Introduction au domaine de recherche

Marc SAGE

9 octobre 2009

Table des matières

1 Présentation du problème

Fin dix-neuvième siècle, Hurwitz se posait le problème suivant. On se donne une classe de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$, autrement dit une partition μ de n, et on cherche le nombre $h_{n;\mu}$ de k-uplets $(\sigma, \tau_2, ..., \tau_k)$ où σ se décompose cycliquement selon μ, où les τ_i sont des transpositions, et où le groupe $\langle \sigma, \tau_2, ..., \tau_k \rangle$ agit transitivement sur $\{1, ..., n\}$, avec k minimal. Il nous a légué la formule suivante (1891)

$$\frac{h_{n;\mu=(d_1,...,d_p)}}{(n+p-2)!} = \frac{1}{|\mathrm{Aut}\,\mu|} \frac{d_1^{d_1}...d_p^{d_p}}{d_1!...d_p!} n^{p-3}.$$

Nous cherchons à étudier ces nombres, définis de manière plus générale, appelés *nombres de Hurwitz*.

Afin de poser le problème de manière précise, nous allons présenter le langage des constellations et des revêtement ramifiés de la sphère de Riemann[1].

1.1 Constellations

Définitions.

Une constellation *de longueur k et de degré n est une suite $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ de k permutations d'un ensemble E à n éléments telle que, d'une part le groupe engendré $\langle \sigma_1, ..., \sigma_k \rangle$ agit transitivement sur E, d'autre part le produit $\sigma_1...\sigma_k$ vaut l'identité :*

$$\sigma_1...\sigma_k = \mathrm{Id}\,.$$

On parle aussi de k-constellation.

Deux constellations $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ et $(\sigma'_1, ..., \sigma'_k)$ sur des ensembles E et E' sont isomorphes *s'il y a une bijection $f : E \longrightarrow E'$ telle que $\sigma'_i = f\sigma_i f^{-1}$.*

Le passeport *d'une constellation $(\sigma_1, ..., \sigma_k)$ de degré n est la donnée $(\mu_1, ..., \mu_k)$ des partitions de n associées aux classes de conjugaison des σ_i.*

Le degré de ramification d'une permutation σ se décomposant en produit de p cycles γ_i est

$$r(\sigma) := n - p = \sum_{i=1}^{p} (l(\gamma_i) - 1)\,.$$

Le degré total de ramification *d'une constellation est l'entier*

$$r(\sigma_1, ..., \sigma_k) := r(\sigma_1) + ... + r(\sigma_k)$$

Le *problème de Hurwitz* revient à trouver le nombre de constellations possédant un passeport fixé, avec poids $\frac{1}{n!}$. Un tel nombre est appelé *nombre de Hurwitz*.

1.2 Revêtements ramifiés

En physique, les nombres de Hurwitz se manifestent lors de l'étude des revêtements ramifiés de la sphère et de leurs applications aux modèles de gravité en deux dimensions[2].

Nous supposons que le lecteur possède quelques rudiments de géométrie différentielle complexe.

Définition.

Soit X une surface et n un entier ≥ 1. On se donne une projection continue $f : X \twoheadrightarrow \mathbb{S}$ et a un point sur la sphère en bas. On suppose qu'il y a un disque en bas contenant a dont la préimage est homéomorphe à p_a disques ouverts. On impose de plus que, sur chacun de ces p_a disques, f soit (à biholomorphisme près) de la forme $z \mapsto z^{d_i}$ avec

$$d_1 + ... + d_{p_a} = n.$$

[1] Nous ne saurions trop conseiller l'ouvrage [7] pour plus de détails concernant les graphes plongés sur des surfaces et leurs applications.

[2] On pourra consulter la partie 5 de [11] pour plus de détails.

