

petit manuel des règles du jeu de preuve pour une grammaire conviviale en mathématique

1. — introduction

- 1.1 que vient faire « la grammaire » en mathématique ?
- 1.2 de quel « jeu » parle-t-on ? le sens EST l'usage
- 1.3 mise en scène : preuve d'un résultat élémentaire

2. — actes et règles du jeu de preuve

- 2.1 les quatre ACTES du jeu de preuve : AFFIRMER, SUPPOSER, ÉVOQUER ($\times 2$)
- 2.2 les six RÈGLES du jeu de preuve : 2 règles (utiliser/établir) \times 3 symboles ($\Rightarrow \forall \exists$)
- 2.3 avec QUOI joue-t-on au juste ?

3. — commentaires

- 3.1 portées et cadres
- 3.2 théorèmes et preuves – I^{er} commandement de la mathématique
- 3.3 affirmer sans preuve ? CHOISIR des axiomes
- 3.4 tautologies ou raisonnements naturels ?

4. — et la définition dans tout ça ?

- 4.1 définir OU BIEN évoquer : que « soit » soit clair
- 4.2 grammaire des objets : individus, évocables, mutifiabiles
- 4.3 de la bonne INTRODUCTION des objets – II^d commandement de la mathématique
- 4.4 le cas des symboles muets

5. — ouvertures

- 5.1 UNE ou DEUX évocations ?
- 5.2 mais où sont passées les “variables” ?
- 5.3 quoi de neuf – notre contribution

mots clefs : jeu, preuve, assistant, rédaction, grammaire, actes, règles, convivialité, évocation, généralité \forall , existence \exists , implication \Rightarrow , tautologie, Yalep

résumé-présentation

La mathématique peut être vue comme une pratique, une pratique *ludique*, un jeu de preuve : quelles en sont alors les règles ? et surtout LES ACTES ?

Nous présentons un manuel de ce jeu, collant à l'usage – çàd au sens –, afin de guider nos étudiantes pour éviter la quasi-totalité de leurs errements, à savoir :

- I : les affirmations sans preuve ;
- II : les symboles dénués de sens.

Les quatre ACTES du jeu seront au cœur de l'exposé.

objectif : fournir aux enseignantes un cadre clair dans lequel peuvent se faire proprement toutes les maths du lycée, une sorte de “grammaire” sous-jacente à leur activité mathématique. Ce cadre colle au plus près d'une certaine pratique (il est d'ailleurs motivé par cette dernière) et reste bien sûr arbitraire (on pourrait en proposer d'autres).

**La clarté visée pour les enseignantes doit
évidemment atteindre les étudiantes,**

lesquelles doivent sentir en filigrane un “modèle” pour développer leur discours mathématique (en particulier éviter les deux écueils du résumé), loin des flous & inanités épistémologiques que l’on trouve dans trop de manuels scolaires.

conventions linguistiques

Les guillemets double-chevrons « » seront utilisés pour *citer* ou pour *ouvrir une parole*, ceux en doubles-apostrophes (renversées) “ ” pour signaler un terme impropre mais évocateur, une “façon de parler”.

Les mises en emphase seront indiquées par *l’italique*, LES PETITES MAJUSCULES ou **le gras** (dans un contexte de police droite, par ordre croissant, avec cumul possible). En particulier, les termes proprement définis seront toujours *en emphase grasse*.

Nous generons par défaut au féminin.

1. — introduction

De notre expérience, les errements des étudiantes se regroupent en deux axes :

I : *les affirmations non prouvées*, qu’elles soient bancales, péremptoires, timides, lunaires... ;

II : *les symboles “errants”*, sans “acte de naissance”, qui veulent tout et surtout RIEN dire.

Il est normal d’y patauger en phase de recherche/brouillon/exploration (l’auteur de ces lignes le fait encore). En revanche, en phase finale de rédaction, ces axes ne pardonnent pas : s’y aventurer assurera un coup fatal d’une correctrice exigeante.

La bonne chose, c’est que traquer le moindre empiètement sur ces axes affine considérablement sa pensée mathématique. À cet égard, s’exercer sur autrui (paires, enseignantes...) est une bonne école – pour peu que cela soit fait de façon bienveillante, voire coopérative.

Nous allons formuler deux commandements de la pratique mathématique visant à prémunir nos étudiantes des errements sus-cités, lesquels se ramènent en définitive aux concepts logiques d’*implication* \Rightarrow , de *généralité* \forall et d’*existence* \exists , la formulation « soit $\varepsilon > 0$ » étant particulièrement problématique. Le suivi de ces commandements s’appuiera sur la “grammaire” d’un jeu de preuve dont nous allons exposer un manuel possible des règles, simple et collant à l’usage, qui mettra en son cœur ces concepts et ce « soit » problématiques.

Si donner quelques règles de grammaire n’a certes jamais créé d’écrivaines, en priver nos étudiantes serait dommage vu la simplicité, l’utilité et la naturalité de ces règles, *leur sens serrant d’aussi près que possible l’usage et la langue*.

1.1 que vient faire « la grammaire » en mathématique ?

Par « grammaire » nous entendons une “photographie” à un instant donné des pratiques d’une langue – ici : le discours mathématique. Une grammaire a donc un rôle fondamentalement *descriptif* et DOIT se fonder dans *l’usage*. Elle comporte cependant également un aspect *normatif* à travers les schémas unifiants qu’elle dégage, aspect devant servir *l’apprentissage* de ladite langue. Une grammaire n’est donc – selon ce point de vue – qu’un outil, devant évoluer avec son temps.

Son aspect « convivial », nous l’entendons au sens de *La convivialité* d’Ivan ILLICH (cf. [II73]) : plaisante d’utilisation, appropriable par chacune d’entre nous, développant et renforçant notre autonomie.

Notre proposition est ainsi éminemment *ludique* (on va *jouer* à prouver) et *contextuelle* (si notre manuel des règles du jeu ne convient plus passé un certain stade, que l’on s’en débarrasse !). De notre expérience, elle remplit son rôle au moins jusqu’au Master 1 et l’Agrégation.

Concernant le lycée, un collègue du lycée Pierre-D'Ailly de Compiègne (Philippe LE MOULT) a décliné notre manuel de jeu et l'a « testé en milieu d'année [2022-23] avec une classe de Terminale Option Maths Expertes (18 élèves) avec une réelle amélioration de la rédaction chez les bons élèves. » Ses cinq exemples étaient la transitivité de la divisibilité dans \mathbf{Z} , l'infinitude des nombres premiers, la nullité d'un complexe dont le module est majoré par chaque réel > 0 , la parité d'un entier dont le carré est pair, enfin la sous-additivité de l'application $|\sin|$.

Nous avons pour notre part présenté notre approche au laboratoire de maths du lycée Pierre-D'Ailly, aux associations étudiantes MathrixP7 et InfoP7 de l'Université Paris-Diderot, ainsi que lors des journées de l'APMEP 23 dans [un atelier éponyme](#) (cf. [MS23]). Deux présentations adressées aux classes préparatoires, en mai et octobre 22, ont été l'occasion de développer ces notions *en détail*, avec exemples et exercices.

Par ailleurs, un collègue logicien de l'IREM de Paris (Benoît MARIOU) nous a signalé fin juin 25 [une présentation](#) de l'environnement Yalep à destination des lycéennes (cf. [GNTM25]). Son langage déclaratif naturel et le petit nombre de ses éléments syntaxiques rejoignent pleinement notre démarche. En particulier, le fait de demander, à partir d'une existence « il y a un objet vérifiant... », à *obtenir* un tel objet est l'exact pendant de ce que nous nommerons *une évocation spéciale* (« soit un tel objet ») et que nous pensons être, à destination de nos étudiantes, une clarification majeure du discours mathématique.

1.2 de quel « jeu » parle-t-on ? le sens EST l'usage

Une signification d'un mot est un mode d'emploi du mot.
Car elle est ce que nous apprenons lorsque le mot est incorporé dans notre langage.

