La pensée mathématique contemporaine

Frédéric PATRAS
2001

éd° PUF
coll° Science, histoire et société

2-3 L'erreur structuraliste

Il a souvent été dit que philosophie et mathématique font bon ménage, et, de fait, il est impossible de se dispenser d'un recours à la théorie générale de la connaissance pour comprendre le fonctionnement de la pensée mathématique et les lois de son développement. L'illusion d'une autonomie du discours mathématique est sans doute la plus grave des erreurs qu'ait commises le structuralisme, et c'est aussi celle que nous chercheront le plus systématiquement à dénoncer.

4-5 Grandes questions

Quelle est la signification et la légitimité des savoirs mathématiques ? Comment s'insèrent-ils dans notre connaissance du monde phénoménal ?

7 Mouvance des mathématiques

Alors que [les travaux de Bourbaki] sont techniquement irréprochables, les postulats méthodologiques qui les sous-tendent, en tout premier lieu l'idée qu'il existerait une « architecture » intrinsèque et relativement figée du corpus mathématique, ont été pour une bonne part mis en défaut par le développement des mathématiques depuis les années 1950. La pratique récente démontre même au contraire que l'édifice des mathématiques doit, pour être efficace, réviser régulièrement son organisation interne et déplacer au gré de son évolution de tel à tel concept l'attribution d'un caractère primitif ou fondateur.

26 Cristallisation des théories

Il faut retenir des idées du jeune Hegel que toute forme de pensée initialement en prise à une certaine réalité vis-à-vis de laquelle elle propose des instruments d'analyse nouveaux finit par se cristalliser en un discours positif. Le temps altère son adéquation au réel.

27-28 Genèse et évolution des théories

Telle théorie géométrique est d'abord développée dans le contexte d'une fréquentation régulière d'un certain type d'objets, par exemples les sphères, ellipsoïdes et autres objets similaires (les quadriques) de la géométrie euclidienne. Elle s'enrichit peu à peu de résultats de plus en plus complexes en fins, qui nécessitent la mise place d'arguments et de définitions techniques nouveaux et assez éloignés dans leur essence même des intuitions qui étaient sous-jacentes à la théorie à ses débuts. Ces nouveaux instruments d'étude sont mis en ordre systématique dans de nouvelles théories, plus riches sans doute, mais qui finissent par oublier leur genèse à partir d'un système d'évidences spatiales. Dans le cas de la géométrie des quadriques, il s'agira de la théorie des formes quadratiques, de la géométrie projective et ses phénomènes de dualité, de la théorie kleinienne des groupes de transformations : autant de domaines mathématiques qui peuvent faire l'objet de formalisations axiomatiques où les aspects géométriques originaires sont perdus de vue ou considérés à la marge. Il n'est pas étonnant que les étudiants qui abordent l'étude des quadriques par l'intermédiaire de ces théories sophistiquées aient l'impression d'être confrontés à un corpus de formules et définitions dont l'esprit leur échappe. Elles font figures de thèmes imposés arbitrairement, au nom d'une cohésion architectonique qui les dépasse.

Faire la part de modernisme dans le style d'exposition et de retour au système d'intuitions originales qui sous-tendent une théorie est sans nul doute l'une des difficultés majeures auxquelles est confrontée la pédagogie mathématique aujourd'hui, car la science est condamnée à être stérile si elle cesse de prendre appui sur une intuition pleine et vivante de ses contenus. C'est la conscience de cette stérilité qui gouverne les réactions de rejet de l'enseignement mathématique comme un bloc d'abstractions gratuites et dépourvues de significations tangibles. […]

Pourtant, il ne faut jamais oublier que, même s'ils s'accompagnent d'une perte de vue des origines, les progrès de la science exigent des changements de styles de pensée. La revendication d'une fidélité inconditionnelle aux origines […] est dangereuse. […] Dans l'histoire de toute entité culturelle, intellectuelle ou morale adviennent des moments de transition où la simple survie passe par une transformation radicale des contenus qu'elle véhicule. Faute de quoi ceux-ci […] cessent de faire sens. S'ils n'étaient pas transformés ils ne survivraient qu'un moment, portés seulement par l'habitude et présentant les caractéristiques d'un **mode de pensée positif** : être imposés artificiellement dans un contexte où ils ont perdu toute signification naturelle et toute portée. Croire qu'un retour en arrière est possible est une illusion.

*(Marc met en gras **mode de pensée positif**)*

43 (Grandes) questions

Quelle est donc la teneur en réalité des objets mathématiques et peut-on conclure de l'évidence d'un concept à l'existence de l'objet correspondant ?