On dit alors que f (ou par abus X) est un revêtement ramifié *de $\mathbb{S}$ à n feuillets. L'entier n est le* degré *du revêtement f et est noté* $\deg f$. *Les partitions $d_1 + ... + d_{p_a} = n$ forment le* passeport *du revêtement.*

La préimage d'un point a est usuellement appelée fibre *au-dessus de a.*

Les centres des disques au-dessus de a sont appelés points critiques *d'ordre d_i. Les points a où $p_a < n$ sont les* valeurs critiques *ou* points de ramification*, leur* degré de ramification *étant défini par la somme*

$$r(a) := n - p_a = (d_1 - 1) + ... + (d_{p_a} - 1).$$

Les autres valeurs de la sphère sont des valeurs non critiques *; on peut aussi les considérer comme des valeurs critiques de degré de ramification nul.*

En notant a_1, ..., a_k les points de ramification, le degré total de ramification *du revêtement est la somme*

$$r(f) := r(a_1) + ... + r(a_k).$$

Les n disques au-dessus des valeurs non critiques sont les feuillets *du revêtement.*

Deux revêtements $f : X \longrightarrow \mathbb{S}$ et $g : Y \longrightarrow \mathbb{S}$ sont isomorphes *s'il y a un homéomorphisme $\varphi : X \longrightarrow Y$ au-dessus de $\mathbb{S}$,* i.e. *tel que $g = f \circ \varphi$.*

Par exemple, toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann donne lieu à un revêtement ramifié de la sphère.

1.3 Monodromie

Comment faire le lien entre ces deux notions ? C'est là qu'intervient la monodromie.

Soit un revêtement de la sphère ramifié en a_1, ..., a_k. Prenons un autre point a sur la sphère et considérons le graphe étoilé en a vers les a_i. Modifions légèrement ce graphe pour obtenir un lacet : autour de chaque point de ramification, on fait faire un petit cercle dans le sens trigonométrique avant de revenir en a selon le même chemin. Cela nous donne un lacet γ_i basé en a. On impose également que γ_1, ..., γ_k partent de a dans le sens trigonométrique. Le produit $\gamma_1 ... \gamma_k$ est alors un lacet basé en a qui entoure les points de ramification ; comme nous sommes sur une sphère, ce lacet est contractile en passant « de l'autre côté ». Ceci s'écrit aussi

$$\gamma_1 ... \gamma_k = \mathrm{Id} \text{ dans } \pi_1(\mathbb{S}', a) \text{ avec } \mathbb{S}' := \mathbb{S} \setminus \{a_1, ..., a_k\}$$

On reconnait une condition de constellation. Comment passer aux permutations ?

Considérons E la fibre au-dessus du point a. Comme ce dernier est une valeur non critique, E est de cardinal n le degré du revêtement. Soit maintenant γ un lacet tracé sur la sphère image privée des a_i, basé en a. Sa préimage est une copie de n chemins partant chacun d'un point de E et arrivant chacun en un point de E. Mais le point de départ et d'arrivée n'ont aucune raison d'être les mêmes : γ induit ainsi une permutation de E, appelé *monodromie* du revêtement. On obtient ainsi un morphisme du $\pi_1$de $\mathbb{S}'$ base en a dans $\mathfrak{S}_E$. En notant σ_i l'image des générateurs sus-construits, la relation ci-dessus s'envoie sur

$$\sigma_1 ... \sigma_k = \mathrm{Id} \text{ dans } \mathfrak{S}_E.$$

Il ne manque plus que la transitivité du groupe $\langle \sigma_1, ..., \sigma_k \rangle$. Prenons deux points e et e' dans E. Notre revêtement X étant supposé connexe, il y a un chemin reliant e et e'. L'image de ce chemin est un lacet γ basé en a dont la monodromie envoie e sur e' par construction.

Avec un peu plus de travail, on montre le théorème suivant.

Théorème.