Ludwig WITTGENSTEIN, *De la certitude* (1949–51), aphorisme 61

Prenons l'exemple du jeu d'échecs et retenons-en les aspects suivants :

- ▶ *un ESPACE de jeu*, physique (échiquier en bois) ou virtuel (jeu mental “à l'aveugle”, en ligne...);
- ▶ *des PIÈCES du jeu* évoluant dans l'espace de jeu (pions, cavaliers, dames...) et pouvant y rentrer comme en sortir (cas de prise ou de promotion);
- ▶ *des SITUATIONS INITIALES du jeu*, disposant les pièces dans l'espace : début standard, avec/sans handicap, extrait d'une partie à tel coup, études...;
- ▶ *des RÈGLES du jeu* régissant l'évolution des pièces dans l'espace : déplacement, disparition, apparition, coups interdits (laisser son roi en prise), voire arrêt du jeu (mat...);
- ▶ *une AGENTE du jeu*, qui va *agir* sur les pièces du jeu en *appliquant* telle ou telle règle (cette agente peut être choisie par les joueuses, être tour à tour l'une ET l'autre de ces dernières, ou encore consister en un programme informatique...).

Ces cinq aspects constitueront notre acception d'*un jeu* dans cet article.

Observer que les noms donnés aux pièces ou aux règles sont *motivées* par des considérations linguistiques. La prise d'un roi dans une société patriarcale, par exemple, signe l'arrêt de mort du règne concerné et motive les règles relatives à la prise de la pièce appelée « roi ». De même, le cavalier vient implicitement avec sa monture censée pouvoir franchir des obstacles, ce qui motive la règle de déplacement de la pièce appelée « cavalier ».

À y réfléchir cependant de plus près, il ne faut pas chercher davantage de signification au terme « cavalier » que celui explorable par les règles le concernant : « un mot peut être légitimement employé en faisant voir que les circonstances existent où je puis l'employer conformément à sa signification. Et ceci pour l'excellente raison que sa signification est en définitive fixée par les modalités de son emploi. *C'est parce qu'on l'emploie comme on l'emploie qu'il a la signification qu'il a !* ».

Ces propos de Ferdinand GONSETH (cf. [FG36], §7) nous rappellent le danger à chercher du sens où il n'y en a pas, à croire – pour revenir à notre jeu de preuve – que “les règles de la logique” auraient un sens prédéterminé, gravé depuis toujours et à jamais dans les tables de la loi platonicienne. Si chaque enseignante reste libre d'y croire, nos étudiantes n'ont pas à faire les frais de nos croyances et nous aurons une tout autre approche :

*nous proposons de voir la mathématique sous l'angle d'un JEU DE LANGAGE,
le sens des termes de ce langage étant LEUR USAGE MÊME suivant les règles dudit jeu.*

1.3 mise en scène : preuve d'un résultat élémentaire

Le sinogramme 永 [èi] comporte les huit tracés élémentaires de la calligraphie : ce caractère renferme ainsi à lui-seul une mine d'enseignements dans le domaine concerné.

De façon analogue, nous allons présenter une rédaction d'une preuve d'un résultat élémentaire, rédaction qui mettra naturellement au jour *les quatre ACTES fondamentaux du jeu de preuve* ainsi que *les six RÈGLES de ce jeu*. Ces règles iront par deux, chaque paire correspondant d'une part à un acte de notre jeu d'autre part à l'un des trois concepts logiques

<i>implication</i>	⇒	« pas de... sans... »
<i>généralité</i>	∀	« pour chaque »
<i>existence</i>	∃	« il y a »,

lesquels sont autant de difficultés pour nos étudiantes. Cette mise au jour naturelle n'est qu'une des vertus de cet énoncé élémentaire et devrait suffire à motiver notre lectrice.

Voici ledit vertueux énoncé :

une suite est constante ssi chacun de ses termes égale le terme suivant.

La lectrice saura – nous lui faisons confiance – prendre quelques instants pour se convaincre de l'“évidence” de cet énoncé (lequel équivaut en fait au principe de récurrence). L'esprit dégagé, elle pourra alors se concentrer pleinement sur LA RÉDACTION de la preuve suivante.

Afin toutefois de lui prévenir quelque déroute ou gêne concernant les notations utilisées, nous pensons utile de lui préciser que *ces notations visent à évoquer le champ lexical de l'objet dénoté*. Nous noterons par exemple *s* pour un suite, *c* ou *C* pour un complexe, une suite complexe ou une constante, *E* pour une égalité ou un énoncé, *P* pour un prédicat, *n* ou *α* pour un nombre (en grec arithmos) ou un entier naturel, *v* pour un vecteur, *m* pour un symbole muet... Par ailleurs, l'utilisation de contenants vides comme □ ou ◇ dans les généralités ou définitions vise à rappeler que ces vides sont destinés à être remplis, que ces symboles muets sont en attente d'être *instanciés*, çàd ont pour vocation d'être *remplacés*. (C'est bien le propre d'une généralité que de *se spécialiser* en autant de cas singuliers, *spéciaux*.)

Nous nous restreindrons pour le lycée au cas des suites numériques, disons *complexes* pour fixer un cadre suffisamment général. Il s'agit ainsi d'établir la généralité (ou les équivalences)

$$\forall c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, [\exists C \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, c_n = C] \Leftrightarrow [\forall n \in \mathbb{N}, c_n = c_{n+1}].$$

Soit donc $s \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et montrons par double-implication l'équivalence

$$\exists C \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, s_n = C \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{N}, s_\alpha = s_{\alpha+1}$$

(inutile ici de démarquer les deux membres de l'équivalence – le français nous *DIT* qu'il s'agit d'une équivalence).

⇒ Supposons l'existence de gauche et soit *C* un tel complexe : on a alors les égalités $\forall \square \in \mathbb{N}, s_\square = C$. Prouvons les égalités de droite $\forall \alpha \in \mathbb{N}, s_\alpha = s_{\alpha+1}$. Soit donc $\alpha \in \mathbb{N}$ et établissons

l'égalité $s_\alpha = s_{\alpha+1}$: pour cela, remplaçons dans l'hypothèse-généralité \square par α puis par $\alpha + 1$, ce qui donne les égalités $s_\alpha = C = s_{\alpha+1}$ (on a utilisé les symétrie et transitivité de la relation d'égalité $=$).

◀ Supposons les égalités $\forall \square \in \mathbf{N}, s_\square = s_{\square+1}$ et montrons l'existence $\exists C \in C, \forall n \in \mathbf{N}, s_n = C$.

Comment trouver un tel C ? Micro-analyse : soit un tel C , spécialiser en 0 l'hypothèse donne l'égalité $s_0 = C$. Pas le choix ! Notons donc $C := s_0$ et prouvons les égalités $\forall n \in \mathbf{N}, s_n = C$, ce qui livrera l'existence voulue.

Pour chaque objet \diamond , abrégeons E_\diamond l'égalité $s_\diamond = C$. Établissons alors les égalités $\forall n \in \mathbf{N}, E_n$ par récurrence, çàd montrons l'égalité E_0 et les implications $\forall \alpha \in \mathbf{N}, E_\alpha \Rightarrow E_{\alpha+1}$.

L'égalité E_0 est $s_0 = C$ (par définition des E_\diamond), çàd $s_0 = s_0$ (par définition de C), ce qu'on a par réflexivité de l'égalité $=$.

Soit enfin $\alpha \in \mathbf{N}$ tel que E_α et montrons l'égalité $E_{\alpha+1}$. Remplacer $\square \leftarrow \alpha$ dans l'hypothèse-égalités du tout début donne l'égalité $s_\alpha = s_{\alpha+1}$. Or l'hypothèse E_α ("de récurrence") dit $s_\alpha = C$, d'où l'égalité $s_{\alpha+1} = C$, laquelle est $E_{\alpha+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

La lectrice est invitée à repérer dans la preuve ci-dessus :

- ▶ les **affirmations**, repérables par un « on a », mais aussi cachées ailleurs ;
- ▶ les **suppositions**, également cachées dans certains « soit » ou dans un « tel que » ;
- ▶ les « soit » (hors supposition), à qui il semble manquer un **nom** pour l'acte associé.

2. — actes et règles du jeu de preuve

2.1 les quatre actes du jeu de preuve : AFFIRMER, SUPPOSER, ÉVOQUER (×2)

Au contraire de l'affirmation et de la supposition, l'acte formulé par un « soit » n'a à notre connaissance jamais reçu de nom. Vu son importance et les difficultés attenantes pour nos étudiantes, nous franchissons le pas et l'appellerons une **évocation**, au sens de *l'acte d'évoquer*.