43-44 Séparer science et philosophie

Vouloir séparer ce qui relève de la métaphysique et de la théorie de la science présente des avantages techniques, et évite aux scientifiques bien des débats hasardeux, mais sacrifie au passage ce qu'il y a de plus précieux : **l'unité profonde de la pensée et du savoir**. Les confrontations de champs de pensée, aussi éloignés soient-ils, peuvent permettre de progresser, même lorsqu'il s'agit de comprendre les contenus de problèmes techniques (par exemple, la portée générale du paradoxe de Russell). Que Descartes ait choisi de parler *simultanément* de mathématique et de métaphysique dans ses écrits n'est pas gratuit : la solution des problèmes auxquels il était confronté était à ce prix. Il est tout sauf certain que la modernité ait raison lorsqu'elle rechigne à explorer des voies analogues.

*(Marc met en gras **l'unité profonde de la pensée et du savoir**)*

51 Phénoménologie

Dans la galaxie des théories de la science formulées au cours de ce siècle, nous [préférons à la logique mathématique postfrégéenne] celle qui provient en ligne directe de l'idéalisme transcendantal kantien et nous semble répondre mieux aux aspirations légitimes d'une philosophie mathématique accomplie, soucieuse tout à la fois de penser les exigences de la forme et l'enracinement des mathématiques dans l'expérience et la vie de la pensée. Il s'agit de la phénoménologie transcendantale husserlienne qui revendique l'héritage de la philosophie idéaliste, en la soumettant à l'épreuve de la modernité et de ses exigences.

53-54 De l'intuition à l'idée

De notre expérience des cercles tracés, nous procédons jusqu'à l'idée du cercle, mais il y a une solution de continuité de l'une à l'autre qui est précisément le moment transcendantal de la connaissance. L'idée obtenue est pure et a toute la nécessité apriorique requise car, même si elle procède de l'expérience, elle en est logiquement indépendante : une fois l'idée du cercle constituée dans toute sa généralité, elle devient indépendante de telle ou telle intuition particulière. Lorsque le mathématicien dispose de concepts mathématiques, il est assuré de leur existence sans avoir à revenir sans cesse aux intuitions à partir desquelles il a pu abstraire ces concepts.

Sous cette forme, la phénoménologie réconcilie les mathématiques avec leurs origines intuitives. L'objet transcendantal y a besoin pour exister d'une expérience préalable, d'un sol d'intuitions empirique à partir duquel seront construits les objets transcendantaux correspondants. Il n'est pas de création mathématique sans la conjonction d'une intuition et d'un travail de conceptualisation. Elle réconcilie aussi les mathématiques avec leur caractère idéal et nécessaire. Elle permet enfin de réconcilier les origines logiques et intuitives des mathématiques contemporaines, en expliquant comment la logique formelle est indissociable de la logique « transcendantale ». Une théorie conséquente de la science doit rendre compte aussi bien des fondements logiques de mathématiques postfrégéennes que de l'intervention de l'intuition dans la pensée mathématique concrète. Cela suppose une réconciliation des procédés analytiques et synthétiques dans le progrès scientifique. L'idéalisme transcendantal, de par sa nature même, justifie le caractère synthétique de l'activité mathématique, qui renvoie au mode de constitution des objets transcendantaux à partir de l'expérience, tout en reconnaissant le caractère nécessaire et apriorique des concepts mathématiques qui s'exprime, entre autres, dans leur formalité.

61-62 Rigueur en mathématique

Ce souci [de la rigueur démonstrative] va parcourir tout le XIX^{e} siècle, avant qu'il ne soit convenu de canons d'écriture et d'un formalisme adéquat. Gauss anticipe notamment les efforts de Cauchy ou d'Abel en la matière, et se méfie du recours à l'intuition lorsqu'il n'est pas étayé par des règles précises. Ce thème de la rigueur a connu une évolution étonnante au cours du XX^{e} siècle. Malgré toute l'insistance portée sur la nécessité d'une mathématique pure de tout recours à l'intuition et de démonstrations sans failles, il est désormais clair que les mathématiques auraient fait beaucoup moins de progrès au cours de ces dernières décennies si la physique mathématique, à l'origine de plusieurs des résultats fondamentaux obtenus récemment en mathématiques pures, n'avait pas souvent continué à travailler comme les Bernoulli, allant aux questions essentielles en négligeant d'asseoir ses résultats sur un formalisme et des preuves indiscutables. En d'autres termes, l'idée normative de rigueur ne serait pas un idéal indiscutable et devant valoir en toute circonstance. Il se pourrait que la rigueur mathématique ne soit requise, dans les théories les plus originales et plus novatrices, qu'à un certain moment de leur développement, et une fois seulement que les concepts fondamentaux sont suffisamment éclaircis pour qu'il ne reste plus qu'à faire un travail de mise au point.