Modulo isomorphismes, les revêtements ramifiés de degré n sont en bijection avec les constellations de degré n, et cette correspondance ***préserve les passeports****.*

Si l'on souhaite compter, on ne regadera que les constellations sur $\mathfrak{S}_n$ (au lieu d'un ensemble E quelconque de cardinal n). On peut voir que compter les revêtements ramifiés avec poids $\frac{1}{|\mathrm{Aut}|}$ revient à compter les constellations de $\mathfrak{S}_n$ avec poids $\frac{1}{n!}$.

Expliquons pour finir le terme de constellation. Partant d'un graphe étoilé vers les k points de ramification, sa préimage par un revêtement de degré n est une copie de n étoiles entremêlées au-dessus des points de ramification. Une constellation est donc un enchevêtrement d'étoiles.

1.4 Le problème de Hurwitz

Nous pouvons enfin formuler le problème d'Hurwitz. Pour cela, il convient de rappeler la *formule de Riemann-Hurwitz* qui relie le genre d'un revêtement avec son degré de ramification :

$$2-2g=2n-r\left(f\right).$$

Définition

Un point critique d'ordre 1 *sera dit* simple. *Une valeur critique de degré de ramification* 1 *sera appelée* valeur simple.

Soit $\mu=1^{a_1}2^{a_2}...n^{a_n}$ *une partition d'un entier* $\leq n$ *et* a *une valeur critique d'un revêtement de degré* n *dont le degrés des préimages forment la partition* μ *à laquelle on a éventellement rajoutée des* 1*. Un* μ*-marquage de* a *est la donnée d'une partie à* a_1 *éléments des préimages simples de* a*.*

Un revêtement $(\mu_1,...,\mu_k)$*-marqué est un revêtement ramifié à* k *valeurs critiques muni d'un* μ_i*-marquage pour chacune de ses valeurs critiques.*

Le problème de Hurwitz.

On se donne deux entiers positifs g *et* n *ainsi que des partitions* μ_1*, ...,* μ_k *d'entiers situés entre* 0 *et* n*. Quitte à compléter les partitions avec des* 1*, on obtient un* k*-passeport de degré* n*. Pour obtenir un revêtement de genre* g *précisément, on rajoute un certain nombre* $c\left(n\right)$ *de valeurs simples. La valeur de* $c\left(n\right)$ *se trouve par la formule de Riemann-Hurwitz :*

$$\begin{aligned} 2-2g &= 2n-\sum r\left(\mu_i\right)-c\left(n\right),\ \textit{d'où} \\ c\left(n\right) &= 2n+2g-2-r. \end{aligned}$$

Le nombre de revêtements (à isomorphisme près) $(\mu_1,...,\mu_k)$*-marqués à* n *feuillets possédant le* $(k+c(n))$*-passeport précédent est un nombre* de Hurwitz*. Il est très recherché et sera noté*

$$h_{g,n;\mu_1,...,\mu_k}.$$

Il est compté avec un poids $\frac{1}{|\mathrm{Aut}|}$ *inverse du cardinal de son automorphie, de sortes que les nombres de Hurwitz sont rationnels (non nécessairement entiers).*

Les nombres de Hurwitz $h_{g,n;*}$ *comptent également les* $(k+c(n))$*-constellations sur* $\mathfrak{S}_n$ *ayant le passeport considéré, marquées par ce passeport (avec un sens évident), avec un poids* $\frac{1}{n!}$*.*

Maintenant que nous avons présenté le problème de Hurwitz sous différents angles, présentons les outils techniques nécessaire pour s'y attaquer[3]. L'article [3] exprime certains nombres de Hurwitz à l'aide d'intégrales sur l'espace des modules des courbes $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ (formule ELSV). Notre démarche sera, d'abord de présenter les outils nécessaires pour comprendre cette formule, d'expliciter ces nombres en genre 0 et 1, puis de montrer par des outils purement combinatoires que les $h_{g,n;\mu_1,...,\mu_k}$ interviennent tous dans une algèbre remarquable de séries formelles.