Le verbe *évoquer* est ici pris au sens d'« [a]ppeler, faire apparaître par la magie »¹, par analogie avec la magie du décret biblique « Que la lumière **soit** ! ». On peut en effet penser le « soit » comme *un ordre* (l'impératif du verbe *être*, et non un subjonctif), l'objet évoqué se mettant ainsi à *être* suite à son "apparition magique" commandée par ledit impératif : nous pouvons alors en disposer comme de n'importe quel autre objet.

La pensée précédente ne saurait être prise au mot : *AUCUNE croyance* d'ordre biblique ne saurait bien évidemment entrer en jeu ! Elle espère simplement donner une image accompagnant tant la langue que notre intuition, afin de motiver la terminologie.

Notre collègue Philippe LE MOULT propose le vocabulaire moins mystique de *commande*, au sens de *commander une pizza*, rappelant que l'objet commandé échappe complètement à notre contrôle (selon *qui* cuisine, avec *quoi*, dans *quelles* conditions...) et est *quelconque* en ce sens. L'unique contrôle, le seul ACTE en notre pouvoir est de passer commande ou non. À la lectrice d'apprécier cette variante et ses motivations ; nous garderons pour notre part le champ lexical de l'évocation.

La lectrice voudra bien observer dans la preuve précédente DEUX usages de l'évocation. Cette dernière peut PRÉCÉDER une *généralité* et viser à l'établir : nous la qualifierons dans ce cas de **générale**, l'objet évoqué pouvant alors être pensé "quelconque", çàd sans particularité aucune, aussi *général* que possible.

Une remarque importante : les trois qualifications précédentes (« quelconque », « sans particularité aucune » et « général ») N'ont PAS vocation à être définies proprement mais seulement à *guider notre intuition*, à nous aider à saisir le concept en jeu. Dispensables du point de vue de la

1 première acception du [CNRTL](#) (les sens *mentionner* et *rappeler* sont exclus)

rigueur, ces “guides intuitifs” nous paraissent essentiels du point de vue psychologique, pédagogique.

Second usage, procédant en sens contraire : une évocation peut SUIVRE une existence et nous livrer un objet vérifiant la propriété énoncée dans ladite existence. Une telle évocation sera qualifiée de *spéciale*, l’objet évoqué pouvant être pensé cette fois non pas général mais particulier, *spécial*. (Nous aurions à ce titre tout aussi bien pu choisir de parler d’« évocations *particulières* », c’eût été juste plus long. L’expression « évocation *existentielle* », rappelant le type d’énoncé auquel ladite évocation est liée, nous paraît également plus longue et trop lourde.)

Les quatre actes obtenus peuvent alors être vus selon deux angles, comme l’on classerait quatre objets selon leur forme et couleur :

► **ce sur quoi** porte un tel acte – *objets* ou bien *énoncés*, deux catégories grammaticales (au sens de la grammaire de notre jeu de preuve) dont la distinction est un guide intuitif essentiel ;

► la “**gratuité**” ou non dudit acte, çàd *est-ce qu’il a des conditions de réalisation* – la supposition et l’évocation générale n’en ont aucune, au contraire de l’affirmation et de l’évocation spéciale (qui doivent être précédées resp. d’une preuve ou d’une existence).

formulation :	“prix” \ porte sur	énoncés	objets
	“gratuit”	« supposons »	« soit »
	“payant”	« on a »	« soit... tel que »

nom de l’acte :	\ porte sur	énoncés	objets
	libre	supposition	évocation générale
	contraint	affirmation	évocation spéciale

2.2 les six règles du jeu de preuve : 2 règles (utiliser/établir) × 3 symboles ($\Rightarrow \forall \exists$)

Inspirés par la logique naturelle, laquelle décrit les règles du jeu déductif légitimant l’introduction ou l’élimination des différents connecteurs logiques (par exemple « de *A* et de *B* pouvoir déduire la conjonction *A* & *B* »), nous pouvons regarder **DANS L’USAGE** comment sont introduits les symboles d’implication \Rightarrow , de généralité \forall et d’existence \exists , et comment ils sont utilisés, exploités.

Insistons lourdement : l’adverbe « comment » renvoie bien à une façon ou manière de FAIRE, çàd à L’USAGE, et non à une prétendue raison justifiant de sa hauteur écrasante un insensé pourquoi. Nous partons donc de l’observation, afin de formuler une grammaire descriptive qui sera dans un second temps prescriptive, normative.

Concernant le symbole \Rightarrow d’implication, il s’utilise par l’archétype même du raisonnement (appelé **modus ponens**) : si la prémisse d’une implication valide se trouve vérifiée, il en sera alors de même de sa conclusion. Son introduction est quant à elle intimement liée à l’acte *supposer* : établir une implication $P \Rightarrow Q$ revient en effet à *supposer la prémisse P (ce que l’on s’autorisera toujours à faire) puis, dans ce contexte (où l’on pourra affirmer la prémisse P supposée) à établir la conclusion Q*. Et, à y réfléchir, il n’y pas d’autre règles du jeu gouvernant l’implication ou la

supposition ! Les deux règles précédentes – utilisation et introduction – CONSTITUENT donc leur usage, çàd leur signification. (Noter au passage que les deux règles entre parenthèses régissent la supposition).

Pour le symbole \forall de généralité, le propre d'une généralité est (nous l'avons déjà dit²) de se spécialiser en autant de cas spéciaux : c'est ainsi qu'on l'utilise, d'où sa règle d'élimination. Quant à son introduction, çàd à savoir *comment établir une généralité*, disons de la forme $\forall x, P_x$, cela revient, *ayant évoqué un objet o (ce qui sera toujours légitime)*, à *prouver l'énoncé P_o* . La généralité est donc intimement liée à l'évocation générale et, encore une fois, les règles qui précèdent ramassent leur entière signification.

Venons-en au symbole d'existence \exists , le plus délicat. Une manière incontestable d'établir une existence, mettons de la forme $\exists x, P_x$ est d'exhiber un témoin, çàd de "construire" un objet t vérifiant l'énoncé P_t . Comment à présent *utiliser* l'existence précédente ? Nous avons préparé le terrain : *en évoquant un objet o tel que P_o* , avec la possibilité ultérieure d'affirmer l'énoncé P_o (possibilité traduisant simplement le sens de « tel que »). L'existence s'entremêle ainsi avec l'évocation spéciale, les règles précédentes livrant la plénitude de leur sens.

La lectrice résumera d'elle-même :

- ▶ deux règles pour chacun des trois couples
 - implication & supposition,
 - généralité & évocation générale,
 - existence & évocation spéciale ;
- ▶ deux règles collant au sens de « supposons » et de « tel que », pour utiliser les hypothèses ;
- ▶ deux règles traduisant notre liberté de supposer et d'« évoquer-généralement ».

À nos yeux, **les six premières règles sont l'essence du jeu de preuve** et sont à présenter au plus vite à nos étudiantes afin de démystifier les trois symboles \Rightarrow , \forall et \exists . Nulle charge métaphysique, nulle croyance platonicienne ou autre dogme implicite à ingérer ou deviner ; simplement UN USAGE BIEN RÉGLÉ, çàd DES RÈGLES COLLANT À L'USAGE.

(Les quatre autres règles ne sont qu'une explication, en termes du langage de notre jeu de preuve, d'implicites LANGAGIERS qui semblent généralement bien intégrés. Il n'est d'ailleurs pas exclu que nous en ayons raté.)

Récapitulons les quatre actes et les règles du jeu de preuve sus-présentées :

cf. tableau récap ANNEXE

sens = usage

Une dernière précaution quant au « tel que ».

Quand nous disons, par exemple dans une récurrence, « soit n un naturel tel que E_n , montrons alors l'énoncé E_{n+1} », même si nous décelons la forme « soit... tel que » d'une évocation spéciale, le contexte exclut sans appel cette dernière. Nous pouvons en effet reformuler nos dits en « soit n un naturel, SUPPOSONS l'énoncé E_n et montrons celui E_{n+1} », ce qui tombe dans le cadre d'une évocation GÉNÉRALE suivie d'une supposition. À ce titre, la première évocation « soit n un naturel » pourrait déjà se reformuler en « soit n un objet SUPPOSÉ naturel » et tomber dans le même cadre.

Cette ambiguïté du « tel que » est très courante et nous devons la signaler. Même si le contexte suffit quasiment toujours à la lever quand l'on lit un « tel que », il est plus délicat quand l'on écrit un « tel que » de soigner son contexte... À bonne entenduse.

2 section 1.3., juste avant la formulation de notre énoncé vertueux

2.3 avec QUOI joue-t-on au juste ?