64 Observer humblement

Galois est confronté à plusieurs phénomènes, caractéristiques du comportement des solutions d'un polynôme. Pour en abstraire une théorie algébrique nouvelle, il a d'abord fallu comprendre les régularités de ce comportement, c'est-à-dire identifier des propriétés typiques, communes aux diverses équations polynomiales. La création mathématique naît d'abord de l'observation, au moins lorsqu'il y va de découvertes authentiques. Par observation, il faut entendre dans le cas de Galois une fréquentation régulière des polynômes, une étude méthodique de leurs propriétés et une attention soutenue à la permanence de certains phénomènes lors de la transition d'un type de polynôme à l'autre.

Les régularités algébriques vont rarement de soi. Celles des racines des polynômes demeureraient cachés au mathématicien qui, ignorant des travaux de Galois, se pencherait sur les problèmes de résolutions par radicaux, espérant les résoudre sans une certaine humilité et sans un travail de familiarisation avec l'objet de ses études.

66 Rupture ? Non, maturation

Tout ce qui, dans le domaine de l'histoire mathématique, relève de distinctions abruptes et prétend délimiter des ruptures, des innovations spectaculaires, doit être suspect, car cela occulte le travail, généralement long, de maturation des concepts.

72 Achèvement d'une théorie

Le passage de la théorie des nombres premiers idéaux de Kummer au point de vue de Dedekind est typique du mode de fonctionnement des mathématiques modernes. Les théories ne naissent pas de toutes pièces, et souvent un certain nombre de résultats et d'objets apparus au cours de calculs sont disponibles, mais les raisons ultimes de leur existence sont incertaines, comme s'il leur manquait d'être étayées par des constructions architectoniques. Ces phénomènes ne relèvent pas de la logique, ni même de quelque rationalité stricte que ce soit. Il est parfois évident qu'il manque quelque chose pour que l'intelligibilité des phénomènes étudiés soit complète et, lorsque la construction ou l'idée manquante fait un jour surface, elle est d'emblée reconnue comme l'élément qui faisait défaut, alors même qu'il n'existait jusque-là aucune indication quant à sa nature précise. Une théorie mathématique peut donc, même en étant cohérente et logiquement satisfaisante, donner une sensation plus ou moins nette d'achèvement, comme si le treillis de ses concepts et résultats indiquaient au mathématicien l'existence d'une idée encore manquante mais nécessaire à sa perfection.

81 Définition de la logique

« Le jeu de formules [caractéristique de la mathématique formalisée] est donc conduit selon certaines règles définies, qui expriment la technique de notre pensée. Ces règles forment un système fermé qui peut être découvert. L'idée fondamentale de la théorie de la démonstration n'est autre que de décrire l'activité de notre pensée, d'établir un protocole des règles selon lesquelles notre pensée opère » (D. Hilbert)

83 Intuition dans les axiomes

Le système des axiomes de la géométrie est dissocié par Hilbert en cinq sous-systèmes qui correspondent à des types d'intuitions eidétiques distincts. Ainsi, encore que ces axiomes soient destinés à porter sur des entités potentiellement dépourvues de signification intuitive, il ne cesse de les subordonner aux intuitions qui leur correspondent, et donc à une légalité qui est celle de la pensée ordinaire. Pour dire les choses autrement, l'interprétation intuitive affleure toujours dans l'écriture mathématique comme une possibilité légitime, et ce jusqu'au cœur de l'axiomatisation. Il serait à la fois vain et maladroit d'y renoncer. Aussi Hilbert n'aura-t-il de cesse de refuser un formalisme aveugle qui susciterait ses propres interrogations. L'axiomatique est au service de la pensée mathématique qu'elle fait parvenir à son plus haut degré de clarté et d'assurance ; en aucun cas elle ne l'englobe ou s'y substitue. Les mathématiques doivent rester maîtresses de leur objet.