2 Une algèbre remarquable : $\mathcal{A}=\mathbb{Q}\left[\sum_{n\geq1}\frac{n^{n-1}}{n!}q^n,\sum_{n\geq1}\frac{n^n}{n!}q^n\right]$

Notons $\left\{\begin{array}{c} Y:=\sum_{n\geq1}\frac{n^{n-1}}{n!}q^n \\ Z:=\sum_{n\geq1}\frac{n^n}{n!}q^n \end{array}\right.$ les générateurs de notre algèbre. Un argument de dénombrement permet de linéariser le produit $YZ=Z-Y$, tuant ainsi tous les termes croisés de tout polynôme $P\left(Y,Z\right)\in\mathcal{A}$. Il en résulte :

$$\mathcal{A}=\mathbb{Q}\left[Y\right]+\mathbb{Q}\left[Z\right].$$

[3]Noter qu'en réalité c'est l'étude de la théorie de l'intersection sur l'espace des modules des courbes qui a stimulé l'intérêt pour les nombres de Hurwitz

Par ailleurs, on peut obtenir sans trop de difficulté l'asymptotique du terme général des puissances de Y et Z :

$$\left\{\begin{array}{l}\left[Y^k\right]_n \sim C_k \frac{e^n}{n\sqrt{n}} \\ \left[Z^k\right]_n \sim C'_k \frac{e^n}{n} \sqrt{n}^k\end{array}\right. \quad \text{où } C_k \text{ et } C'_k \text{ sont des constantes.}$$

On voit de suite que seul compte le terme dominant en Z. Ainsi, si l'on connaît suffisament de termes d'une série $S \in \mathcal{A}$, on peut reconstituer son expression polynomiale en Y et Z et ainsi en déduire son asympotique.

C'est un fait remarquable (et un théorème difficile !) que toutes les séries suivantes[4] réside dans $\mathcal{A}$:

$$H_{g;\mu_1,\dots,\mu_k} := \sum_{n\geq 1} \frac{h_{g,n;\mu_1,\dots,\mu_k}}{c(n)!} q^n$$

où $c(n) = 2n + 2g' - r$ désigne le nombre de valeurs simples supplémentaires.

Nous allons expliquer les étapes qui permettent d'aboutir à ce résultat[5].

3 Formule ELSV

Le point de départ est une formule qui exprime les nombres de Hurwitz à l'aide d'une intégrale sur le compactifié $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ de Deligne-Mumford de l'espace des modules des courbes de genre g à n point marqués.

Commençons par quelques rappeles de cohomologie.

Étant donné un espace topologique X, on dispose d'un $\mathbb{Q}$-module $H_*(X,\mathbb{Q}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_k(X,\mathbb{Q})$, appelé *homologie de* X (à coefficients rationnels). Les éléments de $H_k(X,\mathbb{Q})$ sont les $\mathbb{Q}$-combinaisons linéaires formelles d'applications continues du simplexe de dimension k à valeurs dans X (les *k-cycles*) modulo certains cycles particuliers (les *k-bords*)[6]. Noter que $H_0(X,\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.

Lorsque X est une variété, on peut remplacer les k-cycles par des combinaisons linéaires de sous-variétés de dimension k. Si X est de dimension finie n, sa *classe fondamentale* est la classe d'homologie $[X]$ du n-cycle X.

La *cohomologie* (rationnelle) de X est le dual de l'homologie[7]. On peut la munir d'un produit (le *cusp*) qui en fait une algèbre graduée anti-commutative $H^*(X,\mathbb{Q})$.

Si X est une variété compacte, orientée, de dimension n, on dispose d'une dualité de Poincaré

$$H_k(X) \simeq H^{n-k}(X).$$

Intuitivement, à un k-cycle C, on associe l'application qui compte le nombre d'intersection d'un $(n-k)$-cycle avec C.

La dualité de Poincaré implique la nullité des groupes d'homologie et de cohomologie au-delà de la dimension de X :

$$H_i(X) \text{ et } H^i(X) = 0 \text{ pour } i > \dim X.$$

Elle nous dit aussi que $H^n(X,\mathbb{Q}) \simeq H_0(X,\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$ est une droite, dont un générateur est la forme $\lambda[X] \longmapsto \lambda$.

