

Combinatoire algébrique et géométrique des nombres d'HURWITZ

Marc SAGE

Thèse de doctorat
effectuée à l'université Paris-Est Marne-la-Vallée
sous la direction de Jean-Christophe NOVELLI

vendredi 22 juin 2012

Plan de l'exposé

- 1 Vers les nombres d'HURWITZ
 - Permutations et partitions
 - Revêtements ramifiés de la sphère
 - Le problème d'HURWITZ
- 2 Algorithmie et calcul des nombres d'HURWITZ
 - L'algèbre des permutations scindées
 - Calcul des nombres d'HURWITZ à une seule partition
 - Généralisations par M. KAZARIAN
- 3 Asymptotique des nombres d'HURWITZ
 - L'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$
 - Un cadeau de la géométrie algébrique
 - L'asymptotique des nombres d'HURWITZ

Outline

- 1 Vers les nombres d'HURWITZ
 - Permutations et partitions
 - Revêtements ramifiés de la sphère
 - Le problème d'HURWITZ
- 2 Algorithmie et calcul des nombres d'HURWITZ
 - L'algèbre des permutations scindées
 - Calcul des nombres d'HURWITZ à une seule partition
 - Généralisations par M. KAZARIAN
- 3 Asymptotique des nombres d'HURWITZ
 - L'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$
 - Un cadeau de la géométrie algébrique
 - L'asymptotique des nombres d'HURWITZ

Permutations

Une **bijection** est une correspondance bi-univoque entre deux ensembles d'objets, par exemple

$$\alpha \begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ a \ b \ c \ d \ e \\ \uparrow \end{array} \alpha^{-1} \quad \text{ou} \quad c \begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ 1 \ 4 \ 9 \ 16 \ 25 \\ \uparrow \end{array} c^{-1}$$

Permutations

Une **bijection** est une correspondance bi-univoque entre deux ensembles d'objets, par exemple

$$\alpha \begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ a \ b \ c \ d \ e \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \alpha^{-1} \end{array} \quad \text{ou} \quad c \begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ 1 \ 4 \ 9 \ 16 \ 25 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ c^{-1} \end{array}$$

Une **permutation** d'un ensemble E est une bijection entre E et lui-même, par exemple

$$\sigma \begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ 5 \ 6 \ 2 \ 0 \ 1 \ 3 \ 4 \ 7 \ 9 \ 8 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \sigma^{-1} \end{array}$$

Permutations

Une **bijection** est une correspondance bi-univoque entre deux ensembles d'objets, par exemple

$$\alpha \begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ a \ b \ c \ d \ e \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \alpha^{-1} \end{array} \quad \text{ou} \quad c \begin{array}{c} \downarrow \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \\ 1 \ 4 \ 9 \ 16 \ 25 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ c^{-1} \end{array}$$

Une **permutation** d'un ensemble E est une bijection entre E et lui-même, par exemple

$$\sigma \begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \\ 5 \ 6 \ 2 \ 0 \ 1 \ 3 \ 4 \ 7 \ 9 \ 8 \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \sigma^{-1} \end{array}$$

→ Une permutation **agit** en permutant les éléments.

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c} \sigma \downarrow \\ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\ \uparrow \sigma^{-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \rho \downarrow \\ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \uparrow \rho^{-1} \end{array}$$

se **composent** en

$$\begin{array}{c} \rho\sigma \downarrow \\ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array} \\ \uparrow (\rho\sigma)^{-1} \end{array}$$

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \sigma^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\
 \rho \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \rho^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}
 \end{array}$$

se **composent** en

$$\rho\sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow (\rho\sigma)^{-1}. \\
 \begin{array}{cccccccccc} 2 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \sigma^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\
 \rho \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \rho^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}
 \end{array}$$

se **composent** en

$$\rho\sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow (\rho\sigma)^{-1}. \\
 \begin{array}{cccccccccc} 2 & 0 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \sigma^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\
 \rho \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \rho^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}
 \end{array}$$

se **composent** en

$$\rho\sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow (\rho\sigma)^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 2 & 0 & 8 & ? & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \sigma^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\
 \rho \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \rho^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}
 \end{array}$$

se **composent** en

$$\rho\sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow (\rho\sigma)^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 2 & 0 & 8 & 7 & ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \sigma^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\
 \rho \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \rho^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}
 \end{array}$$

se **composent** en

$$\rho\sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow (\rho\sigma)^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 2 & 6 & 8 & 7 & 9 & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \sigma^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\
 \rho \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow \rho^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}
 \end{array}$$

se **composent** en

$$\rho\sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \uparrow (\rho\sigma)^{-1} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 2 & 6 & 8 & 7 & 9 & 5 & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 & \end{array} \uparrow \sigma^{-1} \\
 \rho \downarrow \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & \end{array} \uparrow \rho^{-1}
 \end{array}$$

se **composent** en

$$\rho\sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 2 & 6 & 8 & 7 & 9 & 5 & 6 & ? & ? & ? & \end{array} \uparrow (\rho\sigma)^{-1}.$$

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 & 8 \end{array} \uparrow \sigma^{-1} \\
 \rho \downarrow \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \uparrow \rho^{-1}
 \end{array}$$

se **composent** en

$$\rho\sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 6 & 8 & 7 & 9 & 5 & 6 & 1 & ? & ? \end{array} \uparrow (\rho\sigma)^{-1}.$$

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\
 \uparrow \sigma^{-1} \\
 \rho \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \\
 \uparrow \rho^{-1}
 \end{array}$$

se **composent** en

$$\rho\sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccccccc} 2 & 6 & 8 & 7 & 9 & 5 & 6 & 1 & 4 & ? \end{array} \\
 \uparrow (\rho\sigma)^{-1}$$

Composition

On peut faire **agir successivement** plusieurs permutations.
Par exemple :

$$\begin{array}{c}
 \sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \uparrow \sigma^{-1} \\
 \rho \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \uparrow \rho^{-1}
 \end{array}$$

se **composent** en

$$\rho\sigma \downarrow \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 8 & 7 & 9 & 5 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{array} \uparrow (\rho\sigma)^{-1}.$$

Cycles

En composant une permutation σ successivement avec elle-même, on obtient les **cycles** de la permutation σ .

Cycles

En composant une permutation σ successivement avec elle-même, on obtient les **cycles** de la permutation σ .

Par exemple,

$$\sigma \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\ \uparrow \\ \sigma^{-1} \end{array}$$

a pour cycles

?

?

?

?

?.

Cycles

En composant une permutation σ successivement avec elle-même, on obtient les **cycles** de la permutation σ .

Par exemple,

$$\sigma \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\ \uparrow \\ \sigma^{-1} \end{array}$$

a pour cycles

$$0 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 0$$

?

?

?

?.

Cycles

En composant une permutation σ successivement avec elle-même, on obtient les **cycles** de la permutation σ .

Par exemple,

$$\sigma \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\ \uparrow \\ \sigma^{-1} \end{array}$$

a pour cycles

$$0 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 0$$

$$1 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 1$$

?

?

?.

Cycles

En composant une permutation σ successivement avec elle-même, on obtient les **cycles** de la permutation σ .

Par exemple,

$$\sigma \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\ \uparrow \\ \sigma^{-1} \end{array}$$

a pour cycles

$$0 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 0$$

$$1 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 1$$

$$2 \mapsto 2$$

?

?.

Cycles

En composant une permutation σ successivement avec elle-même, on obtient les **cycles** de la permutation σ .

Par exemple,

$$\sigma \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\ \uparrow \\ \sigma^{-1} \end{array}$$

a pour cycles

$$0 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 0$$

$$1 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 1$$

$$2 \mapsto 2$$

$$7 \mapsto 7$$

?.

Cycles

En composant une permutation σ successivement avec elle-même, on obtient les **cycles** de la permutation σ .

Par exemple,

$$\sigma \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 7 & 9 & 8 \end{array} \\ \uparrow \end{array} \sigma^{-1}$$

a pour cycles

$$0 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 0$$

$$1 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 1$$

$$2 \mapsto 2$$

$$7 \mapsto 7$$

$$8 \mapsto 9 \mapsto 8.$$

Cycles et tableaux

$$2 \mapsto 2$$

$$7 \mapsto 7$$

$$8 \mapsto 9 \mapsto 8$$

$$0 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 0$$

$$1 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 1.$$

Cycles et tableaux

$$2 \mapsto 2$$

$$7 \mapsto 7$$

$$8 \mapsto 9 \mapsto 8$$

$$0 \mapsto 5 \mapsto 3 \mapsto 0$$

$$1 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 1.$$

On peut récrire la permutation sous forme d'un **tableau** où l'on entasse les cycles par longueur croissante :

2			
7			
8	9		
0	5	3	
1	6	4	

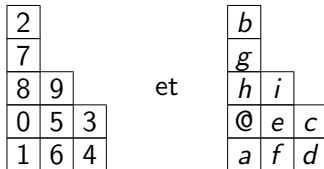
Conjugaison

On dit que deux permutations sont **conjuguées** s'il y a une bijection qui **re-étiquette** les éléments des deux ensembles sous-jacents.

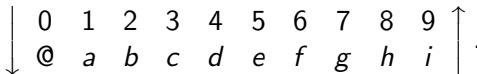
Conjugaison

On dit que deux permutations sont **conjuguées** s'il y a une bijection qui **re-étiquette** les éléments des deux ensembles sous-jacents.

Par exemple, les deux permutations



sont conjuguées par la bijection



Conjugaison et diagrammes de YOUNG

→ Deux permutations sont **conjuguées** si et seulement si les tableaux associés ont la même forme.