84 Construction de la connaissance

« L’édifice de la connaissance n’est pas érigé comme une maison, où l’on bâtit d’abord les murs maîtres avant de construire et d’aménager les pièces d’habitation ; la science préfère fabriquer aussi vite que possible des espaces habitables. C’est seulement ensuite, lorsqu’il apparaît que ci ou là les fondations fragiles de l’édifice ne suffisent pas, qu’elle va de l’avant pour les étayer et les renforcer. Il n’y a rien là d’un manque, et c’est bien le mode convenable et sain selon lequel elle doit se développer » (D. Hilbert)

87-88 Séparer science et philosophie ?

Dans une notice sur les travaux de Weyl publiée en 1957, deux ans après sa mort, par C. Chevalley et A. Weil, deux des représentants attitrés du courant structuraliste, il n’est pas fait mention des recherches philosophiques de Weyl sinon à la marge et de manière assez irrévérencieuse, comme si c’était là des à-côtés peu flatteurs du personnage qu’il serait de bon ton d’oublier. La chose est plus grave qu’il n’y paraît : quel qu’ait pu être le regard porté par Chevalley et Weil sur l’intuitionnisme et les problèmes épistémologiques qui ont occupé Weyl, leur occultation délibérée ne peut manquer rétrospectivement de choquer. Au-delà de la notice elle-même, tout cela est caractéristique d’un choix méthodologique commun à leur génération : les mathématiciens « sérieux » n’auraient pas à se préoccuper de philosophie, sinon peut-être à titre privé et sans que cela interfère avec leur écriture mathématique. C’est bien évidemment un choix illégitime, car toute forme de mathématiques est gouvernée par des options épistémologiques qui, pour demeurer tacites, n’en sont pas moins décisives dans l’orientation thématique et programmatique des travaux. Pour autant, ce choix néfaste, dont les conséquences désastreuses n’ont cessé de se faire sentir, a été accepté à peu près unanimement.

95 Le va-et-vient de la méthode axiomatique

À titre de conclusion provisoire, quitte à aller un peu au-delà du message de Weyl : la méthode axiomatique a deux versants. Elle est d’abord un procédé d’écriture de type formulaire qui permet de codifier de manière plus ou moins mécanique les résultats mathématiques. L’effort d’écriture correspondant n’a rien de créatif mais permet de clarifier une situation mathématique donnée. Par ailleurs, elle dégage les concepts structurants d’une problématique fixée et, à ce titre, participe à l’invention en définissant de nouveaux objets autour desquels s’organise le travail du mathématicien. Interpréter la méthode axiomatique dans le sens du formalisme, c’est-à-dire en insistant exclusivement sur ses aspects analytiques-formels et en négligeant son ancrage dans la phénoménalité du travail mathématique, n’est pas une nécessité épistémologique mais bien un choix. Choix discutable, puisque la signification des concepts abstraits issus de la méthode, qu’il s’agisse des axiomes de la géométrie, de structures algébriques ou encore de structures topologiques, renvoie à la façon dont ces concepts ont été construits – donc à leur genèse et à leurs champs d’application.

96 Hilbert et Brouwer

L’idée de Hilbert est de déplacer des mathématiques à la métamathématique, science de l’architecture logique et de la non-contradiction, le rôle constitutif de l’évidence. En pratique, le programme formaliste adhère donc malgré lui aux principes fondateurs de l’intuitionnisme puisque ses méthodes de preuve sont fondées sur des processus de type finitistes qui reconduisent à un système d’évidences originaires antérieur à toute formalisation. Selon Weyl, Hilbert et Brouwer seraient, en fin de compte, en accord sur l’essentiel : la finitude des actes primitifs de la connaissance, leur désaccord portant sur le terrain su lequel ces actes prennent sens – mathématiques ou métamathématiques.

101-102 Le rôle des problèmes dans la science

Ce sont [les problèmes] qui animent et donnent sens au travail des chercheurs. Telle ou telle branche des mathématiques n’est vivante que pour autant que s’y posent des problèmes intéressants, et leur résolution marque le début du déclin de la discipline correspondante qui s’étiole peu à peu, recroquevillée sur quelques questions de détail, souvent techniques, difficiles et d’une portée restreinte.

105 L’intuition dans le formalisme

On notera ici le pragmatisme de la position hilbertienne et son insistance sur la légitimité qu’il y a à reconduire le travail mathématique à des fondements intuitifs, l’intuition pouvant prendre, c’est un point essentiel, des formes symboliques. Pour ce qui est de la terminologie mathématique, elle est particulièrement importante pour les praticiens, dont les idées sont guidées par une désignation adéquate des objets, qu’ils soient géométriques ou de tout autre ordre. Qu’un nouveau concept soit désigné par un mot maladroit, et l’imagination se fourvoie vite, comme si la pensée scientifique, quoiqu’elle se sache astreinte à la rigueur formulaire, avait tout de même besoin de fonctionner sur le mode eidétique ordinaire – celui qui gouverne tout pensée organisée –, quitte à traduire au dernier moment ses résultats en langage formel.