Notre jeu semble jouer avec *des ÉNONCÉS* (en affirmant et supposant) ainsi qu'avec *des OBJETS* (via les évocations). La règle du *modus ponens* semble exemplaire à cet égard (lorsque formulée en : « d'un énoncé E et d'une implication $E \Rightarrow F$ pouvoir déduire l'énoncé F »), tout comme la possibilité de supposer ou d'«évoquer-en-général» librement.

Tel est le guide intuitif que nous souhaitons transmettre.

Si l'on veut bien cependant y regarder de plus près, chaque énoncé de notre jeu est *toujours* couplé avec un acte (affirmer ou supposer), l'illusion venant de l'habitude de *confondre* d'une part *l'affirmation d'un énoncé avec ledit énoncé*, d'autre part *la supposition d'un énoncé avec la règle permettant (sans condition) ladite supposition*. Les objets ne sont pas en reste, puisqu'il est aisé de *confondre une évocation générale avec la règle autorisant ladite évocation*. Une «pièce» du jeu est donc un couple (énoncé, acte) ou (objet, acte), et nos «coups» du jeu, çàd nos actes effectués par application d'une règle du jeu, n'ont pas lieu au même niveau que les quatre actes que nous avons introduits. En d'autres termes : *notre action ludique, parfaitement réglée, N'est PAS celle de notre guide intuitif*.

Il est pourtant simple de «préserver» ce guide en le «plongeant» dans notre jeu :

au lieu de dire plus haut « confondre », il suffit de dire « IDENTIFIER ».

Nous sommes dans une situation analogue quand nous partons d'un ensemble \mathbf{N} intuitif, où nous sommes à l'aise, puis quand nous construisons un \mathbf{Z} de façon moins naturelle, dans lequel nous souhaitons retrouver notre \mathbf{N} avec toute la structure de nos intuitions : le moyen tout indiqué est de trouver une injection qui respecte ladite structure, ce qui s'appelle un plongement. (Même chose pour «voir» chaque réel comme un polynôme à coefficients réels : on plonge \mathbf{R} dans $\mathbf{R}[X]$.)

Il nous paraît inutile d'attirer l'attention des étudiantes sur ce point, notre propos restant avant tout de les éveiller à leur ACTION sur les énoncés et objets. En revanche, *à nous enseignantes de l'avoir clairement à l'esprit*.

3. — commentaires

3.1 portées et cadres

Le tableau récapitulatif comporte des cadres encadrant littéralement les suppositions et les évocations générales. Ces cadres délimitent *les portées* desdits actes, çàd *l'«espace» jusqu'où portent leurs effets*.

En guise d'illustration, empruntons à la musique classique européenne où une altération hors armure va altérer les notes de même position *jusqu'à la fin de la mesure où elle apparaît* : passée ladite mesure, les notes concernées seront lues «au naturel», sans l'altération précédente – à moins bien sûr d'une redite explicite. En ce sens, *la portée* de l'altération est tout le reste de la mesure où elle apparaît.

De même, une pratique saine est de considérer qu'une supposition actée par un « si » va **prendre fin avec la phrase** contenant ce « si ». Souhaiterions-nous faire durer plus longuement ladite supposition, il suffirait de l'introduire par un « supposons », la structure de la rédaction et le contexte devant permettre de deviner clairement où ladite supposition prend fin. Il peut alors aider de visualiser un cadre s'ouvrant avec l'acte *supposer* et se fermant juste avant son élimination, çàd par l'introduction d'une implication :

Supposons la prémisse P . [... *raisonnement*...] On a la conclusion Q .

On a alors l'implication $P \Rightarrow Q$.

Ce cadre joue le rôle d'un "garde-fou" en délimitant clairement le "sous-espace de jeu" où l'on pourra affirmer la prémisse P .

De façon analogue, quand l'on affirme

« on a pour chaque réel r la positivité $r^2 \geq 0$ »,

le sens du symbole muet r "prend vie" avec le mutificateur³ « pour chaque » et "meurt" à la fin de la portée de ce dernier, à savoir **à la fin de la proposition**. Si nous désirions "prolonger sa vie", il suffirait d'acter une évocation générale, par exemple en disant

« soit r un réel, on a alors la minoration $r^2 \geq 0$ »,

la structure de la rédaction et le contexte devant encore une fois permettre de cerner la portée de ladite évocation – probablement l'affirmation d'une généralité :

Soit o un objet. [... *raisonnement*...] On a l'énoncé P_o .

On a alors la généralité $\forall x, P_x$.

On observera un parallèle entre ces deux cadres, chacun ouvrant un certain "contexte" (en un sens informatique) :

- ▶ celui de la supposition *permet d'affirmer* l'hypothèse supposée ;
- ▶ celui de l'évocation générale *donne sens* au symbole évoqué.

(À vrai dire, nous pourrions nous passer de cadres pour les évocations, l'objet évoqué pouvant en effet continuer à vivre sans nuire au bon déroulement du jeu. Il nous paraît cependant plus sain, plus sûr pour nos étudiantes de le maintenir dans un premier temps.)

3.2 *théorèmes et preuves – 1^{er} commandement de la mathématique*

Outre son rôle de garde-fou, la notion de cadre livre une définition simple des **théorèmes** :

*sera **théorème** chaque énoncé qui est affirmé EN DEHORS DE TOUT CADRE à la fin d'une suite d'actes de notre jeu, ladite suite s'appelant alors une **preuve** dudit théorème.*

Munies de cette définition et des six règles claires et simples ci-dessus, nous pensons nos étudiantes bien armées pour respecter au mieux le commandement suivant :

I : *CE QUE TU AFFIRMES, TU L'AURAS PROUVÉ – SINON TU LE TAIRAS.*

Ce premier commandement de la mathématique est un guide aussi ferme que précieux pour éviter le premier écueil de notre introduction : les affirmations sans preuve.

Une nuance de taille cependant : ce commandement est à prendre en compte *uniquement en phase FINALE de rédaction*. Pendant votre phase exploratrice, tenez-le à distance – comme un horizon – afin de rester libre, spontanée, et créatrice !

Notre tableau récapitulatif comporte tout en bas à droite une règle d'affirmation *gratuite*, ce qui semble déroger à notre commandement... Commentons cette dérogation.

3.3 *affirmer sans preuve ? CHOISIR des axiomes*

3 nous empruntons la terminologie à René CORI, cf. [RC13]

Il semble difficile de commencer à jouer sans règles permettant la moindre affirmation. C'est là qu'intervient la règle exceptionnelle permettant d'affirmer SANS PREUVE certains énoncés, alors qualifiés d'**axiomes**.

Insistons-y, quitte à nous répéter :

les axiomes NE tombent PAS d'un ciel platonicien sous le coup d'un décret métaphysique, auréolés d'une divine nécessité : c'est NOUS qui en décidons, de façon ÉCLAIRÉE et MOTIVÉE (et, même si nous y croyions, AUCUNE croyance ne saurait être imposée à nos étudiantes).

Par exemple, la réflexivité de l'égalité ($\forall x, x = x$) peut être prise comme axiome, tout comme sa symétrie ou sa transitivité – nous les avons d'ailleurs toutes trois utilisées lors de notre mise en scène (cf. partie 1.3). De même, chaque prédicat P singulaire donne lieu à l'énoncé « P ne distingue pas deux objets égaux », formalisable en $\forall x, \forall y, x = y \Rightarrow (P_x \Rightarrow P_y)$, que l'on peut décider ou non d'ajouter à nos axiomes. Il serait peu raisonnable de ne pas le faire, vu les attendus intuitifs d'une relation d'égalité (même si ces énoncés sont prouvables en théorie des ensembles où l'égalité peut être définie par double-inclusion).

Un autre exemple d'axiomes sont ceux *spécifiques* à telle ou telle théorie mathématique : le principe de récurrence (utilisé dans notre mise en scène) peut être vu comme un axiome arithmétique, le cinquième postulat d'Euclide comme un axiome de la géométrie euclidienne, l'existence d'une borne supérieure comme un axiome dans certains ensembles ordonnés (par ex. \mathbf{R}), la commutativité des symétries comme un axiome dans un groupe abélien, l'existence de l'infini comme un axiome ensembliste...

Une dernière classe d'axiomes nous intéressera tout particulièrement.

