intuitives dans lesquelles l'infini n'entre que comme champ ouvert de possibilités ; on ne trouve aucun motif qui nous force à aller au-delà. Mais en science de la nature, nous abordons une sphère de toute façon impénétrable à la vision de l'évidence. La connaissance y devient nécessairement construction symbolique, et attendu que les mathématiques sont, par la physique, impliquées dans le processus de construction théorique du monde, il n'est pas non plus indispensable que le mathématique y puisse être isolé en tant que province de l'intuitivement certain : de cet observatoire supérieur, d'où la science apparaît comme une unité, je donne raison à Hilbert.

306-7 Tension entre infinis potentel & actuel

En guise de conclusion j'essaie de rassembler en quelques thèses générales l'expérience que les mathématiques ont acquise en approfondissant l'infini au cours de l'histoire.

1) Dans la vie spirituelle de l'homme se séparent distinctement l'un de l'autre un domaine de l'*agir*, de la formation, de la construction, d'une part, domaine auquel s'appliquent l'artiste créateur, le savant, le technicien, l'homme d'état, et qui en science est placé sous la norme de l'objectivité – d'une autre part un domaine de la réflexion, qui s'accomplit dans des intuitions et que, pour le distinguer, on pourrait considérer comme le véritable apanage du philosophe. Le risque de l'activité créatrice, quand elle n'est pas surveillée par la *réflexion*, est qu'elle dévie du sens, se fourvoie, cristallise en routine – le risque de la réflexion, de dégénérer en un “parler sur” qui paralyse la puissance créatrice. […]

[…]

3) L'infini est accessible à l'esprit et à l'intuition sous forme d'un champ de possibilité ouvert dans l'infini ; à la manière de la suite des nombres qui continue toujours plus loin ; mais

4) L'infini achevé ou actuel en tant que domaine fermé d'existence absolue, ne peut pas lui être donné.

5) Toutefois l'esprit, par son exigence de totalité et la croyance métaphysique en la réalité, est pressamment contraint de représenter par une construction symbolique l'infini en tant qu'être fermé.

308 Hilbert is future

En mathématiques et en physique seulement, autant que je puis voir, la construction symbolico-théorique a acquis une solidité telle qu'elle s'impose à quiconque dont l'intelligence s'ouvre à ces sciences.