Conjugaison et diagrammes de YOUNG

→ Deux permutations sont **conjuguées** si et seulement si les tableaux associés ont la même forme.

Les classes de conjugaison sont donc indexées par les tableaux sans étiquettes ou **diagrammes de Young**.

Conjugaison et diagrammes de YOUNG

→ Deux permutations sont **conjuguées** si et seulement si les tableaux associés ont la même forme.

Les classes de conjugaison sont donc indexées par les tableaux sans étiquettes ou **diagrammes de Young**.

Par exemple, les deux permutations

2			
7			
8	9		
0	5	3	
1	6	4	

et

b			
g			
h	i		
@	e	c	
a	f	d	

ont une classe

de conjugaison codée par le même diagramme de YOUNG



Diagrammes de YOUNG et partitions


Un diagramme de YOUNG peut-être vu comme suite décroissante de ses longueurs de lignes (ses **parts** ou ses **cycles**).

On parle alors de **partition** ou de **type cyclique**.

Diagrammes de YOUNG et partitions

Un diagramme de YOUNG peut-être vu comme suite décroissante de ses longueurs de lignes (ses **parts** ou ses **cycles**).

On parle alors de **partition** ou de **type cyclique**.


Par exemple, le diagramme  correspond à la partition

$(3, 3, 2, 1, 1)$, chaque part dénombrant les cases d'une ligne et décrivant la longueur d'un cycle.

Diagrammes de YOUNG et partitions

Un diagramme de YOUNG peut-être vu comme suite décroissante de ses longueurs de lignes (ses **parts** ou ses **cycles**).

On parle alors de **partition** ou de **type cyclique**.

Par exemple, le diagramme  correspond à la partition

$(3, 3, 2, 1, 1)$, chaque part dénombrant les cases d'une ligne et décrivant la longueur d'un cycle.

Partitions

Étant donnée une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$ ou son diagramme de YOUNG associé, on définit :

Partitions

Étant donnée une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$ ou son diagramme de YOUNG associé, on définit :

- une **part** ou un **cycle** de λ par l'un des entiers $\lambda_i > 0$;

Partitions

Étant donnée une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$ ou son diagramme de YOUNG associé, on définit :

- une **part** ou un **cycle** de λ par l'un des entiers $\lambda_i > 0$;
- sa **longueur** $\ell(\lambda)$ par le nombre ℓ de parts ;

Partitions

Étant donnée une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$ ou son diagramme de YOUNG associé, on définit :

- une **part** ou un **cycle** de λ par l'un des entiers $\lambda_i > 0$;
- sa **longueur** $\ell(\lambda)$ par le nombre ℓ de parts ;
- sa **taille** $|\lambda|$ par le nombre de cases du diagramme ;

Partitions

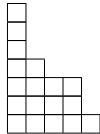
Étant donnée une partition $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell)$ ou son diagramme de YOUNG associé, on définit :

- une **part** ou un **cycle** de λ par l'un des entiers $\lambda_i > 0$;
- sa **longueur** $\ell(\lambda)$ par le nombre ℓ de parts ;
- sa **taille** $|\lambda|$ par le nombre de cases du diagramme ;
- sa **ramification** $\wp(\lambda) := |\lambda| - \ell(\lambda)$ comme la somme de ses parts décrémentées $\sum_{i=1}^{\ell} (\lambda_i - 1)$.

Un exemple

- partition : $(5, 4, 4, 2, 1, 1, 1)$ (multi-ensemble des parts) ;

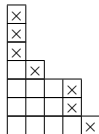
- diagramme de YOUNG associé :



- longueur : 7 parts (ou 7 lignes) ;

- taille : $5 + 4 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 = 18$ cases ;

- ramification :



$(4, 3, 3, 1)$



$$4 + 3 + 3 + 1 = 11 \text{ cases.}$$

Écriture multiplicative

La partition $(5,4,4,2,1,1,1)$ peut s'écrire multiplicativement

$$5 \ 4^2 \ 2 \ 1^3$$

où les **exposants** dénotent les **multiplicités** respectives des parts :

Écriture multiplicative

La partition $(5,4,4,2,1,1,1)$ peut s'écrire multiplicativement

$$5 \ 4^2 \ 2 \ 1^3$$

où les **exposants** dénotent les **multiplicités** respectives des parts :

- 1 part de taille 5 ;

Écriture multiplicative

La partition $(5,4,4,2,1,1,1)$ peut s'écrire multiplicativement

$$5 \ 4^2 \ 2 \ 1^3$$

où les **exposants** dénotent les **multiplicités** respectives des parts :

- 1 part de taille 5 ;
- 2 parts de taille 4 ;

Écriture multiplicative

La partition $(5,4,4,2,1,1,1)$ peut s'écrire multiplicativement

$$5 \ 4^2 \ 2 \ 1^3$$

où les **exposants** dénotent les **multiplicités** respectives des parts :

- 1 part de taille 5 ;
- 2 parts de taille 4 ;
- 1 part de taille 2 ;

Écriture multiplicative

La partition $(5,4,4,2,1,1,1)$ peut s'écrire multiplicativement

$$5 \ 4^2 \ 2 \ 1^3$$

où les **exposants** dénotent les **multiplicités** respectives des parts :

- 1 part de taille 5 ;
- 2 parts de taille 4 ;
- 1 part de taille 2 ;
- 3 parts de taille 1.

Écriture multiplicative

La partition $(5,4,4,2,1,1,1)$ peut s'écrire multiplicativement

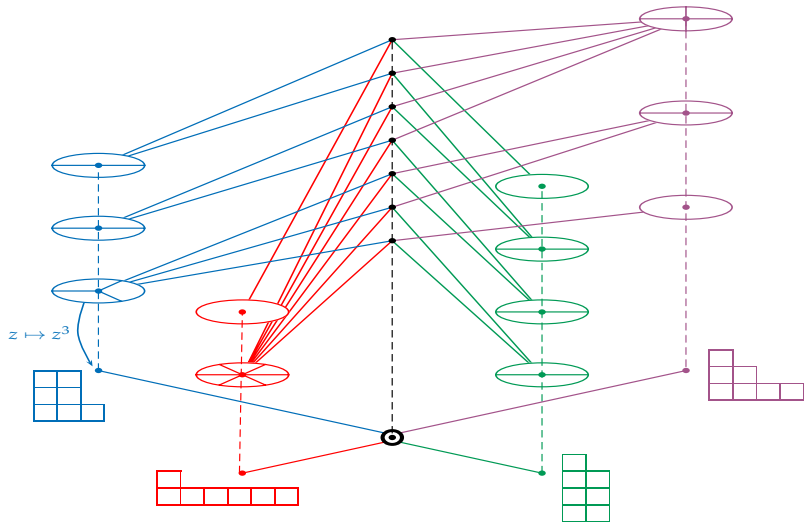
$$5 \ 4^2 \ 2 \ 1^3$$

où les **exposants** dénotent les **multiplicités** respectives des parts :

- 1 part de taille 5 ;
- 2 parts de taille 4 ;
- 1 part de taille 2 ;
- 3 parts de taille 1.

Le nombre $m_1(\lambda)$ de **points fixes** va jouer un rôle singulier.

Constellations



Factorisations transitives de l'identité

Étant donnés les types de ramification $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ du revêtement, la monodromie nous donne des permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ des n feuillets telles que

Factorisations transitives de l'identité

Étant donnés les types de ramification $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ du revêtement, la monodromie nous donne des permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ des n feuillets telles que

- le produit $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$ vaut la permutation identité Id de \mathfrak{S}_n ;

Factorisations transitives de l'identité

Étant donnés les types de ramification $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ du revêtement, la monodromie nous donne des permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ des n feuillets telles que

- le produit $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$ vaut la permutation identité Id de \mathfrak{S}_n ;
- le sous-groupe $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \rangle$ agit transitivement sur l'ensemble $[[1, n]]$ des feuillets ;

Factorisations transitives de l'identité

Étant donnés les types de ramification $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ du revêtement, la monodromie nous donne des permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ des n feuillets telles que

- le produit $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$ vaut la permutation identité Id de \mathfrak{S}_n ;
- le sous-groupe $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \rangle$ agit transitivement sur l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ des feuillets ;
- la permutation σ_i a pour type cyclique λ^i pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$.

Factorisations transitives de l'identité

Étant donnés les types de ramification $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ du revêtement, la monodromie nous donne des permutations $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ des n feuillets telles que

- le produit $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$ vaut la permutation identité Id de \mathfrak{S}_n ;
- le sous-groupe $\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k \rangle$ agit transitivement sur l'ensemble $[[1, n]]$ des feuillets ;
- la permutation σ_i a pour type cyclique λ^i pour tout $i \in [[1, k]]$.

Un tel k -uplet $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ est une **factorisation transitive de l'identité** dans le groupe \mathfrak{S}_n de type $(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k)$.

Genre d'une surface

Le **genre** d'une surface est son nombre g de trous : 0 pour la sphère, 1 pour le tore... On abrégera par la suite

$$g' := g - 1.$$

Genre d'une surface

Le **genre** d'une surface est son nombre g de trous : 0 pour la sphère, 1 pour le tore... On abrégera par la suite

$$g' := g - 1.$$

Sur une surface de genre g , dessinons :

- S sommets ;
- A arêtes reliant chacune deux sommets ;
- F faces polygonales obtenues en découpant la surface le long des arêtes.