Regardons par exemple l'implication $P \Rightarrow P$ lorsque P est l'énoncé « il **pleut** ». Elle s'énonce alors « pas de pluie sans pluie », ce qui est une authentique vérité de LA PALISSE, du même ordre que « Martha est Martha » dont le contenu “boucle”. Il s'agit donc *littéralement* d'une **tautologie**, au sens étymologique de *dire la même chose* : *tautos* = même, *logos* = dire. Si l'on remplace maintenant P par n'importe quel énoncé, l'implication $P \Rightarrow P$ demeure tautologique. Il en sera de même des implications de la forme $P \Rightarrow (F \Rightarrow P)$, dont une instance serait par exemple « s'il **pleut**, alors pas de **feu** sans **pluie** », et qu'il ne nous nuira pas de pouvoir affirmer. Un dernier exemple serait le schéma $[a \Rightarrow (b \Rightarrow c)] \Rightarrow [(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)]$, plus compliqué à formuler littéralement mais qui exprime tout simplement la transitivité (attendue) de l'implication.

Plus généralement, nous pouvons créer un certain réservoir de tautologies *potentielles*, dans lequel nous *choisirons* celles avec lesquelles nous aurons le droit de jouer (selon par exemple la logique désirée – classique, intuitionniste, naturelle, minimale...). Un exemple de tel réservoir peut être constitué par les “propositions” formées à l'aide

- i) de deux énoncés singuliers (le tautologique T et le contradictoire \perp),
- ii) de “coquilles vides”, destinées à être remplacées, instanciées,
- iii) des connecteurs logiques usuels (implication \Rightarrow , équivalence \Leftrightarrow , négation \neg , conjonction $\&$, alternation \vee).

La logique classique décrètera alors **tautologique** chaque proposition dont la table de vérité renvoie toujours la valeur T quelles que soient les valeurs (T ou \perp) attribuées aux coquilles vides.

Ce décret présuppose de *disposer au préalable des tables de vérité de chaque connecteur*, lesquelles doivent être CHOISIES par nos soins, avec discernement, *motivées* – en aucun cas imposées dogmatiquement. Nous renvoyons la lectrice aux présentations classiques de ces dernières (à l'origine dues à POST et WITTGENSTEIN), leurs détails n'étant pas le cœur de notre message⁴.

Voici quelques exemples de tautologies classiques, où chaque lettre en italique est une instanciable (“coquille vide”) :

⁴ Nous l'incitons cependant à *éprouver la langue* en vérifiant que les trois tautologies données en exemple (dont $P \Rightarrow P$) sont bien... tautologiques.

l'équivalence	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \ \& \ \neg B)$	attribuée à DE MORGAN ;
l'équivalence	$\neg E \Leftrightarrow (E \Rightarrow \perp)$	pouvant "définir" la négation ;
l'implication	$[(A \Rightarrow p) \Rightarrow A] \Rightarrow A$	(loi de PIERCE) ;
l'alternation	$E \vee \neg E$	(principe du tiers exclu) ;
l'implication	$\neg\neg P \Rightarrow P$	(élimination de la double-négation) ;
l'implication	$(\neg u \Rightarrow \neg v) \Rightarrow (u \Rightarrow v)$	(principe de contraposition) ;
l'implication	$\neg(p \ \& \ q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$	(loi "existentielle" de DE MORGAN).

Remarque-exercice : même sans axiome, il reste possible de jouer et prouver des théorèmes grâce aux affirmations permises au sein des cadres de supposition. Nous invitons la lectrice à établir nos trois premières tautologies $P \Rightarrow P$, $P \Rightarrow (F \Rightarrow P)$ et $[a \Rightarrow (b \Rightarrow c)] \Rightarrow [(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)]$, ainsi que l'interversion de quanteurs identiques ($\forall x, \forall y, B_x^y \Rightarrow \forall y, \forall x, B_x^y$ (où \forall est un quanteur et B un prédicat binaire) ou encore la factorisation ($\forall x, [E \Rightarrow P_x] \Rightarrow (E \Rightarrow [\forall x, P_x])$ où E désigne un énoncé et P un prédicat singulaire. (La loi de PIERCE semble toutefois inatteignable par ces seuls moyens.)

3.4 tautologies ou raisonnements naturels ?

Nous avons dans notre mise en scène (cf. partie 1.3) usé d'un *raisonnement par double-implication*, qui peut s'énoncer sous la forme de la RÈGLE suivante :

« de l'affirmation de deux implications $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$
pouvoir affirmer l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ ».

Or cette règle ne fait clairement pas partie de celles du jeu : *pourquoi donc ce dernier la VALIDERAIT-elle ?* Il suffit simplement d'invoquer la tautologie $(A \Rightarrow B) \Rightarrow [(B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)]$ et d'utiliser deux fois la règle du *modus ponens*.

Voyons un autre exemple dans le détail en testant notre manuel sur l'équivalence

$$\neg(\exists x, P_x) \Leftrightarrow \forall x, \neg P_x \quad (\text{loi de DE MORGAN généralisée}).$$

Raisonnons à nouveau par double-équivalence.

\Rightarrow Supposons l'absence $\neg(\exists x, P_x)$ et montrons les négations $\forall x, \neg P_x$.

Soit o et prouvons la négation $\neg P_o$, çàd l'implication $P_o \Rightarrow \perp$.

Supposons P_o : on a alors l'hypothèse P_o , d'où l'existence $\exists x, P_x$, laquelle livre avec l'absence supposée le contradictoire \perp , *QED*.

\Leftarrow Supposons à présent les négations $\forall x, \neg P_x$ et établissons la négation $\neg(\exists x, P_x)$, çàd l'implication $(\exists x, P_x) \Rightarrow \perp$.

Supposons l'existence $\exists x, P_x$ et soit o tel que P_o : nous pouvons alors affirmer l'hypothèse P_o . Spécialiser en o notre hypothèse-négations fournit par ailleurs la négation $\neg P_o$, d'où à nouveau une contradiction, *CQFD*.

Les quatre actes et les six règles tournent ici à merveille, et notre jeu est aussi fluide que limpide. C'est, nous avons la faiblesse de le croire, *l'aspect convivial* de notre manuel qui transparaît ici. (Nous encourageons d'ailleurs la lectrice à apprécier davantage cette convivialité en établissant un quelconque énoncé prédicatif considéré classiquement valide.)

Il resterait toutefois à mobiliser quelques tautologies pour valider :

- le raisonnement par double-équivalence (nous l'avons déjà fait) ;
- notre "définition" de la négation $\neg E \Leftrightarrow (E \Rightarrow \perp)$;

c) la déduction de l'absurde \perp à partir d'une contradiction, çàd d'un énoncé et de sa négation – mais c'est précisément le sens direct \Rightarrow de l'équivalence précédente (le sens réciproque \Leftarrow suffisant d'ailleurs à établir chaque négation).

Les tautologies apparaissent ainsi dans notre manuel surtout comme *des moyens peu naturels de valider des raisonnements "naturels"*. Établir lesdites tautologies est ainsi la part "bureaucratique", le prix à payer pour le côté convivial. Nous pensons que cette bureaucratie est une bonne école pour nos étudiantes afin qu'elles s'approprient (ou rejettent !) les raisonnements qu'elles désirent utiliser, les poussant à questionner et façonner leurs outils, développant ainsi leur autonomie.

Une alternative – sans tautologies – serait d'augmenter le nombre de règles afin d'en disposer immédiatement, en court-circuitant la bureaucratie. De fait, notre collègue Philippe LE MOULT a décliné notre manuel avec VINGT ET UNE règles du jeu : ses étudiantes pouvaient alors user spontanément de la déduction naturelle, par exemple pouvoir affirmer une conjonction quand l'on a affirmé chacun des énoncés conjoints.

Notre parti a été de *pousser au maximum* la réduction des règles, chacune étant *motivée et consacrée par L'USAGE ainsi que LA LANGUE*. La lectrice saura trouver l'équilibre entre règles et tautologies qui conviendra à son enseignement.

4. — et la définition dans tout ça ?

Il faut voir les définitions [...] comme des conventions superflues d'abréviations notationnelles. [...] La forme dans laquelle on exprime une définition est sans importance, tant qu'elle indique la manière de l'éliminer.

Willard V. O. QUINE, *Du point de vue logique* (1980)

Il semble impensable de pratiquer la mathématique – ou toute activité philosophique – sans la possibilité de saisir, cerner, nommer, appeler, qualifier, abrégé, noter... bref : sans pouvoir *définir*. (Nous avons de fait *déjà* usé de la définition dans notre mise scène : la lectrice l'avait-elle repéré ?)