La dualité de Poincaré reste valable si X est un orbifold compact.

L'*intégrale* d'une classe de cohomologie $\xi = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$ (avec $\xi_i \in H^i$) est définie par

$$\int_X \xi := \xi_n([X])$$

(on filtre les degrés $< n$ puis on évalue en la classe fondamentale).

Tout ce que nous aurons besoin de savoir sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, c'est qu'il s'agit d'un orbifold compact. En tant qu'espace topologique, il possède donc une algèbre graduée anti-commutative de cohomologie $H^*\left(\overline{\mathcal{M}}_{g,n},\mathbb{Q}\right)$ à coefficients rationnels. La compacité de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ permet de parler de dualité de Poincaré sur ce dernier. Sa dimension est $2(3g-3+n)$. Par ailleurs, les classes mises en jeu dans la formule suivantes sont toutes de degré pair (ce sont des classes de Chern) et donc commutent.

[4] à l'exception des partitions vide en genre 1)

[5] *cf.* [11] pour les détails

[6] On renvoit à l'ouvrage Algebraic topology de Hatcher pour plus de précision. Essentiellement, l'homologie permet de voir les trous d'un espace : par exemple, le H^1 (réel) d'un g-tore est $\mathbb{R}^{2g}$.

[7] Attention, cette définition est à adapter si l'anneau de base n'est plus un corps.

La formule d'Ekedahl-Lando-Shapiro-Vainshtein est la suivante :

$$\frac{h_{g,n;\mu}}{c(n)!}=\frac{1}{|\mathrm{Aut}\,\mu|}\frac{1}{(n-p-r)!}\frac{d_1^{d_1}...d_p^{d_p}}{d_1!...d_p!}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n-r}}\frac{1-\lambda_1+\lambda_2-...+(-1)^g\lambda_g}{(1-d_1\psi_1)...\left(1-d_p\psi_p\right)\left(1-\psi_{p+1}\right)...\left(1-\psi_{n-r}\right)}.$$

Pour un soucis de clarté, nous ne nous intéresserons qu'au cas où μ partitionne entièrement n. La formule ci-dessus devient alors (noter qu'alors $n=p+r$) :

$$\frac{h_{g,n;\mu}}{c(n)!}=\frac{1}{|\mathrm{Aut}\,\mu|}\prod_{i=1}^{p}\frac{d_i^{d_i}}{d_i!}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,p}}\frac{1-\lambda_1+\lambda_2-...+(-1)^g\lambda_g}{(1-d_1\psi_1)...\left(1-d_p\psi_p\right)}.$$

Développer l'intégrale fait apparaître plein de termes de la forme $\beta\psi_1^{k_1}...\psi_p^{k_p}$ où $\beta\in H^*\left(\overline{\mathcal{M}}_{g,p},\mathbb{Q}\right)$ dont l'intégrale est non nulle seulement si $b+\sum k_i=3g-3+p$ avec $\deg\beta=2b$. Nous appellerons ces intégrales *chevrons de Witten* et les noterons

$$\left\langle\beta,\tau_{k_1},...,\tau_{k_p}\right\rangle:=\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,p}}\beta\psi_1^{k_1}...\psi_p^{k_p},$$

le genre étant univoquement défini par la condition $b+\sum k_i=3g-3+p$.