Alors on a la **relation d'Euler** :

$$S - A + F = -2g'.$$

Illustration de la relation d'EULER

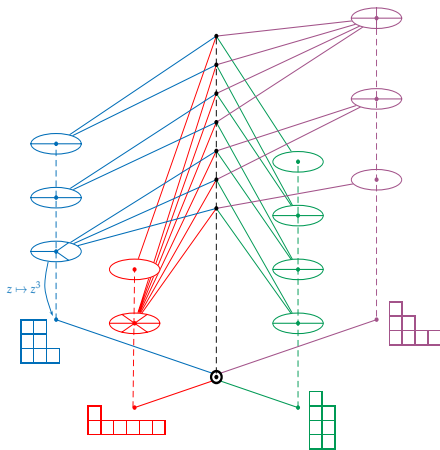
- Un cube dessiné sur la sphère :
 - la sphère est de genre nul, d'où $-2g' = -2$;
 - le cube possède 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces;
 - on a bien $8 - 12 + 6 = -2$.

Illustration de la relation d'EULER

- Un cube dessiné sur la sphère :
 - la sphère est de genre nul, d'où $-2g' = -2$;
 - le cube possède 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces;
 - on a bien $8 - 12 + 6 = -2$.
- Une chambre à air tranchée en un cylindre puis découpée le long de sa circonférence :
 - une chambre à air est un tore, de genre 1, d'où $2g' = 0$;
 - nous avons dessiné 1 sommet, 2 arêtes et nous récupérons 1 face (carrée);
 - on a bien $1 - 2 + 1 = 0$.

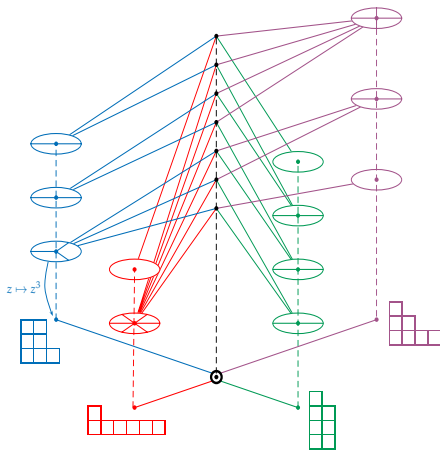
Genre d'une constellation

Le **graphe étoilé** sur la sphère est l'image d'un **graphe constellé** sur la surface revêtant où l'on a $S - A + F = -2g'$.



Genre d'une constellation

Le **graphe étoilé** sur la sphère est l'image d'un **graphe constellé** sur la surface revêtant où l'on a $S - A + F = -2g'$.

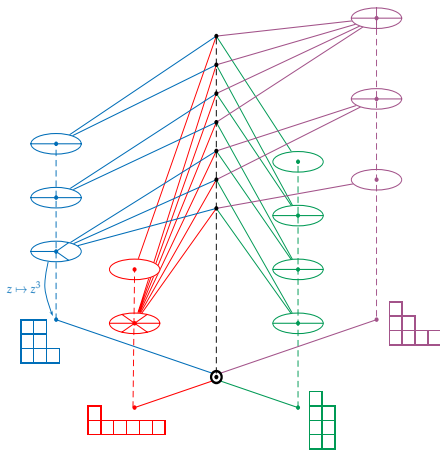


Puisque la sphère compte k points de ramification (ici 4), le graphe étoilé possède

- $k + 1$ sommets
- k arêtes
- 1 faces

Genre d'une constellation

Le **graphe étoilé** sur la sphère est l'image d'un **graphe constellé** sur la surface revêtant où l'on a $S - A + F = -2g'$.



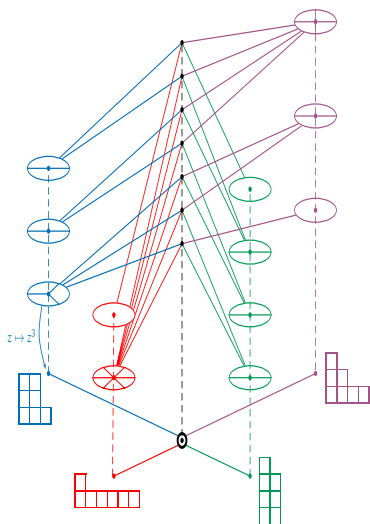
Puisque la sphère compte k points de ramification (ici 4), le graphe étoilé possède

- $k + 1$ sommets
- k arêtes
- 1 faces

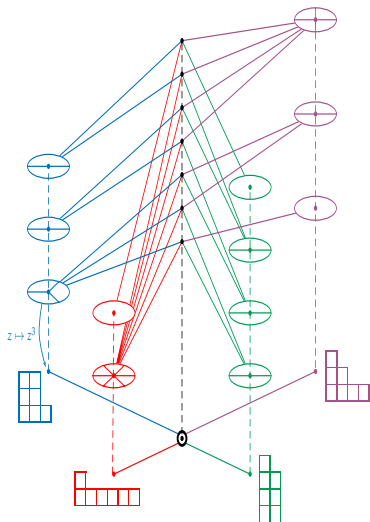
Comme le revêtement "relève"-t-il les nombres de sommets, arêtes et faces du graphe étoilé ?

Genre d'une constellation

- Un revêtement à n feuillets duplique sommets, arêtes et faces en n (ici 7) exemplaires, à l'exception des points de ramification.

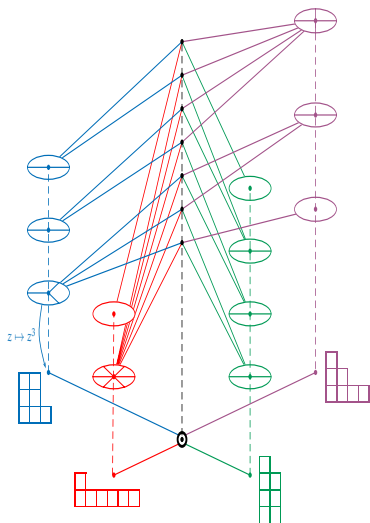


Genre d'une constellation



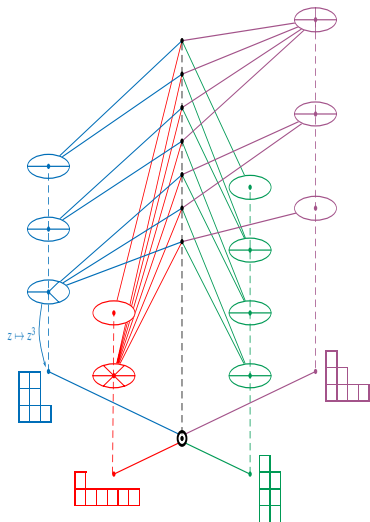
- Un revêtement à n feuillets duplique sommets, arêtes et faces en n (ici 7) exemplaires, à l'exception des points de ramification.
- Le nombre de sommets au-dessus d'un point de ramification vaut la longueur du **type cyclique** associé.

Genre d'une constellation



- Un revêtement à n feuillets duplique sommets, arêtes et faces en n (ici 7) exemplaires, à l'exception des points de ramification.
- Le nombre de sommets au-dessus d'un point de ramification vaut la longueur du **type cyclique** associé.
- Le graphe constellé possède donc $l(\lambda^1) + l(\lambda^2) + \dots + l(\lambda^k) + n$ sommets.

Genre d'une constellation



- Un revêtement à n feuillets duplique sommets, arêtes et faces en n (ici 7) exemplaires, à l'exception des points de ramification.
- Le nombre de sommets au-dessus d'un point de ramification vaut la longueur du **type cyclique** associé.
- Le graphe constellé possède donc $l(\lambda^1) + l(\lambda^2) + \dots + l(\lambda^k) + n$ sommets.
- Le graphe étoilé sur la sphère possède 1 face et k arêtes, donc le graphe constellé possède $n \times 1$ faces et $n \times k$ arêtes.

Genre d'une constellation

La relation d'Euler devient la **relation de Riemann-Hurwitz**

$$2n + 2g' = \wp(\lambda^1) + \wp(\lambda^2) + \cdots + \wp(\lambda^k).$$

Genre d'une constellation

La relation d'Euler devient la **relation de Riemann-Hurwitz**

$$2n + 2g' = \wp(\lambda^1) + \wp(\lambda^2) + \cdots + \wp(\lambda^k).$$

Fixons à présent deux entiers n , g et des partitions λ^i de n .

Pour **forcer** la relation ci-dessus, on rajoute dans le membre de droite des ramifications $\wp(\lambda)$ valant 1.

Cela se fait en rajoutant des partitions de type cyclique \square ,
c'est-à-dire des **transpositions**.

Genre d'une constellation

La relation d'Euler devient la **relation de Riemann-Hurwitz**

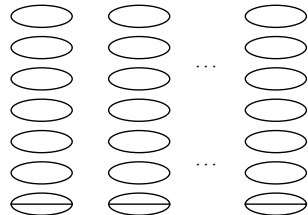
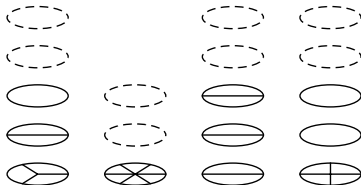
$$2n + 2g' = \wp(\lambda^1) + \wp(\lambda^2) + \dots + \wp(\lambda^k).$$

Fixons deux entiers n , g et des partitions λ^i **quelconques**.

Pour forcer la relation ci-dessus, on rajoute des **transpositions**.

Au préalable, on **complétera** au besoin les partitions λ^i jusqu'au degré n en rajoutant des parts égales à 1.

$n = 8$ sheets



T transpositions

Le problème d'HURWITZ

On se donne un degré $n \in \mathbb{N}$, un genre $g \in \mathbb{N}$ ainsi que des partitions $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ (abrégées en $\vec{\lambda}$) de tailles quelconques.