Au-delà des considérations épistémologiques et historiques sur ce que permettent les définitions ou les concepts qu'elles créeraient, la conception quinienne de la définition exposée en citation nous paraît limpide, concise (nous ne saurions mieux formuler la nôtre) et collant à l'usage : nous l'adopterons donc.

Bien que la pratique mathématique ne sera passera jamais d'abréviations ou de définitions, ces dernières sont théoriquement dispensables. Et cette dispensabilité théorique nous permet de mettre l'acte *définir* bien à part des quatre actes du jeu de preuve, la définition pouvant intervenir transversalement, dans n'importe quel contexte dans ou en dehors du jeu.

4.1 *définir OU BIEN évoquer : que « soit » soit clair*

Il y aurait bien des choses à dire à nos étudiantes en vue de clarifier leur pratique de la définition. Nous signalerons uniquement celles en lien direct avec le jeu de preuve *stricto sensu*, à savoir avec les évocations.

4.1.1 La première chose est une remarque et un rappel : dire « soit o un objet », c'est en quelque sorte dire « soit un objet, nommons-le o », çàd c'est d'abord "évoquer-en-un-sens-très-strict" puis définir. Cette vue de l'esprit permet de bien voir que

nous gardons l'entier contrôle du NOM de l'objet évoqué.

Elle n'en reste pas moins qu'une vue de l'esprit, au sens où séparer *en pratique* les deux actes mis au jour nous semble non pertinent. (La lectrice formulera une remarque analogue pour les évocations spéciales.)

4.1.2 La seconde chose est une précaution d'hygiène, analogue à celle de ne jamais donner un nom déjà attribué auparavant, en vue d'éviter les confusions avec les évocations :

ne pas utiliser « soit » pour définir

(dans le même esprit, on évitera l'ambiguïté du « soit » de reformulation – « à savoir », « c'est-à-dire », « en d'autres termes » – ainsi que celui de la disjonction exclusive – « ou bien »).

Afin de faire clairement allusion aux « abréviations notationnelles » de QUINE, nous suggérons les verbes « noter », « abrégé », « appeler », « nommer ». Lesquels, d'ailleurs, avons-nous employés dans notre mise en scène ?

4.1.3 Une troisième chose est de signaler des exemples typiques de la confusion précédente. Prenons la formulation suivante :

« soit un espace vectoriel de dimension n ».

Est-ce que l'on évoque un espace vectoriel en imposant sa dimension, le symbole n ayant déjà reçu du sens auparavant ? ou bien évoque-t-on *d'abord* un espace vectoriel puis définit-on *ensuite* sa dimension ? Le contexte devrait lever l'ambiguïté mais la recherche de l'introduction préalable du symbole n peut s'avérer fastidieuse, surtout s'il faut remonter loin – et ce encore plus lorsque ledit n n'a pas été introduit ! C'est pourquoi nous pensons préférable de reformuler la seconde interprétation en

« soit un espace vectoriel *DONT ON NOTE* d la dimension ».

De manière analogue, on rencontre souvent dans des énoncés ou des corrigés certaines formulations visant à énoncer ou établir des théorèmes portant sur des listes de réels. Par exemple :

« soient x_1, \dots, x_n des réels » ou « soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ».

L'intention s'éclaire avec l'habitude : le nombre n désigne la longueur de la suite évoquée et les réels x_1, x_2, \dots, x_n ses coordonnées. Cette clarté superficielle cache cependant nombre de problèmes entretenant autant de confusions chez les étudiantes. Voici une formulation sans détour qui, à notre humble avis, les évite toutes :

« soit $n \in \mathbf{N}$, soit $v \in \mathbf{R}^n$ »

(la première évocation étant bien sûr superflue si le symbole n a été introduit au préalable). Les coordonnées sont alors simplement les images, notées séquentiellement en indexant les arguments, par l'application v des entiers de 1 à n .

Enfin, dans le cas des espaces vectoriel de petite dimension, il est usuel de nommer les coordonnées des vecteurs évoqués, par exemple « soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ ». Cette formulation paraît évoquer deux réels, alors que nous parlions d'évoquer *un vecteur* : on lui préférera par conséquent l'évocation-suivie-d'une-définition

« soit $v \in \mathbf{R}^2$ dont on note a et b les coordonnées respectives ».

Nous proposons même, afin d'alléger les notations, de fusionner ce qui précède en

« soit $v =: (a, b) \in \mathbf{R}^2$ »,

la place des « : » par rapport au symbole d'égalité signalant clairement où se situe le *definiendum*. Cette fusion s'écarte finalement peu de l'usage « soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ » tout en y clarifiant définis et évoqués : pourquoi ne pas l'adopter ?

4.1.4 Une dernière chose concerne les définitions telles que l'on les trouve exposées dans les cours, avec un paragraphe consacré bien à part et s'ouvrant généralement par un « Définition : ... ». Prenons un exemple :

« Définition. Soit n un entier : on appelle *diviseur de n* chaque entier d pour lequel il y a un entier δ tel que $n = d\delta$ »

(variante : « Soient m et d des entiers : on dit que d *divise* m s'il y a... »).

Que viennent donc faire des évocations (« Soit n », « Soient m et d ») dans ce cadre *HORS jeu*, où il n'est pas question de prouver mais de définir ?

L'intention est la même que celle, dans le jeu de preuve, des évocations générales : viser une *généralité*, çàd **pouvoir in fine remplacer le symbole évoqué par chaque objet de notre choix**. (La "généralité" dans le cadre d'une définition n'est toutefois plus un énoncé mais un caractère : celui de la portée – générale – de l'acte définissant).

Par exemple, dans notre mise en scène (cf. partie 1.3), nous avons défini juste avant d'annoncer notre récurrence : « Pour chaque objet \diamond , abrégeons E_\diamond l'égalité $s_\diamond = C$ ». C'était une manière – locale – de définir comme dans un cours : « Soit \diamond un objet : on note E_\diamond l'égalité $s_\diamond = C$ ».

La lectrice voudra bien se reporter à la citation de QUINE qui ouvrirait cette partie 4.1 pour éclairer en quoi ces définitions "de cours" sont bien... des définitions.

4.2 grammaire des objets : individus, évocables, mutifiabiles

Comment dans le discours mathématique les objets "naissent"-ils ? Autrement dit : *comment* les symboles qui les désignent – leurs noms – apparaissent-ils pour la première fois, çàd sont-ils **introduits** ? Y répondre passe par l'observation de *L'USAGE des ACTES portant sur les OBJETS*.

Or nous avons à présent fait le tour de ces actes : il est temps d'en tirer leçon.

Afin d'alléger notre discours, nous nous autoriserons à éluder « symboles de ».

Un objet :

- ① ou bien "naît" d'une définition, çàd d'une abréviation (théoriquement dispensable) ;
- ② ou bien "naît" lors une évocation, ce qui le destine rétrospectivement à être évoqué, destin le qualifiant ainsi d'**évocable** ;
- ③ ou bien *était DÉJÀ LÀ*, étant un "individu" de la théorie mathématique ambiante (l'entier nul 0 en arithmétique, l'ensemble vide \emptyset en théorie des ensembles, la permutation identité Id en théorie des symétries...) ;
- ④ ou bien *est PURE CHIMÈRE*, son nom étant un symbole MUET utilisé par ex. dans une quantification ($\forall m, P_m$ ou $\exists m, P_m$) en dehors de laquelle il n'a AUCUNE SIGNIFICATION.
Au passage, sa mutification (ici par un quanteur) le qualifie rétrospectivement de **mutifiable**.

Insistons sur cette aspect chimérique, cette *localité* du sens, avec l'exemple simple $\forall r \in \mathbf{R}, r^2 \geq 0$, lequel exprime la positivité du carré de chaque réel. La reformulation « chaque réel est de carré positif » ne met en jeu AUCUN symbole d'objet : ni r ni aucun autre symbole muet. Le symbole r ne dénote donc personne dans l'absolu, il n'a AUCUN sens global.

Rappelons ici une importante mise en garde effectuée plus haut (cf. partie 2.1) : les notions de « sens », « naissance », « chimère » ou de « déjà là » sont autant de “guides intuitifs”, dont on ne gagnerait rien à préciser la signification. Leur visée est éminemment *psychologique, pédagogique*.