Les chevrons de Witten vérifient deux équations qui, à elles seules, vont nous permettre de montrer notre théorème. Leur nom provient de la physique. Il s'agit de l'*équation des cordes*

$$\left\langle\tau_{d_1},...,\tau_{d_n},\tau_{\underline{0}}\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left\langle\tau_{d_1},...,\tau_{d_{i-1}},\tau_{d_i-1},\tau_{d_{i+1}},...,\tau_{d_n}\right\rangle$$

et de l'*équation du dilaton*

$$\left\langle\tau_{d_1},...,\tau_{d_n},\tau_{\underline{1}}\right\rangle=(2g-2+n)\left\langle\tau_{d_1},...,\tau_{d_n}\right\rangle,$$

qui s'obtiennent en considérant des morphismes d'oubli sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

Noter que, en genre <2, la relation $b+\sum_{i=1}^n d_i=3g-3+n$ impose que l'un des d_i valle 1 ou 0, ce qui montre que les deux relations ci-dessus déterminent entièrement les chevrons de Witten. À l'aide du calcul des valeurs initiales $\left\langle\tau_0^3\right\rangle=1$ et $\langle\tau_1\rangle=\frac{1}{24}$, on trouve une formule explicite pour les nombres de Hurwitz ayant une seule partition en genre 0 ou 1 :

$$\begin{aligned}h_{0,n;\mu}&=\frac{(2n-2-r)!}{|\mathrm{Aut}\,\mu|}\frac{d_1^{d_1}...d_p^{d_p}}{d_1!...d_p!}\frac{n^{n-r-3}}{(n-p-r)!}\text{ et}\\h_{1,n;\mu}&=\frac{1}{24}\frac{(n+p)!}{|\mathrm{Aut}\,\mu|}\frac{d_1^{d_1}...d_p^{d_p}}{d_1!...d_p!}\left(n^p-n^{p-1}-\sum_{i=2}^{p}(i-2)!\sigma_i\left(\overrightarrow{d}\right)n^{p-i}\right).\end{aligned}$$

En genre ≥ 2, on peut encore dire des choses concernant les séries $H_{g;\mu}$.

4 Extensions de graphes simples

Un *chevron* $\langle\cdot\rangle$ est une application qui à une suite finie $(d_1,...,d_n)$ d'entiers positifs associe un rationnel $\left\langle\tau_{d_1},...,\tau_{d_n}\right\rangle$.

Tous les graphes considérés seront non orientés, non nécessairement connexes. Les arêtes multiples et les boucles sont autorisées.

Définition.

*L'opération (C) consiste à effacer une feuille et son arête adjacente (C comme « **c**orde »)*

*L'opération (D) consiste à effacer, si ses deux arêtes adjacentes sont distinctes, un sommet de degré deux et à fusionner ces dernières (D comme « **d**ilaton »).*

Concrètement, (C) permet de tuer les arbres, tandis que (D) permet d'effacer les sommets qui trainent sur une « longue » arête :

$$\bullet\longleftrightarrow\bullet\longleftrightarrow\ ...\ \longleftrightarrow\bullet\longleftrightarrow\bullet.$$

La restriction pour appliquer (D) empêche de détruire une boucle isolée :

$$\bullet \circlearrowleft .$$

Nous allons maintenant appliquer les opérations (C) et (D) à une famille particulière de graphes.

Définition.
Un graphe n-décoré est un graphe à $n+1$ sommets, un étiqueté $*$ et les autres numérotés de 1 à n.
La simplification *d'un graphe décoré G est le graphe S obtenu en appliquant les opérations (C) et (D) autant de fois que possible sans toucher ni au sommet $*$ ni à son degré. Les sommets de S ne sont plus numérotés. On dira aussi que G est une* extension *de S (ou n-extension si G est n-décoré).*
Une symétrie *ou* automorphisme *d'un graphe décoré est une permutation des demi-arêtes incidentes à chaque sommet qui ne casse pas les arêtes. On note* $\operatorname{Aut} G$ *le groupe de symétrie d'un graphe décoré G. Si l'on connaît les multiplicités $m(a)$ des arêtes de G, on a*

$$|\operatorname{Aut} G| = \prod_{a \text{ arête}} m(a)!.$$

Il est utile de remarquer que, pour simplifier un graphe décoré, on peut d'abord tuer tous les arbres, puis éliminer les éventuels sommets trainant sur des « longues » arêtes (inutile d'appliquer (D) à l'intérieur d'un arbre voué à l'extinction). Ceci permet de décrire les extensions d'un graphe insimplifiable : on plante un arbre au pied de chaque sommet (sauf $*$), et on enracine des arbres le long de chaque arête.