122 Mort d’un théorème

Plusieurs anciens bourbakistes, au premier rang desquels Chevalley, ont […] reconnu que la mathématique formalisée et achevée était une « mathématique morte », que ne faisait plus vivre le souffle de la pensée. Une fois cristallisées, emprisonnées dans un langage formulaire, les idées perdent leur contenu et deviennent tautologiques. C'est là un sentiment fréquent, et commun à tout chercheur, que cette sensation de vide, d'évidence un peu vaine, que procure un théorème à peine obtenu. Comme si des mois, voire des années de travail conduisaient à un résultat qui perd tout son charme à être découvert et codifié selon les règles mécaniques de l'écriture axiomatique.

135 Mettre du sens dans une démarche, dans un formalisme

Comme le désir de généraliser, la volonté de calculer n'a […] de sens que subordonnée à un projet, à la quête d'un supplément de signification et relève à ce titre de choix stratégiques. Rendre compte des différents aspects de l'effectivité et la computabilité sera l'un des devoirs d'une théorie unifiée et rénovée de la connaissance mathématique.

Une autre de ses caractéristiques concernera les contenus conceptuels. Les acquis de la rigueur axiomatique étant uniformément admis, tous d'accordent aussi désormais à reconnaître la nécessité d'ajouter de la « matière » aux notions formelles, c'est-à-dire à se préoccuper dans tout texte mathématique d'**intelligibilité** tout autant que de cohérence. Il ne faut s'y tromper, c'est là l'exercice le plus difficile. Traduire l'idée d'une démonstration en langage formalisé est une simple affaire de patience, pourvu que l'idée soit exacte. Décrire cette idée, expliquer une motivation, est autrement difficile car c'est affaire de style et d'imagination. L'expérience enseigne que le jeu est dangereux, et ses règlent restent à codifier – mais le programme d'Erlangen ou la « tradition orale » grothendieckienne sont là pour montrer que les plus grandes idées mathématiques ne son pas nécessairement véhiculées par des textes formalisés. Ces derniers ne sont que trop souvent les résidus insatisfaisants d'une grande intuition, trahie ou amputée par l'écriture normalisée et ses nécessaires simplifications.

*(Marc met en gras **intelligibilité**)*

136 Enseigner un savoir-faire

Pour que les mathématiques vivent, il faut qu'elles puissent être facilement communiquées aux novices afin qu'ils soient à même de prendre un jour le relais et aillent plus loin que leur prédécesseurs. En d'autres termes, le savoir mathématique est aussi pour beaucoup un savoir-**faire**, dont les règles sont celles d'une technique tout autant que d'une connaissance formelle. Les manuels conçus selon les règles de la méthode d'exposition structuraliste laissent souvent sur un sentiment d'incomplétude : le lecteur a bien compris les ressorts de la méthode, mais serait bien incapable de la faire fonctionner dans l'étude de situations concrètes. Celui qui se contente de transmettre au grand public ses résultats **sans lui communiquer le capital d'intuitions et de repères eidétiques qui va avec** n'a fait que la moitié du travail, de même qu'un artisan qui garderait pour lui ses secrets de fabrication ne pourrait avoir que de piètres apprentis.

*(Marc met en gras **-faire** et **sans…avec**)*

139-140 Pas d'approche première privilégiée

il n'est pas de théorie intra-mathématique première sur laquelle asseoir les mathématiques. Qu'il s'agisse des ensembles, des fonctions, des structures (bourbakistes), de catégories, ou d'autres objets, comme les topoï […], leur assigner à chaque fois un rôle privilégié et exclusif équivaut à favoriser un type particulier d'intuitions, un mode spécifique de fonctionnement de l'intentionnalité mathématique. Cela ne peut être fait qu'en amputant dramatiquement le champ de la pensée, ou en en déformant artificiellement son organisation. Quand bien même les théories architectoniques (comme celle de Bourbaki) ou fondationnelles (comme la théorie des ensembles) qui ont pu être jusqu'à présent proposées seraient pleinement satisfaisantes d'un point de vue technique et logique, elles n'en resteraient pas moins bancales en choisissant d'exacerber un aspect précis de la pensée.