Notre grammaire fait ainsi ressortir TROIS types d(e symboles d’)objets :

individus, évocables, mutifiabiles.

Chacun a un usage bien spécifique, qui a d’ailleurs motivé sa distinction et son nom. Ces “atomes” permettent en retour de construire à l’aide d’opérations *les termes* des prédicats, çàd ce dont ils parlent ; en les reliant ensuite ces termes *via* des relations, on obtient les premiers prédicats ; mélanger avec les connecteurs et les quanteurs livre enfin *tous* les prédicats, dont les énoncés. L’ADN de ces derniers a donc pour “bases” les trois catégories grammaticales d’objet mises au jour.

Cette connaissance grammaticale – répétons-le – résulte d’une simple observation des *usages* du discours mathématique relatifs aux *objets*, en particulier de *l’évocation* et de *la définition*. Voyons à présent comment elle va permettre à nos étudiantes d’éviter le second écueil signalé en introduction, de leur épargner ce « sacrifice du sens » dénoncé par Stella BARUK⁵.

4.3 de la bonne INTRODUCTION des objets – II^d commandement de la mathématique

Lorsque nous *PARLONS* d’un objet, nous usons d’un symbole pour le désigner – son nom. Il se peut que ce dernier n’ait pas été introduit proprement : ce symbole *erre* alors probablement, *insensé* (littéralement *dénué de sens*), et l’objet visé est au mieux *une CHIMÈRE* (cas ④ ci-dessus). Tel est le second écueil que nous annonçons en introduction.

Or la conséquence majeure de l’analyse génétique des énoncés (partie 4.2) est un plein phare sur cet écueil. Ce phare s’érige en le commandement suivant, qui vise à **traquer les symboles “errants”, dénués de sens** :

II : *CE DONT TU PARLES, TU LUI AURAS DONNÉ SENS AU PRÉALABLE – TOI OU AUTRUI.*

Ce don de sens, cet acte « *donner-sens* est un “acte de naissance”, lequel peut être

① *ou bien DÉFINITION* ② *ou bien ÉVOCATION*

suivant la numérotation de notre analyse. Ainsi explicité, et avec la même réserve que pour le premier (à garder comme horizon pour la rédaction *finale* uniquement), notre second commandement *visé une hygiène irréprochable quant au SENS des OBJETS* :

un symbole d’objet aura reçu du sens, une signification, à la condition
expresse d’avoir été *introduit proprement*, çàd ***ou bien DÉFINI ou bien ÉVOQUÉ***.

« Et les individus ? Et le cas ③ ? », interpellera la lectrice perspicace. En effet, même les objets « DÉJÀ LÀ » ont (eu) un acte de naissance. Cette dernière a lieu *pendant la constitution du langage* de la théorie étudiée, où l’on décrète alors : « *tel* symbole dénotera *tel individu*, *telle opération* ou *telle relation* ». Nos étudiantes sont en pratique confrontées *presque TOUJOURS* aux deux premiers cas et nous pensons inutile de leur détailler le cas par décret.

En revanche, à nous enseignantes d’**avoir une vision LIMPIDE** de l’analyse génétique sus-décrite (l’article [LM24] pourrait y aider) afin de maîtriser la dernière introduction :

le don de sens ③ *par DÉCRET*.

5 cf. par exemple [SB93] p. 46 ou [SB04] p. 20

4.4 le cas des symboles muets

Nous l'avons vu au cas ④ ci-dessus : les quantifiés font *génétiqument* partie de notre grammaire. Il est par conséquent *impossible* de jouer pleinement sans symboles muets.

Toutefois, tout comme la définition est transverse à notre jeu, *il y a pléthore d'AUTRES symboles muets*, tous non intrinsèquement liés à notre jeu et théoriquement dispensables. Certains viennent avec *les ensembles* (description par image directe, par compréhension ou séparation), avec *les applications* (familles indexées, assignation \mapsto , tendances, limites), ou encore avec *les définitions et évocations locales* (cf. partie 3.1 sur les portées).

La lectrice observera, dans chacun de ces cas, la présence d'un "opérateur" qui *mutifie* le symbole considéré, *et aucun autre*. La règle est alors simple pour éviter les symboles muets errants :

chaque symbole muet doit avoir son mutificateur EXCLUSIF.

Suivant l'esprit des définitions & invocations locales, nous pourrions étendre *localement* notre second commandement et inclure ainsi

le don de sens LOCAL ④ *par MUTIFICATION.*

Une dernière précaution – et non des moindres. Il est un usage très courant (et très toxique) de confondre *existence* et *évocation*, comme dans l'exemple suivant :

« 5 et 42 sont étrangers, donc **il y a deux relatifs a et b tels que $5a + 42b = 1$. L'un deux doit alors être négatif** ».

Nous *croyons* avoir introduit proprement les nombres a et b (ce qui permet de continuer à en parler) alors que *leurs symboles sont MUETS* dans la première phrase, sa conclusion pouvant en effet se reformuler en :

« on a l'existence $\exists z \in \mathbf{Z}, \exists \zeta \in \mathbf{Z}, 5z + 42\zeta = 1$ ».

Cette existence délimite de fait *la portée* des symboles muets en jeu, laquelle ne saurait dépasser la fin de la phrase où est affirmée ladite existence. Nos symboles a et b sont ainsi mutifiés au sein de la première phrase : *pourquoi diable se mettraient-ils à parler dans la seconde ?*

L'illusion est pernicieuse car le mal est indolore à court terme, le danger étant à long terme *la perte du contrôle du sens*. Le remède est simple et consiste à acter l'évocation spéciale en jeu :

« ... **il y a deux relatifs a et b tels que $5a + 42b = 1$. Soient de tels relatifs. L'un deux doit alors être négatif** ».

Le second commandement est ainsi respecté et nous pouvons continuer à jouer en toute sérénité.

5. — ouvertures

5.1 UNE ou DEUX évocations ?

À l'origine, notre évocation générale s'appelait « évocation » tout court. Quant à l'évocation spéciale, laquelle apportait une mise au point sur le discours mathématique qui – à notre connaissance – était nouvelle, elle méritait à nos yeux son vocabulaire spécifique : *convocation ? appel ? commande ? création ? obtention ?* Cela nous aurait épargné deux noms à rallonge et deux verbes associés maladroits.

En sondant notre entourage, un ami (Rémy OUDOMPHENG) nous a objecté ne pas se reconnaître dans les usages que nous décrivions. Selon lui, la règle d'élimination des existences était la suivante (où E désigne un énoncé et P un prédicat singulaire) :

pouvoir affirmer l'énoncé E à partir des affirmations de l'existence $\exists x, P_x$ et de la généralité $\forall x, (P_x \Rightarrow E)$.

Cette conception, où il n'y a qu'une seule évocation « soit », est bien sûr entendable et nous tenions à la présenter. Sa possibilité a d'ailleurs contribué à notre décision de garder, en fin de compte, le même substantif « évocation » pour unifier deux actes que notre jeu distingue et que la lectrice pourrait opter de confondre.

Pour défendre notre point de vue, en particulier la convivialité de notre manuel de règles, nous devons exprimer que la règle ci-dessus ne nous paraît pas particulièrement conviviale. Comment d'ailleurs se convaincre, intuitivement, de sa validité sans passer par un témoin de l'existence en lequel nous spécialiserions la généralité pour pouvoir enfin appliquer un *modus ponens* ? L'évocation spéciale permet précisément cela, et *en des termes identiques* : l'intuition se coule dans le jeu, ce qui est à nos yeux autrement plus convivial.

5.2 mais où sont passées les “variables” ?

Sire, répondit LAPLACE, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.

François ARAGO⁶

La lectrice l'aura sans doute remarqué : notre exposé a soigneusement évité le recours à ce mot, traditionnellement si ancré dans la description de la syntaxe mathématique.

Nous avons certes flirté lors de notre mise en scène avec la *constance*, occasion de rappeler l'origine *temporelle* de l'argument des applications, elle-même issue de la *physique*. Or ce dernier domaine sort complètement de notre compétence et est, à notre humble connaissance, aux antipodes de notre démarche visant la *clarté par l'observation de l'usage*. La variabilité et la constance sont des notions en effet beaucoup trop fluides pour que l'analyse de leur usage ne les morcellent en autant de fragments que de cas seront à distinguer. Un exemple parmi d'autres : quand l'on prouve une généralité à l'aide d'une “variable”, celle-ci doit d'abord être “fixe” (afin de pouvoir en parler) voire “fixée” (mais autant alors parler tout de suite de “fixable”) puis devenir muette (une fois “gobée” par un quanteur \forall).