Le problème d'HURWITZ

On se donne un **degré** $n \in \mathbb{N}$, un **genre** $g \in \mathbb{N}$ ainsi que des **partitions** $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ (abrégées en $\vec{\lambda}$) de tailles quelconques.

On définit un **nombre de transpositions** par la formule de RIEMANN-HURWITZ : $T = T_n^g(\vec{\lambda}) := 2n + 2g' - \wp(\vec{\lambda})$.

Le problème d'HURWITZ

On se donne un **degré** $n \in \mathbb{N}$, un **genre** $g \in \mathbb{N}$ ainsi que des **partitions** $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ (abrégées en $\vec{\lambda}$) de tailles quelconques.

On définit un **nombre de transpositions** par la formule de RIEMANN-HURWITZ : $T = T_n^g(\vec{\lambda}) := 2n + 2g' - \wp(\vec{\lambda})$.

Le problème d'HURWITZ

Dénombrer dans $\mathfrak{S}_n^{k+T^g}$ les factorisations transitives de l'identité

- ayant pour types n -complétés $(\overline{\lambda^1}, \overline{\lambda^2}, \dots, \overline{\lambda^k}, \underbrace{\overline{\square}, \overline{\square}, \dots, \overline{\square}}_{T^g \text{ transpositions}})$;

Le problème d'HURWITZ

On se donne un **degré** $n \in \mathbb{N}$, un **genre** $g \in \mathbb{N}$ ainsi que des **partitions** $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^k$ (abrégées en $\vec{\lambda}$) de tailles quelconques.

On définit un **nombre de transpositions** par la formule de RIEMANN-HURWITZ : $T = T_n^g(\vec{\lambda}) := 2n + 2g' - \wp(\vec{\lambda})$.

Le problème d'HURWITZ

Dénombrer dans $\mathfrak{S}_n^{k+T^g}$ les factorisations transitives de l'identité

- ayant pour types n -complétés $(\overline{\lambda^1}, \overline{\lambda^2}, \dots, \overline{\lambda^k}, \underbrace{\overline{\square}, \overline{\square}, \dots, \overline{\square}}_{T^g \text{ transpositions}})$;
- avec, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, le choix de $m_1(\lambda^i)$ éléments parmi les points fixes de la permutation de type $\overline{\lambda^i}$ (permet de garder une trace de la complétion des λ^i).

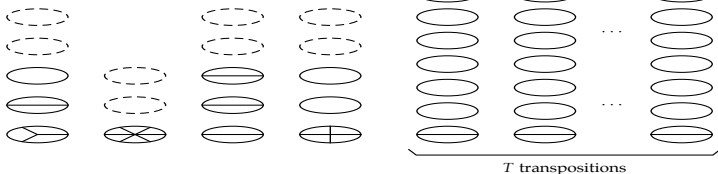
Le problème d'HURWITZ

Le problème d'HURWITZ

Dénombrer dans $\mathfrak{S}_n^{k+T^g}$ les factorisations transitives de l'identité

- ayant pour types n -complétés $(\overline{\lambda^1}, \overline{\lambda^2}, \dots, \overline{\lambda^k}, \underbrace{\overline{\square}, \overline{\square}, \dots, \overline{\square}}_{T^g \text{ transpositions}})$;
- avec, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, le choix de $m_1(\lambda^i)$ éléments parmi les points fixes de la permutation de type $\overline{\lambda^i}$ (permet de garder une trace de la complétion des λ^i).

$n = 8$ sheets



Nombres d'HURWITZ

- $h_n^g(\vec{\lambda})$ nombre d'HURWITZ **entier**

$$\frac{h_n^g(\vec{\lambda})}{\prod_{i=1}^k \binom{n - |\dot{\lambda}^i|}{m_1(\lambda^i)}} = \text{Card} \left\{ \left(\begin{array}{l} (\vec{\sigma}, \vec{\tau}) \in \mathfrak{S}_n^k \times \mathfrak{S}_n^{T^g} ; \\ \sigma_1 \cdots \sigma_k \tau_1 \cdots \tau_{T^g} = \text{Id}_{[[1, n]]} \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{\tau} \rangle \text{ transitif sur } [[1, n]] \\ \forall i \in [[1, k]], \text{ type } \sigma_i = \overline{\lambda^i} \\ \forall j \in [[1, T^g]], \text{ type } \tau_j = \overline{\square} \end{array} \right. \right\}$$

Nombres d'HURWITZ

- $h_n^g(\vec{\lambda})$ nombre d'HURWITZ **entier**

$$\frac{h_n^g(\vec{\lambda})}{\prod_{i=1}^k \binom{n - |\dot{\lambda}^i|}{m_1(\lambda^i)}} = \text{Card} \left\{ \left(\begin{array}{l} (\vec{\sigma}, \vec{\tau}) \in \mathfrak{S}_n^k \times \mathfrak{S}_n^{T^g}; \\ \sigma_1 \cdots \sigma_k \tau_1 \cdots \tau_{T^g} = \text{Id}_{[[1, n]]} \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{\tau} \rangle \text{ transitif sur } [[1, n]] \\ \forall i \in [[1, k]], \text{ type } \sigma_i = \overline{\lambda^i} \\ \forall j \in [[1, T^g]], \text{ type } \tau_j = \overline{\square} \end{array} \right. \right\}$$

- $h_n^g(\vec{\lambda})$ nombre d'HURWITZ **rationnel**

$$h_n^g(\vec{\lambda}) := \frac{h_n^g(\vec{\lambda})}{n! T_n^g(\vec{\lambda})!} \quad \text{rend les formules plus concises.}$$

Séries d'HURWITZ

On encode les nombres $h_n^g(\vec{\lambda})$ dans des **séries génératrices**

$$H^g(\vec{\lambda}) = \sum_{n \geq 1} h_n^g(\vec{\lambda}) t^n \in \mathbb{Q}[[t]];$$

Séries d'HURWITZ

On encode les nombres $h_n^{\vec{g}}(\vec{\lambda})$ dans des **séries génératrices**

$$H^{\vec{g}}(\vec{\lambda}) = \sum_{n \geq 1} h_n^{\vec{g}}(\vec{\lambda}) t^n \in \mathbb{Q}[[t]];$$

$$H(\vec{\lambda}) = \sum_{\vec{g} \geq 0} H^{\vec{g}}(\vec{\lambda}) u^{\vec{g}' - \frac{\wp(\vec{\lambda})}{2}} \in \mathbb{Q}[t, u] \left[\frac{1}{\sqrt{u}} \right].$$

(Décaler l'exposant de $u^{\vec{g}}$ clarifie les formules.)

Une normalisation commode

Le facteur $\boxed{\lambda} := \frac{1}{\#\text{Sym } \lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{\lambda_i!}$ intervient très souvent

→ on normalise h et H par ces facteurs

Une normalisation commode

Le facteur $\boxed{\lambda} := \frac{1}{\#\text{Sym } \lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{\lambda_i^{\lambda_i}}{\lambda_i!}$ intervient très souvent

→ on normalise h et H par ces facteurs :

$$\boxed{h}_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) := \frac{h_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)}{\boxed{\lambda^1} \boxed{\lambda^2} \dots \boxed{\lambda^k}}$$

$$\boxed{H}^g(\vec{\lambda}) := \sum_{n \geq 1} \boxed{h}_n^g(\vec{\lambda}) t^n.$$

Problématique d'HURWITZ

Ce dont l'on aimerait bien disposer concernant les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\vec{\lambda})$:

Problématique d'HURWITZ

Ce dont l'on aimerait bien disposer concernant les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\vec{\lambda})$:

- une formule générale ;

Problématique d'HURWITZ

Ce dont l'on aimerait bien disposer concernant les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\vec{\lambda})$:

- une formule générale ;
- des valeurs particulières ;

Problématique d'HURWITZ

Ce dont l'on aimerait bien disposer concernant les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\vec{\lambda})$:

- une formule générale ;
- des valeurs particulières ;
- des valeurs singulières ;

Problématique d'HURWITZ

Ce dont l'on aimerait bien disposer concernant les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\vec{\lambda})$:

- une formule générale ;
- des valeurs particulières ;
- des valeurs singulières ;
- un calcul algorithmique ;

Problématique d'HURWITZ

Ce dont l'on aimerait bien disposer concernant les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\vec{\lambda})$:

- une formule générale ;
- des valeurs particulières ;
- des valeurs singulières ;
- un calcul algorithmique ;
- des asymptotiques (en le degré n) (en le genre g) ;

Problématique d'HURWITZ

Ce dont l'on aimerait bien disposer concernant les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\vec{\lambda})$:

- une formule générale ;
- des valeurs particulières ;
- des valeurs singulières ;
- un calcul algorithmique ;
- des asymptotiques (en le degré n) (en le genre g) ;
- des bornes ;

Problématique d'HURWITZ

Ce dont l'on aimerait bien disposer concernant les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\vec{\lambda})$:

- une formule générale ;
- des valeurs particulières ;
- des valeurs singulières ;
- un calcul algorithmique ;
- des asymptotiques (en le degré n) (en le genre g) ;
- des bornes ;
- une idée de l'importance de l'ordre des partitions λ^i .

Outline

- 1 Vers les nombres d'HURWITZ
 - Permutations et partitions
 - Revêtements ramifiés de la sphère
 - Le problème d'HURWITZ
- 2 Algorithmie et calcul des nombres d'HURWITZ
 - L'algèbre des permutations scindées
 - Calcul des nombres d'HURWITZ à une seule partition
 - Généralisations par M. KAZARIAN
- 3 Asymptotique des nombres d'HURWITZ
 - L'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$
 - Un cadeau de la géométrie algébrique
 - L'asymptotique des nombres d'HURWITZ

Motivation du cadre algébrique

La spécificité du problème d'HURWITZ est la **transitivité**.