Pour définir nos nouveaux chevrons, nous allons justement compter les extensions de graphes dits *simples*, au sens où nous ne pourrons plus leur appliquer l'opération (C) ou (D).

Définition.
Un graphe simple *est un graphe possédant un sommet marqué $*$ de degré quelconque, ainsi que plusieurs autres sommets chacun de degré ≥ 3.*
On se donne un entier $g \geq 2$. Pour S graphe simple de caractéristique d'Euler[8] $3-2g$ *on définit le S-chevron par le nombre $\langle \tau_{d_1}, ..., \tau_{d_n} \rangle_S$ de n-extensions de S telles que le sommet i soit de degré d_i+1, comptées avec poids $\frac{1}{|\operatorname{Aut}|}$.*

Proposition.
Les S-chevrons satisfont la relation des cordes et la relation du dilaton.

Ainsi, toute combinaison linéaire de S-chevrons est un chevron qui vérifie la relation des cordes et la relation du dilaton. On dispose de la réciproque.

Définition.
Soit $\langle \cdot \rangle$ un chevron satisfaisant la relation des cordes et la relation du dilaton.
Le genre *du chevron est le nombre g apparaissant dans la relation du dilaton.*
Le chevron est dit de degré pur b s'il s'annule à moins que $b + \sum d_i = 3g - 3 + n$, i.e. *si*

$$b + \sum (d_i - 1) = 3g'.$$

Le chevron est dit de degré positif *s'il est combinaison linéaire de chevrons à degré pur positif.*

Théorème.
Soit $\langle \cdot \rangle$ un chevron invariant par permutation de ses variables, qui vérifie la relation des cordes et la relation du dilaton pour un genre $g \geq 2$, et qui est de degré positif. Alors il existe des graphes simples S_1, ..., S_k tels que $\langle \cdot \rangle$ soit combinaison linéaire des chevrons $\langle \cdot \rangle_{S_1}$, ..., $\langle \cdot \rangle_{S_k}$.

Nos chevrons de Witten s'expriment donc à l'aide de chevrons associés à des graphes simples.

Nous avons par ailleurs le résutat suivant.

[8] On rappelle que la caractéristique d'Euler d'un graphe est la somme $\chi := S - A$ où S est le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes.

Proposition.
Soit S un graphe simple. Notons s le nombre de ses sommets (sans compter $*$) et a celui de ses arêtes. On a alors l'identité

$$F_S(q) := \sum_{n\geq 0} \frac{q^n}{n!} \sum_{d_1,\dots,d_n} \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_S = \frac{1}{|\mathrm{Aut}\, S|} Y^s (1+Z)^a .$$

En particulier, la fonction génératrice F_S est dans $\mathcal{A}$.

Corollaire.
On se donne un genre $g \geq 2$ et β une classe de cohomologie sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,0}$. Alors, en désignant par β les tirées en arrière de β dans les $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ via les morphismes d'oubli, la série suivante se trouve dans $\mathcal{A}$:

$$F_{g,\beta}(q) := \sum_{n\geq 0} \frac{q^n}{n!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \frac{\beta}{(1-\psi_1)\dots(1-\psi_n)}.$$

C'est ce genre d'argument qui, généralisé, permet d'aboutir à notre théorème $H_{g;\mu} \in \mathcal{A}$.

5 Miscellanées sur un théorème de M. Kazarian

M. Kazarian a récemment trouvé une formule explicite pour la série $H_{g;\mu}$ à l'aide des générateurs Y et Z de notre algèbre $\mathcal{A}$. .