Le seul point sur lequel nous pensons mettre tout le monde d'accord est de ranger les *individus* parmi les “constantes” et les *mutifiabiles* parmi les “variables”.

Quant aux *évocables*, notre dernière concession sera de les voir comme des “variables localement constantes” ou des “constantes ‘futurement’ variables”, la constance s'appliquant le temps du discours usant d'un tel évocable. La “variabilité” quant à elle apparaît *après* le discours, disons la preuve d'une généralité, quand l'on voudra *spécialiser* ladite généralité – or il s'agira alors non pas de *varier* (le propre d'une variable, nous dit le français) mais d'*être remplacée, substituée, instanciée*. **La langue cesse ici de décrire l'usage.** Comment dans ces conditions espérer un seul instant que nos étudiantes s'y retrouvent ? Nous devons en prendre acte :

la notion de “variable” n'est pas pertinente pour notre démarche
qui est de *décrire, tout en respectant la langue, L'USAGE*
DE LA PRATIQUE DU DISCOURS MATHÉMATIQUE.

Elle demeure cependant *un excellent guide intuitif* de par son passé issu de la physique et les intuitions qu'elle porte.

⁶ anecdote rapportée par Victor HUGO dans [VH], p. 271. Précisons par précaution que notre comparaison vise **exclusivement** Dieu et la variable (plus précisément : la croyance en leur nécessité) : ni LAPLACE ni la lectrice ni Napoléon ni l'auteur de cet article ne sauraient être impliqués.

5.3 *quoi de neuf – notre contribution*

Derrière un habillage voulu convivial, nous empruntons évidemment beaucoup à la logique formelle. Voici toutefois quelques points qui nous semblent dignes d'attention.

► **des ACTES au lieu d'énoncés.** L'emphase mise sur les actes permet de ne plus voir les preuves comme certaines suites d'énoncés mais comme *certaines suites d'ACTES*, un énoncé s'identifiant alors à *son affirmation* (ou comment plonger les énoncés dans notre jeu).

► **nommer & régir l'évocation.** Il manquait *un NOM* pour désigner l'acte correspondant à *la demande* (intuitive) à *pouvoir DISPOSER d'un objet*. Ainsi qu'*une RÉGLE* (ou plusieurs) donnant *le droit d'EFFECTUER* ledit acte.

► **convivialité des cadres** \Rightarrow . Quand l'on veut établir une implication, les suppositions et cadres sous-jacents s'intègrent naturellement au discours, tant formellement qu'informellement, et gèrent de façon plus commode les « décharges d'hypothèse ». Par ailleurs, un théorème se décrit simplement comme *un énoncé affirmé HORS CADRES*.

► **évocables & mutifiabiles.** Mettre au jour et nommer l'acte *ÉVOQUER* amène *de fait* la distinction entre évocables et mutifiabiles, tuant ainsi dans l'œuf les confusions venant avec la notion de « variable ».

► **acter l'évocation spéciale.** Quand le discours affirme une existence, *acter* l'évocation en jeu permet d'introduire proprement « l' » objet « existant », nous évitant ainsi le miracle de faire *parler* des symboles *muets*. En forçant un peu le trait, cela pourrait donner :

« *Il y a un réel dont le carré vaut 7 ? Très bien : **soit un tel réel !** On peut alors en parler* ».

L'assistant de preuve Yalep déjà mentionné (en section 1.1) nous semble exemplaire à cet égard.

► **fixer, définir, INTRODUIRE.** Nous avons longtemps cherché un verbe convivial pour l'acte « donner sens », qui engloberait *et* l'appellation-définition *et* l'évocation, tout en respectant la conception quinienne de la définition (ce qui exclut le candidat « définir ») ainsi que notre souhait de ne pas user du champ lexical de la fixité (aucun individu n'a besoin d'être « fixé » pour *être* tout court). Le verbe « introduire » a fini par ~~s'introduire~~ apparaître dans nos pensées et s'y imposer naturellement.

Peu après, un étudiant nous parlait de notre collègue Christophe BERTAULT et de son [*Petit manuel de bonne rédaction*](#). Quelle ne fut notre (agréable) surprise d'y voir utilisé le verbe « introduire », tandis que son auteur poussait loin le champ lexical de « vivre/mourir » pour décrire les portées. Un bref échange mail courant 23 a rapidement écarté les stériles questions de paternité intellectuelle, M. BERTAULT souhaitant avant tout la libre circulation des idées pédagogiques – d'où qu'elles provinssent. C'est dans cet esprit que nous signalons sa page personnelle [CB], en particulier le chapitre [Raisonner, rédiger](#).

►► les deux commandements de la mathématique ◀◀

Notre jeu de preuve est un outil forgé pour *déceler, formuler* et *éviter* les deux principaux écueils de notre introduction. Sa grammaire a été développée suivant trois axes auxquels nous tenons fermement : *l'usage* de la pratique mathématique (du moins celle portée à notre connaissance), nos propres *guides intuitifs*, le respect enfin de *la langue*, du *sens*, si chères à Stella BARUK.

Nous espérons que la fidélité à ces trois axes aura permis de délivrer à nos étudiantes un outil *convivial*, les aidant à naviguer plus sûrement dans les eaux mathématiques afin de partir sereinement à la découverte d'autres terres.

I : *CE QUE TU AFFIRMES, TU L'AURAS PROUVÉ – SINON TU LE TAIRAS.*

II : *CE DONT TU PARLES, TU LUI AURAS DONNÉ SENS AU PRÉALABLE – TOI OU AUTRUI.*

Bibliographie

- [SB93] Stella BARUK, *C'est-à-dire — en mathématiques ou ailleurs*, 1993, éd° Seuil
p. 46 : « “en mathématiques”, [...] *c'est au départ*, face à la question qui lui est posée, et non à l'arrivée, c'est-à-dire avec la réponse qu'il fournit, qu'un enfant a déjà fait le *sacrifice du sens*. »
- [SB04] Stella BARUK, *si $7=0$ — quelles mathématiques pour l'école ?*, 2004, éd° Odile JACOB
p. 20 : « Proposer un énoncé sensé ou insensé importe peu puisque c'est *au départ* que ces élèves, grands ou petits, *ont renoncé au sens*. »
- [CB] Christophe BERTAULT, <https://christophebertault.fr/> (page web personnelle)
- [RC13] René CORI, *Langage mathématique* (notes de cours), Université Paris-Diderot, 18 juillet 2013, chapitre 1, pp. 12–13, disponible en ligne (mi mai 2022).
Semble avoir disparu de la toile en sept. 25 mais être repris assez fidèlement dans [ce texte](#) de Samy ABBES.
- [GNTM25] Laure GONNORD, Julien NARBOUX, Frédéric TRAN-MINH, *Yalep: Un environnement pour enseigner la preuve au Lycée* (slides), groupe IREM Lycée-Université (GLU), juin 25.
Voir également leur [dossier GitLab](#) consacré à Yalep.
- [FG36] Ferdinand GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*, 1936, éd. Félix ALCAN (Paris)
- [VH] Victor HUGO, *Choses vues*, partie « 1847 », librairie [OLLENDORF](#) (Paris, 1913)
- [II73] Ivan ILLICH, *Tools for Conviviality*, 1973, trad. française publiée aux éd° du Seuil (Paris)
- [LM24] Philippe LE MOULT, *Comprendre la démarche formaliste en mathématiques*, site de l'IREM Picardie, 2 septembre 2024
- Willard Van Orman QUINE, *Du point de vue logique — Neuf essais logico-philosophiques* (1980 : *From a logical point of view*), trad. sous la direction de Sandra LAUGIER, éd. VRIN (2003), bibliothèque des textes philosophiques
Notre citation apparaît p. 126 dans l'essai V : « Nouveaux Fondements pour la logique mathématique »
- [MS23] Marc SAGE, *Pour une grammaire conviviale en mathématique*, journées de l'APMEP 23, [atelier D1-21](#), 23 octobre 23
- Ludwig WITTGENSTEIN, *De la certitude*, 1949-51, trad. Danielle MOYAL-SHARROCK, éd° GALLIMARD (2006), bibliothèque de philosophie