Motivation du cadre algébrique

La spécificité du problème d'HURWITZ est la **transitivité**.
Au lieu de se focaliser sur la transitivité, la voir comme un
défaut de transitivité nul.

Motivation du cadre algébrique

La spécificité du problème d'HURWITZ est la **transitivité**.
Au lieu de se focaliser sur la transitivité, la voir comme un **défaut de transitivité nul**.
→ Comment mesurer le défaut de transitivité ?

Motivation du cadre algébrique

La spécificité du problème d'HURWITZ est la **transitivité**.

Au lieu de se focaliser sur la transitivité, la voir comme un **défaut de transitivité nul**.

→ Comment mesurer le défaut de transitivité ?

défaut de	pour quel objet	codé par
primalité	entier	diviseurs
scindabilité	polynôme	racines
surjectivité	application	image
injectivité	morphisme	noyau
exactitude	complexe	homologie
transitivité	permutation	orbites

Motivation du cadre algébrique

La spécificité du problème d'HURWITZ est la **transitivité**.
La transitivité est codée par les **orbites**.

Motivation du cadre algébrique

La spécificité du problème d'HURWITZ est la **transitivité**.

La transitivité est codée par les **orbites**.

→ Comment décrire les orbites d'un *produit* de permutations ?

Motivation du cadre algébrique

La spécificité du problème d'HURWITZ est la **transitivité**.

La transitivité est codée par les **orbites**.

→ Comment décrire les orbites d'un *produit* de permutations ?

→ **Enrichir la structure** du monoïde \mathfrak{S}_n .

Motivation du cadre algébrique

La spécificité du problème d'HURWITZ est la **transitivité**.

La transitivité est codée par les **orbites**.

→ Comment décrire les orbites d'un *produit* de permutations ?

→ **Enrichir la structure** du monoïde \mathfrak{S}_n .

On enrichit une permutation en regroupant certains cycles

→ **permutation scindée**.

Permutations scindées

Une **permutation scindée** s'obtient en regroupant les cycles d'une permutation.

Permutations scindées

Une **permutation scindée** s'obtient en regroupant les cycles d'une permutation.

Par exemple, la permutation

2
7
8 9
0 5 3
1 6 4

 peut se scinder en

2
8 9

1 6 4

7
0 5 3

 ou

2
7
8 9

0 5 3
1 6 4

 ou

2

7

8 9

1 6 4

0 5 3

.

Cette dernière permutation est dite **totalelement scindée**.

Permutations scindées

Une **permutation scindée** s'obtient en regroupant les cycles d'une permutation.

Le regroupement se décrit par une **partition ensembliste**.

Partitions ensemblistes

On fixe pour toute la suite un ensemble E .

Une **partition ensembliste** de E est un ensemble de parties non vides de E (ses **parts**) dont la réunion vaut E .

On note \mathfrak{P}_E l'ensemble des partitions ensemblistes de E .

Partitions ensemblistes

On fixe pour toute la suite un ensemble E .

Une **partition ensembliste** de E est un ensemble de parties non vides de E (ses **parts**) dont la réunion vaut E .

On note \mathfrak{P}_E l'ensemble des partitions ensemblistes de E .

Deux exemples génériques :

- Tout groupe G agissant sur E fournit une **partition orbitale** $\text{Orb } G$;

Partitions ensemblistes

On fixe pour toute la suite un ensemble E .

Une **partition ensembliste** de E est un ensemble de parties non vides de E (ses **parts**) dont la réunion vaut E .

On note \mathfrak{P}_E l'ensemble des partitions ensemblistes de E .

Deux exemples génériques :

- Tout groupe G agissant sur E fournit une **partition orbitale** $\text{Orb } G$;
- Les cycles d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$ constituent également une **partition orbitale** $\text{Orb } \sigma$.

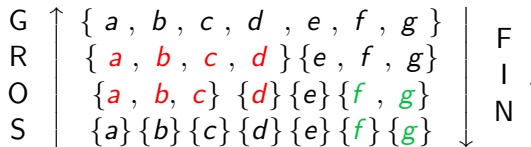
L'ordre de grossièreté

On considère deux partitions π et Π dans un \mathfrak{B}_E .

On dit que π est **plus fine que** Π si toute part de π est incluse dans une part de Π .

On dit que Π est **plus grossière que** π si toute part de Π est réunion de parts de π .

Exemple : du plus grossier (en haut) vers le plus fin (en bas)



Le monoïde \mathfrak{P}_E

L'ordre de grossièreté est **achevé** : toute partie admet un *supremum* et un *infimum*.

Le monoïde \mathfrak{P}_E

L'ordre de grossièreté est **achevé** : toute partie admet un *supremum* et un *infimum*. Par exemple :

$$\sup \left\{ \begin{array}{l} \{1, 2\} \{3, 4\} \{5, 6\} \\ \{1, 2, 3\} \{4\} \{5\} \{6\} \end{array} \right\} = \{1, 2, 3, 4\} \{5, 6\} .$$

Le monoïde \mathfrak{P}_E

L'ordre de grossièreté est **achevé** : toute partie admet un *supremum* et un *infimum*. Par exemple :

$$\sup \left\{ \begin{array}{l} \{1, 2\} \{3, 4\} \{5, 6\} \\ \{1, 2, 3\} \{4\} \{5\} \{6\} \end{array} \right\} = \{1, 2, 3, 4\} \{5, 6\}.$$

Des partitions dans \mathfrak{P}_E seront dites **entrelacées** si leur *supremum* vaut la partition la plus grossière $\{E\}$.

Le monoïde \mathfrak{P}_E

L'ordre de grossièreté est **achevé** : toute partie admet un *supremum* et un *infimum*. Par exemple :

$$\sup \left\{ \begin{array}{l} \{1, 2\} \{3, 4\} \{5, 6\} \\ \{1, 2, 3\} \{4\} \{5\} \{6\} \end{array} \right\} = \{1, 2, 3, 4\} \{5, 6\}.$$

Des partitions dans \mathfrak{P}_E seront dites **entrelacées** si leur *supremum* vaut la partition la plus grossière $\{E\}$.

Proposition (transitivité et entrelacement)

Soient (G_i) une famille de groupes agissant sur E . Alors le sous-groupe engendré $\langle G_i \rangle$ agit transitivement sur E si et seulement si les partitions orbitales $\text{Orb } G_i$ sont entrelacées.

Le monoïde \mathfrak{S}_E enrichi

Une permutation scindée de E peut être vue comme un couple $(\sigma) \in \mathfrak{S}_E \times \mathfrak{P}_E$ vérifiant au choix :

- les parts de π regroupent les cycles de σ ;
- la partition π est plus grossière que la partition orbitale $\text{Orb } \sigma$;
- chaque cycle de σ est inclus dans une part π_i de la partition π ;
- la permutation σ induit une permutation sur chacune des parts π_i de la partition π ;
- la permutation σ appartient au **sous-groupe de Young** $\mathfrak{S}_\pi := \prod_i \mathfrak{S}_{\pi_i}$.

Le monoïde \mathfrak{S}_E enrichi en \mathfrak{S}_E^s

Une permutation scindée dans E peut être vue comme un couple $(\sigma) \in \mathfrak{S}_E \times \mathfrak{P}_E$ tel que $\text{Orb } \sigma \leq \pi$.

Par exemple, la permutation scindée

2
7
8 9

0	5	3
1	6	4

 est codée par

- la permutation

2
7
8 9
0 5 3
1 6 4

 ;

- la partition ensembliste $\{2, 7, 8, 9\} \{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$.

Autre exemple : pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$, on peut réécrire sa **permutation totalement scindée** $\sigma^s := (\sigma_{\text{Orb } \sigma})$.

Retour aux factorisations transitives de l'identité

On vérifie que les permutations scindées de E forment un sous-**monoïde** \mathfrak{S}_E^s produit de $\mathfrak{S}_E \times \mathfrak{P}_E$

Retour aux factorisations transitives de l'identité

On vérifie que les permutations scindées de E forment un sous-**monoïde** \mathfrak{S}_E^s produit de $\mathfrak{S}_E \times \mathfrak{P}_E$, dans lequel \mathfrak{S}_E se plonge grâce à la partition la plus grossière :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_E \\ \sigma \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{monoïdes} \\ \hookrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \left. \begin{array}{l} \mathfrak{S}_E^s \\ \left(\begin{array}{c} \sigma \\ \{E\} \end{array} \right) \end{array} \right\} .$$

Retour aux factorisations transitives de l'identité

On vérifie que les permutations scindées de E forment un sous-**monoïde** \mathfrak{S}_E^5 produit de $\mathfrak{S}_E \times \mathfrak{P}_E$, dans lequel \mathfrak{S}_E se plonge grâce à la partition la plus grossière :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_E & \xrightarrow{\text{monoïdes}} & \mathfrak{S}_E^5 \\ \sigma & \longmapsto & \left(\begin{array}{c} \sigma \\ \{E\} \end{array} \right) \end{array} \right. .$$

Proposition (factorisations transitives de l'identité)

Des permutations σ_i dans \mathfrak{S}_E forment une factorisation transitive de l'identité si et seulement si le produit des σ_i^5 dans \mathfrak{S}_E^5 vaut $\left(\begin{array}{c} \text{Id} \\ \{E\} \end{array} \right)$.

Le problème d'Hurwitz va se coder naturellement dans les algèbres $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$ des permutations scindées.