Théorème (Kazarian).
Soit $g \geq 2$ un genre et $\mu = d_1 + \dots + d_p$ une partition. Alors la série $H_{g;\mu}$ peut s'écrire

$$H_{g;\mu} = \frac{1}{|\mathrm{Aut}\, \mu|} \frac{d_1^{d_1} \dots d_p^{d_p}}{d_1! \dots d_p!} Y^{d_1+\dots+d_p} (Z+1)^{2g'+p} \varphi(Z)$$

où $\varphi(Z)$ est le polynôme

$$\varphi(Z) := \sum_{k\geq 0} \frac{Z^k}{k!} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,p+k}} \frac{1-\lambda_1+\lambda_2-\dots+(-1)^g \lambda_g}{(1-d_1\psi_1)\dots(1-d_p\psi_p)} \frac{\psi_{p+1}^2 \dots \psi_{p+k}^2}{(1-\psi_{p+1})\dots(1-\psi_{p+k})}$$

de degré $d := 3g'+p$ et de terme dominant $\frac{\langle \tau_2^d \rangle}{d!} Z^d$.

Cette expression explicite nous donne, grâce au travail de l'asymptotique des séries de A, un premier résultat sur asymptotique des nombres de Hurwitz.

Corollaire.
À $g \geq 2$ fixé, on a

$$\frac{h_{g,n;\emptyset}}{(2n+2g-2)!} \sim C_g \; n^{\frac{5}{2}g'-1} e^n \text{ où } C_g \text{ est une constante valant } \frac{\left\langle \tau_2^{3g'} \right\rangle}{(3g')! \; 2^{\frac{5}{2}g'} \; \Gamma\left(\frac{5}{2}g'\right)}.$$

L'on est en droit de se demander si, à l'aide de la formule de récurrence exprimant les $H_{g;\mu_1,\dots,\mu_k}$, le théorème de Kazarian ne permettrait pas d'obtenir l'asympotique de *tous* les nombres de Hurwitz. Ceci est une piste qui mériterait d'être approfondie.

6 Bibliographie

1. **V. I. Arnold**, *Topological classification of complex trigonometric polynomials and combinatorics of graphs with an equal number of vertices and edges* : Functional Analysis and its Applications, 1996, vol. 30, no. 1, 1 – 14.
2. **P. Deligne, D. Mumford**, *The irreductibility of the space of curves of given genus* : I.H.E.S., Publ. Math., 1969, vol. 36, 75-109.
3. **T. Ekedahl, S. K. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein**, *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves* : arxiv :math.AG/0004096.
4. **C. Faber, R. Pandharipande**, *Hodge integrals and Gromov-Witten theory* : Invent. Math., 2000, vol. 139, (no. 1, 173-199.
5. **E. Getzler**, *Operads and moduli spaces on genus* 0 *Riemann surfaces* : The Moduli spaces of Curves, Birkhäuser, Boston, 1995, 199-230.
6. **J. Harris, L. Morrison**, *Moduli of curves* : Springer, 1998.
7. **S. Lando, A. Zvonkin**, *Graphs on surfaces and their applications* : Springer, 2004.
8. **G. Ringel**, *Map Color Theorem* : Springer, 1974 (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 209).
9. **E. Witten**, *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space* : Journal of differential geometry, 1 (1991), 243-310.
10. **D. Zvonkine**, *Counting ramified coverings and intersection theory on Hurwitz spaces II* : arxiv :math.AG/003044251, 2003.
11. **D. Zvonkine**, *An algebra of power series arising in the intersection theory of the moduli spaces of curves ans in the enumeration of ramified coverings of the sphere* : arxiv :math.AG/0402092, 5 novembre 2004.
12. **D. Zvonkine**, *Enumeration of ramified coverings of the sphere and 2-dimensional gravity* : arxiv :math.AG/0506248, 28 août 2006.
13. **D. Zvonkine**, *Intersection theory of moduli spaces of stable curves* : Cours donné lors des *Journées mathématiques de Glanon*, 1 mars 2007.