158 La pensée mathématique agissant dans l'ombre des objets « savants »

Quelques extraits de *L'expérience de la pensée*, interprétés très librement dans un contexte mathématique, feront offices de guides.

« Peu d'hommes sont suffisamment entraînés à distinguer un objet savant d'une chose pensée » (M. Heidegger)

En mathématique, l'objet savant est l'objet dans toute la violence aveugle de sa définition axiomatique, dépouillé de tout enracinement dans une pensée humaine et son cortège d'affects, d'incertitudes et d'espérances troubles. La chose pensée est celle qui se déploie dans une intuition, celle dont la présence habite et fait vivre le travail de recherche. La distance de l'une à l'autre est difficile à saisir en dehors d'une expérience : il faut éprouver la présence de la chose pensée pour comprendre sa spécificité, pour éprouver un sens là où auparavant il n'y avait qu'une certitude inerte. De la capacité à effectuer un raisonnement logique à une pensée mathématique authentique, la distance est en grande partie indicible : la présence des choses ne peut jamais se dire sans être préalablement endurée.

[…] La méthode axiomatique enseigne à dégager des noyaux de sens à l'intérieur de domaines déjà constitués, elle permet des progrès substantiels, mais jamais de création authentique. La pensée elle-même se meut en-deçà des concepts constitués et fait accéder l'expérience des choses à la parole. Ce qu'elle dit alors est bien, à sa manière, un noyau de sens, mais son mode de constitution est radicalement différent de celui que prescrit la méthode axiomatique. Comme le dit Grothendieck en termes imagés, la pensée peut choisir d'habiter une maison déjà construite par les générations antérieures et chercher à en repeindre les murs ou à lui ajouter une véranda. Ce souci de confort douillet, ce bricolage plus ou moins laborieux est l'essentiel de l'activité mathématique académique. Mais elle peut aussi choisir un espace vierge et y bâtir lentement sa propre demeure. Bien sûr, « qui pense grandement, il lui faut errer grandement » (M. Heidegger), et la pensée court à ce jeu un grand et beau risque – celui là même que Hermann Weyl avait choisi de courir.

165 Découvrir par l'erreur

S'abstenir de poser des questions par crainte de déchoir ou du ridicule est le péché originel de l'éducation scientifique : une fois que l'on a désappris à questionner, les voies de la création se restreignent aux chemins déjà tracés par d'autres. Le plus souvent, une question mathématique a la forme d'une affirmation – d'une conjecture. Et, en général, la première conjecture est fausse, car nous venons à peine d'entrer au contact d'un objet, et la compréhension que nous en avons est trop frustre pour servir de guide fidèle. Qu'importe ! Il suffira peut-être d'écrire noir sur blanc la conjecture pour que sa fausseté saute aux yeux, mais « avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence ». Riches de savoir notre première conjecture fausse, nous revenons au problème moins maladroits. Ainsi, pas à pas, notre intuition s'enrichit, apprend à mieux cerner les contours exacts du phénomène. Les erreurs ont émaillé ce processus, mais ce sont elles qui ont permis la progression : pour faire sans elles il faudrait se retreindre à des mathématiques sans charme, car dépourvues d'imprévu. Mais il se peut aussi que la progression conduise elle-même à une méprise d'envergure : au fur et à mesure que le travail avance des distorsions infimes se sont jour puis s'affirment comme telles. La tension monte, jusqu'au moment où l'erreur éclate, provoquant l'écroulement d'une certaine perception des choses :

« La découverte de l'erreur est une des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte… C'est un moment où notre connaissance de la chose sondée soudain se renouvelle.

« Quand nous sommes mus, non par la peur de voir s'évanouir une illusoire sécurité, mais par une soif de connaître, alors l'erreur, comme la souffrance ou la tristesse, nous traverse sans se figer jamais, et la trace de son passage est une connaissance renouvelée » (A. Grothendieck)

177 Mouvance de la modélisation

tout mouvement de modélisation du réel est par essence dialectique : le réel doit en permanence informer la théorie, faut de quoi celle-ci se fige en prises de positions caricaturales, avant d'alimenter de vaines polémiques.

182 Grandes questions

Les deux grandes questions, restées au fond irrésolues, et auxquelles [la pensée mathématique] doit encore faire face, si elle veut pouvoir conférer une fonction culturelle et humaniste aux mathématiques, n'ont guère changé depuis l'Antiquité. Les mathématiques ont-elles une fonction herméneutique ? Quel est leur statut ontologique, et plus exactement leur mode d'existence et leur rapport au monde réel ?