Plus précisément, on se ramène aux **coefficients de structure** des **algèbres des invariants** $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]^{\mathfrak{S}_n}$.

→ Étudier l'algèbre \mathcal{A}_n des **classes de conjugaison** de \mathfrak{S}_n^s


- Étudier l'algèbre \mathcal{A}_n des **classes de conjugaison** de \mathfrak{S}_n^5
- indexée par les **partitions scindées**.

Partitions scindées

Une **partition scindée** s'obtient alternativement

- en regroupant *sans ordre* les parts d'une partition ;
- en effaçant les étiquettes d'une permutation scindée.

Par exemple :



On notera \mathfrak{P}_n^s l'ensemble des **multipartitions** de taille n
 (partitions scindées à n cases) et l'on écrira indifféremment

$$\Lambda \models n \iff \Lambda \text{ multipartition de } n \iff \Lambda \in \mathfrak{P}_n^s.$$

Conjugaison dans \mathfrak{S}_n^s

Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit par re-étiquetage sur les permutations scindées de taille n .

Proposition

Les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n^s sont indexées par les multipartitions de \mathfrak{M}_n^s .

(cf. les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_n sont indexées par les partitions de \mathfrak{M}_n)

On notera C_Λ la classe de conjugaison de type Λ

→ on peut écrire $\mathcal{A}_n := \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\Lambda \vdash n} \mathbb{Q}C_\Lambda$.

Retour au problème d'HURWITZ

Remarque : l'élément $\left(\begin{smallmatrix} \text{Id} \\ \llbracket 1, n \rrbracket \end{smallmatrix} \right)$ constitue la classe de type $((1^n))$.

Proposition (nombres d'HURWITZ et coefficients de structure)

Soient n et g deux entiers et $\lambda, \lambda^1, \dots, \lambda^k$ des partitions de n . Alors on a les égalités suivantes :

$$h_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = C_{((1^n))}^* \left[C_{\lambda^1 s} C_{\lambda^2 s} \cdots C_{\lambda^k s} C_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} s}^{T^g} \right];$$

$$h_n^g(\lambda) = \tilde{C}_{(\lambda)}^* \left[C_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} s}^{T^g} \right] \text{ dans } \mathcal{A}_n = \bigoplus_{\lambda \models n} \mathbb{Q} C_\lambda.$$

→ étudier l'action multiplicative dans l'algèbre \mathcal{A}_n de la classe $C_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} s}$ des transpositions totalement scindées.

Sur l'ordre des partitions λ^i

Propriété (caractère abélien de \mathcal{A}_n)

L'algèbre \mathcal{A}_n est une sous-algèbre abélienne de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n^s]$.

(cf. l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} \mathbb{Q}C_\lambda$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]$).

Corollaire (symétries des nombres d'HURWITZ)

Les nombres d'HURWITZ $h_n^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k)$ sont invariants par permutation des types cycliques λ^i .

Contenus et spectre de $C_{\square\square^s}$

Le **contenu** d'une case d'un diagramme YOUNG de coordonnées $\binom{x}{y} \in \mathbb{N}^2$ est la différence $x - y$.

Le **contenu** $c(\Lambda)$ d'une multipartition Λ est la somme des contenus de ses cases. Par exemple :

$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline -2 \\ \hline -1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad c(\Lambda) = 1$$

Proposition (réduction de $C_{\square\square^s}$)

La multiplication par la classe $C_{\square\square^s}$ est diagonalisable dans l'algèbre \mathcal{A}_n et a pour spectre le multi-ensemble $[c(\Lambda)]_{\Lambda \models n}$.

La formule de FROBENIUS pour $h_n^g(\lambda)$

Théorème (MÉLIOT, S., 2009)

Soit n et g deux entiers naturels et λ une partition de n . Alors

$$h_n^g(\lambda) = \sum_{\Lambda \models n} q(\Lambda) \times \Sigma^\lambda(\Lambda) \times c(\Lambda)^{T_n^g(\lambda)}$$

où $\begin{cases} q(\Lambda) \text{ est combinatoirement trivial} \\ \Sigma^\lambda(\Lambda) \text{ fait intervenir les caractères } \chi^{\Lambda_i} \end{cases}$.

Explicitement, on a $\Sigma^\lambda(\Lambda) = \sum_{\sigma \in \prod \mathfrak{S}_{\Lambda_i}}^{\text{type } \sigma = \lambda} \prod_{i=1}^{\lg \Lambda} \chi^{\Lambda_i}(\sigma_i)$ et

$$q(\Lambda) = \frac{(-1)^{\lg \Lambda - 1} (\lg \Lambda - 1)!}{\prod_{\alpha \vdash n} m_\alpha(\Lambda)!} \frac{\binom{n}{|\Lambda^1|, |\Lambda^2|, \dots, |\Lambda^{\lg \Lambda}|}}{\prod_i \prod_{\text{cases } \square} h^{\Lambda_i}(\square)}.$$

La formule de FROBENIUS pour $h_n^g(\lambda)$

Corollaire (asymptotique de $h_n^g(\lambda)$ en le genre)

On a pour toute partition $\lambda \vdash n$ l'équivalent suivant :

$$h_n^g(\lambda) \stackrel{g \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{z_\lambda} \binom{n}{2}^{2g' + n + \ell(\lambda)} \quad \text{où } z_\lambda := \frac{n!}{|C_\lambda|}.$$

On peut donner une interprétation probabiliste de ce résultat.

Calcul des nombres d'HURWITZ à une seule partition

Calcul de $h_n^g(\lambda)$ en complexité uniforme $O(C^n)$

Fixons un entier $n \geq 0$. Pour obtenir tous les nombres $h_n^g(\lambda)$ lorsque λ décrit les partitions de n (avec g générique), il suffit de

- écrire la matrice de $C_{\square\square^s}$ dans la base de l'algèbre \mathcal{A}_n formée des C_λ à l'aide d'un argument de **cut-and join** ;
- la diagonaliser connaissant son spectre :
- l'élever à la puissance $T_n^g(\lambda)$;
- récupérer le coefficient en C_{λ^s} .

Cet algorithme a une complexité

- du même ordre que $|\mathfrak{Y}_n^s| \simeq C^n$;
- uniforme en g et λ .

Table de valeurs

Voici les nombres $\frac{h_n^g(\lambda)}{n!}$ pour $|\lambda| = n \leq 5$ en fonction de g :

	1
	$1/2$
	9^g
	$\frac{9^{g+1}-1}{2}$
	$4^g \frac{9^{g+1}-1}{2}$
	$9^{g+1} (4^{g+1} - 1)$
	$4^g 3 \frac{9^{g+1}-1}{2}$
	$\frac{9^{g+1}-1}{2} (4^{g+1} - 1)$

Table de valeurs

Voici des nombres $\frac{h_5^g(\lambda)}{5!}$ pour $|\lambda| = 5$ en fonction de g :

	$25^{g+1} \frac{4^{g+1} - 1}{3}$
	$2^{2g+1} \left(\frac{2+25^{g+2}}{3} - 9^{g+2} \right)$
	$\frac{4^{g+1}}{3} + \frac{1}{9} \left(4^{g+1} 25^{g+2} - 16^{g+2} - \frac{25^{g+2} - 1}{2} \right)$
	$2^{2g+1} \frac{2^{25} + 5^{2g+5} - 4^{g+4} - 9^{g+3}}{3}$

Nombres de KAZARIAN

On fixe des multipartitions $\Lambda^1, \dots, \Lambda^k$ d'un même entier $n \geq 0$.
 On définit pour tout entier $T \geq 0$ des **nombres de Kazarian**

$$\mathfrak{k}_n \left(\Lambda^1, \dots, \Lambda^k \right) := C_{((1^n))}^* \left[C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k} \right],$$

$$\mathfrak{k}_n^T \left(\Lambda^1, \dots, \Lambda^k \right) := \mathfrak{k}_n \left(\Lambda^1, \dots, \Lambda^k, \underbrace{\square^s, \square^s, \dots, \square^s}_{T \text{ multipartitions}} \right).$$

Par exemple, on peut retrouver les nombres d'HURWITZ

$$\mathfrak{h}_n^g \left(\lambda^1, \dots, \lambda^k \right) = \mathfrak{k}_n^{T^g} \left(\vec{\lambda} \right) \left(\lambda^{1s}, \dots, \lambda^{ks} \right).$$

Séries de KAZARIAN

On normalise $k_n^T(\vec{\Lambda}) := \frac{1}{n!T!} \mathfrak{k}_n^T(\vec{\Lambda})$ et définit une **série de Kazarian** par

$$K(\vec{\Lambda}) := \sum_{n \geq 1}^{T \geq 0} k_n^T(\vec{\Lambda}) t^n u^{\frac{T}{2} - n}.$$

Proposition (KAZARIAN, S.)

On a l'égalité suivante où l'on somme sur toutes les multipartitions Λ réduites de hauteur inférieure à la somme des hauteurs des Λ^i :

$$K(\vec{\Lambda}) = \sum_{\Lambda} C_{\Lambda}^* [C_{\Lambda^1} C_{\Lambda^2} \cdots C_{\Lambda^k}] \times K(\Lambda).$$

On est ainsi ramené aux séries ayant *une seule* multipartition.

Séries de KAZARIAN et séries d'HURWITZ

Les séries de KAZARIAN sont des **polynômes** en les séries d'HURWITZ à une partition.

Proposition (KAZARIAN, S.)

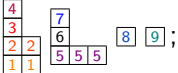
Pour toute multipartition Λ , on a l'égalité suivante :

$$z_{\Lambda} K(\Lambda) = \sum_{\gamma \in \pi_{\ell(\Lambda)}} z_{\nu^1} \cdots z_{\nu^{\ell(\gamma)}} H(\nu^1) \cdots H(\nu^{\ell(\gamma)}) \quad \text{où :}$$

- l'on somme sur les partitions γ entrelacées avec la partition des cycles de Λ ;
- les partitions ν^i s'obtiennent en regroupant les cycles de Λ selon la partition γ .


Un exemple

multipartition ;

numérotation standard ;

partition des cycles $\pi_{\ell(\Lambda)} = \{1,2,3,4\}\{5,6,7\}\{8\}\{9\}$;

une partition γ entrelacée : $\{1,4,8\}\{2,6,7\}\{3,5,9\}$;

regroupement des cycles selon γ : ;

contribution : $cst H \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) H \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right) H \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right)$.

Corollaire (KAZARIAN)

On a pour toutes partitions $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ et pour tout genre g

$$H^g(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \sum_{\Lambda, \gamma, \vec{g}} C_{\Lambda}^* [C_{\lambda^1_s} \cdots C_{\lambda^k_s}] \frac{z_{\nu^1} \cdots z_{\nu^{\ell(\gamma)}}}{z_{\Lambda}^{\ell(\gamma)}} \cdot$$

où l'on somme sur

- les multipartitions Λ réduites de hauteur $\leq \sum \wp(\lambda^i)$;
- les partitions ensemblistes $\gamma \in \mathfrak{P}_{\text{cy}} \Lambda$ entrelacées avec $\pi_{\ell(\Lambda)}$;
- les familles de genres $(g_i) \in \mathbb{N}^{\ell(\gamma)}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{\ell(\gamma)} \left(g'_i - \frac{\wp(\nu^i)}{2} \right) = g' - \frac{\wp(\vec{\lambda})}{2} ;$$

- pour tout $i \in \llbracket 1, \ell(\gamma) \rrbracket$ les partitions $\nu^i := (\# [\pi_{\sigma_{\Lambda}}]_c)_{c \in \gamma_i}$.

D. ZVONKINE a montré que tous les nombres d'HURWITZ sont de la forme

$$h_n^{\vec{\lambda}} = \frac{n^n}{n!} (L(n) + P(n) \mathfrak{L}_n) \quad \text{avec}$$

- L un polynôme de LAURENT ;
- P un polynôme usuel ;
- $\mathfrak{L}_n := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n^{\downarrow i}}{n^i} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{j}{n}\right)$.

Conjecture (ZVONKINE)

En genre nul, les nombres d'HURWITZ sont tous de de la forme

$$h_n^0(\vec{\lambda}) = L_{\vec{\lambda}}(n) \frac{n^n}{n!}$$

où $L_{\vec{\lambda}}$ est un polynôme de LAURENT.

La conjecture de D. ZVONKINE s'étend aux nombres de KAZARIAN.

Vu que les séries $K(\vec{\Lambda})$ sont des combinaisons linéaires en les séries $K(\Lambda)$, cette conjecture se réduit au cas d'une seule multipartition.

Conjecture (KAZARIAN, ZVONKINE)

En genre nul, les nombres $k_n^{T_n^0(\Lambda)}(\Lambda)$ sont tous de la forme

$$k_n^{T_n^0(\Lambda)}(\Lambda) = L(n) \frac{n^{n-\text{ht } \Lambda - 3}}{(n - \|\Lambda\|)!}$$

où L est un polynôme de LAURENT entier de degré $\text{cy } \Lambda - \lg \Lambda$.

Testée par M. KAZARIAN sur des centaines d'exemples.

Outline

- 1 Vers les nombres d'HURWITZ
 - Permutations et partitions
 - Revêtements ramifiés de la sphère
 - Le problème d'HURWITZ
- 2 Algorithmie et calcul des nombres d'HURWITZ
 - L'algèbre des permutations scindées
 - Calcul des nombres d'HURWITZ à une seule partition
 - Généralisations par M. KAZARIAN
- 3 Asymptotique des nombres d'HURWITZ
 - L'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$
 - Un cadeau de la géométrie algébrique
 - L'asymptotique des nombres d'HURWITZ

Les séries de Cayley Y et Z

Un arbre de CAYLEY est un arbre muni d'une permutation de ses sommets. Il y a n^{n-2} arbres de CAYLEY à n sommets.

Les séries génératrices exponentielles associées aux arbres de CAYLEY 1- ou 2- enracinés sont

$$Y := \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n \quad \text{et} \quad Z := \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} t^n.$$

On définit dans l'algèbre $\mathbb{Q}[[t]]$ un opérateur différentiel et un pseudo-inverse par $D := t \frac{\partial}{\partial t}$ et $D^{-1} : \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} t^n$.

Calcul dans $\mathbb{Q}[Y, Z]$

Détruire la racine d'un arbre enraciné donne une forêt d'arbres enracinés, d'où $Y = te^Y$ et la linéarisation

$$YZ = Z - Y.$$

Terme général d'une série de $\mathbb{Q}[Y, Z]$

Toute série de $\mathbb{Q}[Y, Z] = \mathbb{Q}(D)[Z] + \mathbb{Q}(D)[Z^2]$ a un terme général de la forme

$$\frac{L(n)n^n + P(n)A_n}{n!} \quad \text{avec} \quad \frac{A_n}{n!} := [Z^2]_t^n = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n^k}{k!}.$$

Compacité

- on a un changement de variable

$$t = Ye^{-Y} = \frac{Z}{1+Z} e^{-\frac{Z}{1+Z}} \in Z\mathbb{Q}[[Z]] ;$$

- un polynôme de degré d vaut son tronqué de TAYLOR à l'ordre d ;

→ une série de $\mathbb{Q}[Z]$ est entièrement déterminée par ses premières valeurs.

Proposition (compacité du calcul dans $\mathbb{Q}[Z]$)

Si une série $S \in \mathbb{Q}[[t]]$ est un polynôme de degré d en Z , alors

$$S = \text{Trunc}_{\deg_Z=d} S \left(t \leftarrow \frac{Z}{1+Z} e^{-\frac{Z}{1+Z}} \right).$$

Asymptotique dans $\mathbb{Q}[Y, Z]$

L'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$ est propice à l'étude asymptotique.

Proposition (asymptotique dans $\mathbb{Q}[Z]$)

On a les asymptotiques suivantes

$$\forall i, k \geq 1, \quad \begin{array}{l} \text{Coef}_{t^n} \left[\frac{Y^i}{i} \right] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C_{-1} \frac{e^n}{n} \sqrt{n}^{-1} \\ \text{Coef}_{t^n} \left[Z^k \right] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} C_k \frac{e^n}{n} \sqrt{n}^k \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{C_{-1}} = \sqrt{2\pi} \\ \frac{1}{C_k} = \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}} \end{array}$$

→ L'asymptotique d'une série de $\mathbb{Q}[Y, Z]$ est déterminée par son terme dominant en Z .

Les séries d'HURWITZ dans l'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$

Proposition (ZVONKINE, 2003)

Toutes les séries $H^g(\vec{\lambda})$ appartiennent à l'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$
(exception : $H^1(\emptyset) = D^{-1}Z^2$).

On a des expressions explicites en genre 0 et 1.

Proposition (KAZARIAN) (Les séries $H^0(\lambda)$ et $H^1(\lambda)$)

Soit λ une partition. Les séries d'HURWITZ $H^0(\lambda)$ et $H^1(\lambda)$ ne dépendent que des taille et longueur de λ .

Quelques séries d'HURWITZ en genre 0

Genre **sphérique** : (on abrège $a = |\lambda|$ et $\ell = \ell(\lambda)$)

$$\mathbb{H}^0(\emptyset) = Y - \frac{3}{2} \left(\frac{Y^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{Y^3}{3} \right)$$

$$\mathbb{H}^0(\ell = 1) = \frac{1}{a} \left(\frac{Y^a}{a} - \frac{Y^{a+1}}{a+1} \right)$$

$$\mathbb{H}^0(\ell = 2) = \frac{Y^a}{a}$$

$$\mathbb{H}^0(\ell \geq 3) = D^{\ell-3} (Y^{a-1} Z)$$

Quelques séries d'HURWITZ en genre 1

Genre **torique** : (on abrège $a = |\lambda|$ et $\ell = \ell(\lambda)$)

$$24\mathbb{H}^1(\emptyset) = D^{-1}Z^2$$

$$24\mathbb{H}^1(\square) = Z^2$$

$$24\mathbb{H}^1(\square\square) = Z^2$$

$$24\mathbb{H}^1(\square\square\square) = Z^2 - Y^2$$

$$24\mathbb{H}^1((d+1)) = Z^2 - Y^2 - 2Y^3 - 3Y^4 - \dots - (d-1)d$$

$$24\mathbb{H}^1(\lambda) = D^{\ell-1}(Y^{a-1}Z^2) + (a-1)D^{\ell-1}(Y^{a-1}Z) - \sum_{x=2}^{\ell} (x-2)! e_x(\lambda) D^{\ell-x}(Y^{a-x}Z^x)$$

Preuve de D. ZVONKINE par récurrence et formule **implicite**.

Pour récolter l'asymptotique (= déterminer coefficient dominant en Z), on va **expliciter** la formule de récurrence.

Un détour par la **géométrie algébrique** va jeter la lumière sur le début de cette récurrence.

La formule d'EKEDAHL-LANDO-SHAPIRO-VAINSHTEIN

Soit $\binom{g}{n} \in \mathbb{N}^2$ autre que $\binom{0}{0} \binom{0}{1} \binom{0}{2} \binom{1}{0}$ (couple **stable**).
On lui associe une algèbre commutative graduée munie

- de n éléments ψ_1, \dots, ψ_n homogènes de degré 1 ;
- de g éléments η_1, \dots, η_g homogènes de degrés 1, 2, ..., g ;
- d'une forme linéaire \int_n^g annulant les composantes de degré autre que $3g' + n$.

Théorème (ELSV, 2001)

Soit λ une partition de n de longueur ℓ . Si $\binom{g}{\ell}$ est stable, alors

$$\mathbb{H}_n^g(\lambda) = \int_{\ell}^g \frac{1 - \eta_1 + \eta_2 - \dots + (-1)^g \eta_g}{(1 - \lambda_1 \psi_1) \cdots (1 - \lambda_{\ell} \psi_{\ell})}.$$

Corollaire (HURWITZ...)

Pour toute partition λ d'un entier $\leq n$ de longueur $\ell \geq 1$, on a

$$\mathbb{H}_n^0(\lambda) = \frac{n^{n-|\lambda|-3}}{(n-|\lambda|)!} \stackrel{\lambda \vdash n}{=} n^{\ell-3}$$

$$\mathbb{H}_n^1(\lambda) = \frac{1}{24} \left(n^\ell - n^{\ell-1} - \sum_{i=2}^{\ell} (i-2)! e_i(\lambda) n^{\ell-i} \right)$$

Corollaire (KAZARIAN) (les séries $H^g(\lambda)$ sont dans $\mathbb{Q}[Y, Z]$)

Pour tout couple $\binom{g}{\ell}$ stable, on a

$$\mathbb{H}^g(\lambda) = Y^a (1+Z)^{2g'+\ell} P^g(\lambda)$$

où $P^g(\lambda)$ est un polynôme en Z de degré $3g' + \ell$.

De la formule de KAZARIAN découle directement l'asymptotique des $h_n^g(\lambda)$ via l'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$.

Corollaire (ZVONKINE, 2004) (asymptotique des $h_n^g(\lambda)$)

Il y a une famille $(c_g) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que, à g et λ fixé, on a

$$h_n^g(\lambda) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} c_g \frac{e^n}{n} n^{\frac{5}{2}g'} n^{\ell(\lambda)}.$$

Quelques valeurs : $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $c_1 = \frac{1}{48}$ $c_2 = \frac{7}{4320} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$...

La formule de KAZARIAN donne immédiatement par compacité un algorithme pour calculer les nombres de HURWITZ ayant une partition.

Corollaire (S. 2011) (algorithme pour calculer les $h_n^g(\lambda)$)

Soit $g \geq 0$ un genre et λ une partition de taille a et longueur ℓ .
 Pour obtenir la série $H^g(\lambda)$, il suffit de :

- calculer les nombres $h_n := \overline{h}_{n-a}^g(\lambda)$ pour $n \in \llbracket 0, 3g' + \ell \rrbracket$;
- tronquer à l'ordre $d := 3g' + \ell$ la série $\frac{\sum_{n=0}^d h_n t^n}{\left[\sum_{n=0}^d \frac{n^n}{n!} t^n \right]^{a+\ell+2g'}}$;
- effectuer dans la troncature obtenue la substitution $t \leftarrow \frac{Z}{1+Z} e^{-\frac{Z}{1+Z}}$;
- tronquer la série en Z obtenue à l'ordre d ;
- multiplier par $Y^a (Z + 1)^{2g'+\ell}$

On explicite la formule de D. ZVONKINE utilisée dans la récurrence sur le nombre de partitions.

Théorème (ZVONKINE, S. 2010) (formule de réduction)

Soit $g \geq 0$ et k partitions $\vec{\lambda} = (\lambda, \mu, \lambda^3, \lambda^4, \dots, \lambda^k)$. On a alors :

$$H^g(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \lambda^3, \dots, \lambda^k) = \sum_{\vec{\nu}, \vec{g}} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \sum_{\vec{\lambda}^3, \dots, \vec{\lambda}^k} \prod_{j=1}^N H^{g_j}(\nu^j, \lambda^{3,j}, \dots, \lambda^{k,j})$$

où les nombres $f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}$ sont des coefficients de structure de l'algèbre $\mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_n}$ et où l'on somme sur

- les N -uplets $\begin{pmatrix} \vec{\nu} \\ \vec{g} \end{pmatrix}$ tels que $\sum \left(g_j' - \frac{\wp(\nu^j)}{2} \right) = g' - \frac{\wp(\lambda, \mu)}{2}$;
- les familles de partitions $\vec{\lambda}^i = (\lambda^{i,1}, \dots, \lambda^{i,N})$ dont la concaténation $\lambda^{i,1} \sqcup \dots \sqcup \lambda^{i,N}$ vaut λ^i .

Les séries $H^0((a), (b))$

Cette formule de réduction permet d'effectuer un pas vers l'explicitation des séries $H^0(\lambda, \mu)$ dans le cas de deux cycles
 → utilise une **déformation** de l'algèbre $\mathbb{Q}[Y, Z]$.

Corollaire (S., 2011) (les séries $H^0((a), (b))$)

Soit $a, b \geq 2$ deux entiers et c leur somme. Alors

$$H^0((a), (b)) = \frac{a^a b^a}{a! b!} \frac{Y^c}{c} + \sum_{0 \leq s \leq a, b} \kappa_{a, b}^s Y^{c-s}$$

où les coefficients $\kappa_{a, b}^s$ s'expriment comme sommes triples :

$$\kappa_{a, b}^s = \sum_{\substack{l, m, n, o \geq 0 \\ m+n+o=s \\ 1 \leq l+s \leq a, b}} \frac{(-1)^{l+m+n}}{l! m! n! o!} (l-n) \frac{(c-l-m-n)^{c-2l-m-1}}{(c-2l-m)!}.$$

Sans les genres et avec seulement deux partitions, la formule de réduction s'allège et rappelle un corollaire de M. KAZARIAN :

$$H(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \stackrel{\text{ZVONKINE}}{=} \sum_{\vec{\nu}} \frac{f_{\lambda, \mu}^{\vec{\nu}}}{N!} \times H(\nu^1) \dots H(\nu^{\ell(\gamma)})$$

$$H(\lambda, \mu) \stackrel{\text{KAZARIAN}}{=} \sum_{\Lambda, \gamma} C_{\Lambda}^* [C_{\lambda^s} C_{\mu^s}] \frac{z_{\nu^1} \dots z_{\nu^{\ell(\gamma)}}}{z_{\Lambda}^{\ell(\gamma)}} \times H(\nu^1) \dots H(\nu^{\ell(\gamma)}) .$$

→ la formule de M. KAZARIAN permet de court-circuiter la récurrence de D. ZVONKINE.

→ mais pas le résultat concernant l'asymptotique.

Théorème (S., 2010)

Du point de vue du terme dominant en Z , les séries $H^g \left(\vec{\lambda} \right)$ sont inchangées par concaténation des partitions.

Corollaire (S., 2010) (asymptotique des nombres de HURWITZ)

Pour toutes partitions $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ et tout genre $g \geq 0$, on a l'asymptotique suivante pour une certaine constante c_g :

$$\begin{aligned} \mathbb{h}_n^g \left(\lambda^1, \dots, \lambda^k \right) &\stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{h}_n^g \left(\lambda^1 \sqcup \dots \sqcup \lambda^k \right) \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} c_g \frac{e^n}{n} n^{\frac{5}{2}g'} n^{\ell(\lambda^1) + \dots + \ell(\lambda^k)}. \end{aligned}$$

Les constantes c_g peuvent être déterminées *via* un (gros) théorème de M. KONTSEVITCH par l'une des quatre caractérisations suivantes.

Théorème (ZVONKINE, S., 2011) (les constes asymptotiques c_g)

- (Explicitation via les chevrons de Witten)**

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad c_1 = \frac{1}{48}, \quad \text{et} \quad c_{g \geq 2} = \frac{\langle \tau_2^{3g'} \rangle}{(3g')!} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}g'\right) 2^{\frac{5}{2}g'}}.$$

- (Récursion quadratique)**

Posons $\alpha_{g'} = c_g \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) 2^{\frac{5g-1}{2}}$ pour tout genre $g \geq 0$. Les nombres rationnels $\alpha_{k \geq -1}$ vérifient alors la formule récursive pour tout $g \geq 0$:

$$\alpha_g = \frac{25g^2 - 1}{12} \alpha_{g'} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{p, q \geq 0 \\ p+q=g'}} \alpha_p \alpha_q \quad \text{avec} \quad \alpha_{-1} := -1.$$

Théorème (ZVONKINE, S., 2011) (les constes asymptotiques c_g)

- (Équation de Painlevé I)

La fonction $u(t) := \sum_{g \geq 0} c_g \frac{\Gamma(\frac{5g-1}{2})}{t^{\frac{5g-1}{2}}} = \sum_{g \geq 0} \frac{\alpha_{g'}}{(2t)^{\frac{5g-1}{2}}}$ de $\mathbb{Q}\sqrt{t} + \mathbb{Q}\left[\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]\right]$ vérifie l'équation de PAINLEVÉ I :

$$u(t)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} = 2t.$$

- (Explicitation via les constantes t_g de Bender-Gao-Richmond)

$$c_g = \sqrt{2}^{g-3} t_g.$$

Perspectives

- avancer sur la conjecture de M. KAZARIAN ;
- éclaircir combinatoirement la récursion quadratique des c_g ;
- finir le calcul de la série $H^0((a), (b))$;
- aborder les conjectures de P.-L. MÉLIOT sur les bornes des nombres d'HURWITZ.